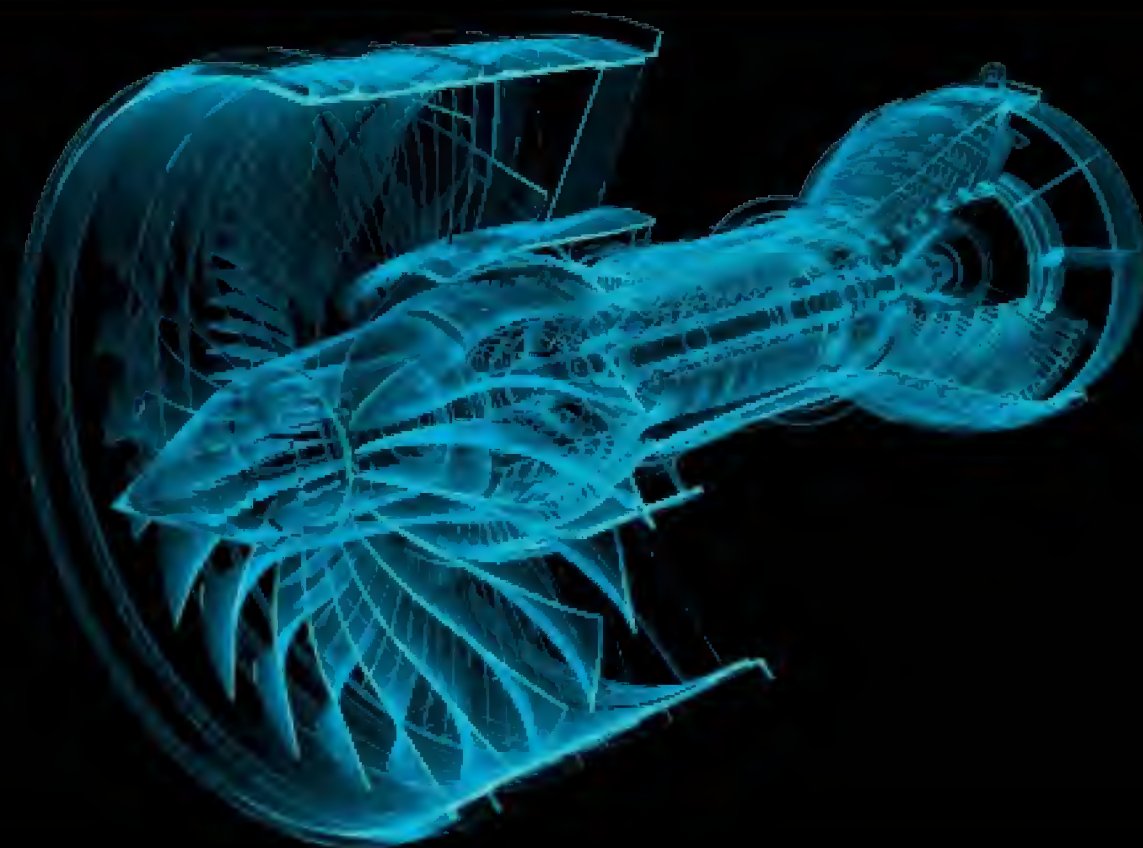


Michel Feidt

CLIMACONFORT

Efficacité énergétique & confort intérieur des bâtiments



# GÉNIE ÉNERGÉTIQUE

Du dimensionnement des composants  
au pilotage des systèmes

DUNOD

Michel Feidt

CLIMA&CONFORT

Efficacité énergétique & confort tout long des bâtiments

# GÉNIE ÉNERGÉTIQUE

Du dimensionnement  
des composants au pilotage  
des systèmes





Tout le catalogue sur  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)



Illustration de couverture : © JustContributor – Fotolia.com

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'avertir le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2014  
ISBN 978-2-10-070863-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Table des matières

AVANT-PROPOS

XI

## PARTIE 1 INTRODUCTION À L'ÉNERGÉTIQUE

CHAPITRE 1 • LE CONTEXTE ÉNERGÉTIQUE	3
1.1 Définition de l'énergétique	3
1.2 État des lieux de la situation énergétique	3
1.3 Principaux usages de l'énergie	7
1.4 Développement durable	9
CHAPITRE 2 • LES PERSPECTIVES ÉNERGÉTIQUES	13
2.1 Une abondante littérature	13
2.2 Évolution probable de la demande et de l'offre	13
2.3 Les orientations technologiques	16
2.4 Conclusions	22
CHAPITRE 3 • L'ÉNERGIE	25
3.1 Les formes de l'énergie	25
3.2 La conversion d'énergie	29

3.3	Transfert d'énergie	33
3.4	Stockage et transport d'énergie	35
3.5	Retour sur les usages de l'énergie	37
3.6	Conclusions	38

## PARTIE 2

### LES OUTILS DE L'ÉNERGÉTIQUE

<b>CHAPITRE 4 • LES BASES THERMODYNAMIQUES : LA THERMOSTATIQUE</b>	<b>43</b>
4.1 Introduction	43
4.2 Notions essentielles de thermostatique	45
4.3 Conclusion	69

<b>CHAPITRE 5 • À LA RENCONTRE DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES ET DE LA THERMOCINÉTIQUE : LE PRINCIPE DE CONSERVATION ÉTENDU</b>	<b>71</b>
5.1 Introduction : extension de la notion de transformation thermodynamique	71
5.2 Conservation de la matière	73
5.3 Conservation de quantités mécaniques	81
5.4 Conservation de l'énergie	84
5.5 Conclusion	90

<b>CHAPITRE 6 • DONNÉES THERMOPHYSIQUES</b>	<b>92</b>
6.1 Retour sur la thermodynamique analytique	92
6.2 Fonctions d'état des fluides réels	95
6.3 Les données thermodynamiques	98
6.4 Disponibilités des données thermophysiques	118
6.5 Quelques exemples de données pour les corps courants	126
6.6 Conclusion	136

<b>CHAPITRE 7 • DÉGRADATIONS D'ÉNERGIE – PRINCIPE D'ÉVOLUTION</b>	<b>137</b>
7.1 Introduction	137
7.2 Équilibre et réversibilité	138
7.3 Transformation réelle et irréversibilité	140
7.4 Efficacité d'une machine ou d'un procédé	147
7.5 Bilans entropiques et exergétiques	152
7.6 Conclusions	156

<b>CHAPITRE 8 • THERMODYNAMIQUE DES PHÉNOMÈNES IRRÉVERSIBLES LINÉARISÉE</b>	<b>158</b>
8.1 Introduction	158
8.2 Les irréversibilités et le flux de création d'entropie	158
8.3 Relations flux-force et entropie créée	166
8.4 Expression des flux en fonction des forces – approximation linéaire	169
8.5 États stationnaires de non-équilibre	172
8.6 Conclusion	176
 <b>CHAPITRE 9 • ÉCONOMIE ET ENVIRONNEMENT</b>	 <b>178</b>
9.1 Introduction : l'analyse de projet	178
9.2 Les bases de l'analyse économique	182
9.3 Thermoéconomie et prolongements	193
9.4 Études de cas sur l'optimisation thermoéconomique	215
 <b>CHAPITRE 10 • MODÈLES ET SIMULATION</b>	 <b>218</b>
10.1 Introduction	218
10.2 Modélisation	221
10.3 Simulation de systèmes et procédés	250
10.4 Quelques logiciels de simulation	255
 <b>CHAPITRE 11 • THÉORIE DE LA VALEUR ET OPTIMISATION</b>	 <b>260</b>
11.1 De la simulation à l'optimisation	260
11.2 Théorie de la valeur ; critère d'optimisation	265
11.3 L'optimisation	283

## PARTIE 3

### LES APPLICATIONS DE L'ÉNERGÉTIQUE

<b>CHAPITRE 12 • ISOLATION – CONDUCTION</b>	<b>331</b>
12.1 Introduction	331
12.2 Les bases du modèle de conduction thermique	334
12.3 Les mécanismes de la conduction : notions et conséquences	351
12.4 Des applications de la conduction	359
12.5 Étude de cas sur régime dynamique stationnaire d'un barreau en fission	371
12.6 Études de cas sur l'isolation thermique	373

<b>CHAPITRE 13 • TRANSFERTS CONVECTIFS – ÉCHANGEURS DE CHALEUR</b>	381
13.1 Introduction aux transferts couplés (chaleur-matière)	381
13.2 Convection et transferts	382
13.3 Échangeurs de chaleur	412
13.4 Échangeurs de chaleur latente	428
13.5 Optimisation d'échangeurs de chaleur	450
13.6 Études de cas sur les échangeurs de chaleur	465
13.7 Conclusion générale	469
 <b>CHAPITRE 14 • TRANSFERTS DE MATIÈRE (ET MACHINES)</b>	 472
14.1 Mécanique des fluides et transfert de matière	472
14.2 Turbomachines	480
14.3 Compression-détente	514
14.4 Physique du vide	527
14.5 Étude de cas sur l'optimisation d'un tube de Ranque	545
14.6 Conclusion	551
 <b>CHAPITRE 15 • MACHINES À CYCLES INVERSES</b>	 553
15.1 De la production de froid à la revalorisation de la chaleur	553
15.2 Les machines à compression mécanique de vapeur	567
15.3 Les machines thermiques	601
15.4 Autres machines	610
15.5 Très basses températures (TBT), la cryogénie	616
15.6 Conclusions	634
 <b>CHAPITRE 16 • COMBUSTION ET MOTEURS À COMBUSTION</b>	 637
16.1 Combustion et combustibles	637
16.2 Chaudières et fours	663
16.3 Moteurs à combustion interne alternatifs	668
16.4 Autres moteurs	696
 <b>CHAPITRE 17 • LA VAPEUR D'EAU</b>	 721
17.1 Introduction	721
17.2 Production et utilisation de la vapeur d'eau	721
17.3 L'air humide	742
17.4 Études de cas sur la vapeur d'eau et l'air humide	760



<b>CHAPITRE 18 • CONVERSION ET STOCKAGE D'ÉNERGIE</b>	<b>768</b>
18.1 Introduction	768
18.2 Énergie nucléaire	769
18.3 L'énergie solaire thermique	809
18.4 Autres conversions d'énergie	832
18.5 Stockage d'énergie	851
18.6 Conclusion	860
 <b>CHAPITRE 19 • L'INTÉGRATION DE SYSTÈMES ET PROCÉDÉS</b>	 <b>861</b>
19.1 Introduction	861
19.2 La cogénération	862
19.3 Intégration des systèmes et procédés énergétiques	872
19.4 Intégration et environnement	888
19.5 Conclusion	897

## ANNEXE

<b>ANNEXE 1 • MÉCANIQUE GÉNÉRALE</b>	<b>899</b>
A.I.1 Introduction	899
A.I.2 Cinématique du solide	899
A.I.3 Cinétique	901
 <b>ANNEXE 2 • MATHÉMATIQUE – TRANSFORMATION DE LEGENDRE</b>	 <b>903</b>
A.II.1 Expression des équations de Navier-Stokes en systèmes de coordonnées cartésien, cylindrique, sphérique	903
A.II.2 Facteur intégrant	905
A.II.3 Transformation de Legendre	908
 <b>ANNEXE 3 • MÉCANIQUE DES FLUIDES</b>	 <b>911</b>
 <b>ANNEXE 4 • DONNÉES THERMOPHYSIQUES</b>	 <b>913</b>
 <b>INDEX</b>	 <b>923</b>



# Avant-propos

Le présent ouvrage a pour objectif d'être une référence dans le domaine de l'énergétique, qui constitue un domaine clé pour l'avenir du monde. Cela se manifeste non seulement dans les diverses crises que nous avons connues durant les trente dernières années, mais aussi par la contrainte de protection de l'environnement de plus en plus forte.

L'approche proposée s'appuie avant tout sur la physique (thermodynamique) et les sciences pour l'ingénieur ; toutefois les aspects scientifiques et techniques sont prolongés par des aspects technologiques et surtout économiques, que l'ingénieur ne peut ignorer. L'écoconception et le développement durable sont abordés.

D'un point de vue fondamental, un prolongement des connaissances actuelles de thermodynamique vers une « thermodynamique optimale généralisée » est abordé ; cette conjecture suppose une relation forte entre le principe d'évolution (second principe de la thermodynamique), et l'optimisation adaptative rencontrée dans la Nature qui nous entoure, et que l'ingénieur cherche à reproduire dans ses réalisations.

L'ouvrage comporte trois parties. La première partie situe la problématique de l'énergie, son passé, ses perspectives et les concepts essentiels. La deuxième partie est centrée sur les outils de l'énergétique ; la thermodynamique, pluridisciplinaire par essence, y occupe une place centrale. Les couplages avec d'autres sciences (mécanique, chimie) y sont mis en exergue (toute forme d'énergie avec la chaleur : couplage thermoénergétique) mais plus particulièrement, vu son importance, le couplage thermomécanique. L'outil mathématique d'optimisation est largement développé aussi, puisqu'il permet d'aller de l'optimisation de conception à la gestion de systèmes instationnaires. La troisième partie traite de l'ensemble des

applications de l'énergétique ; elle sera utile aux praticiens, ingénieurs et techniciens du domaine de l'énergie-environnement.

Sont privilégiés :

- l'aspect méthodologique en insistant sur les modélisations globales ou filaires pour les systèmes thermomécaniques (les extensions 3 D et aux autres systèmes sont sans difficulté de principe) ;
- l'approche thermodynamique en dimensions finies, chère à l'auteur, montrant l'importance des échelles spatiales et temporelles entre autres ; l'analyse entropique ou exergétique sont développées.

De nombreux exemples sont relatifs aux échangeurs de chaleur dans les systèmes et procédés énergétiques, tout simplement parce que la thématique optimisation d'échangeurs en système est celle des travaux effectués dans le groupe de recherche, dont l'auteur est responsable.

Le public étudiant qui reçoit les enseignements correspondants est large : il va de la troisième année d'Université (L3) à la cinquième année (M2) ; les formations correspondantes sont tant professionnalisantes qu'orientées vers la recherche. Le livre résulte de l'expérience de l'auteur sur le site de Nancy (IUT, faculté des sciences, écoles d'ingénieurs) mais aussi hors de France (Belgique, Espagne, Roumanie, États-Unis), et lors de contacts industriels nombreux.

Sans les nombreux contacts de l'auteur, ce livre n'aurait pas cette ampleur. Que tous ceux qui s'y reconnaîtront un peu en soient remerciés ; l'appartenance au CNRS (Programme Énergie), à la SFT (Société Française des Thermiciens), mais aussi à l'IIF (Institut International du Froid, section E2) ou à des réseaux européens dont le réseau EURECO (ADEME), ont aussi grandement contribué à cet enrichissement. Mes remerciements vont aussi à l'éditeur pour sa confiance et sa patience, à M. Schwartz pour son travail de transcription du manuscrit.

Malgré tout le soin apporté à cet ouvrage, il subsiste encore des imperfections de forme et de fond. L'auteur est reconnaissant par avance aux lecteurs, des remarques et suggestions qui ne manqueront pas de venir à son attention.

Sur la période de gestation de ce livre, une personne qui m'est chère est disparue, mais il lui est dédié car, sans elle, il ne serait pas. À ma mère.

## **PARTIE 1**

---

# **INTRODUCTION À L'ÉNERGÉTIQUE**





## Chapitre 1

# Le contexte énergétique

### 1.1 DÉFINITION DE L'ÉNERGÉTIQUE

D'après la définition du *Petit Robert*, l'énergétique est la science traitant des diverses manifestations de l'énergie.

Ce nom, qui peut être aussi un adjectif, n'est pas très connu du public, du fait de sa connotation théorique. Si l'adjectif l'est davantage (aliments énergétiques, par exemple), le mot énergie, lui, est très connu, vu l'usage quotidien que tout un chacun en fait. Ce mot d'origine grecque signifie « force en action ». Nous y reviendrons dans ce livre et montrerons les relations fortes existant entre énergie, environnement et économie, mais aussi d'autres relations plus scientifiques avec entropie et énergie.

Pour paraphraser un livre récemment paru (Arthus-Bertrand Y.), nous disposons d'environ 930 pages pour réfléchir à la problématique énergétique actuelle, sachant que l'énergie est, avec l'eau et la sécurité, un des trois problèmes majeurs du moment. On rappellera à cette occasion la notion de développement durable, telle qu'elle est donnée dans le rapport de G.H. Brundtland, qui a défini cette notion en 1987 : « répondre aux besoins du présent sans compromettre (ou au minimum maintenir) la capacité des générations futures de répondre aux leurs ».

### 1.2 ÉTAT DES LIEUX DE LA SITUATION ÉNERGÉTIQUE

#### 1.2.1 Quelques remarques générales

La population mondiale était de 2,5 milliards d'habitants en 1950 et de 6,2 milliards en 2002. L'estimation pour 2050 est dans une fourchette de 8 à 9 milliards (environ 50 % de plus qu'en 2000). Malgré le ralentissement, cette croissance génère des besoins.

Les sources d'énergie dans le monde sont actuellement le pétrole (34,9 %), le charbon (23,5 %), le gaz (21,1 %), le nucléaire (6,8 %), puis les énergies renouvelables (13,8 %, dont 10,7 % pour la biomasse) : la dépendance aux énergies fossiles, donc épuisables, est flagrante.

À cela s'ajoute un couplage avec l'évolution de l'environnement qui représente un enjeu mondial, du fait des changements climatiques annoncés. Le couplage entre le réchauffement planétaire, le peuplement et les émissions de gaz à effet de serre n'est un secret pour personne. Même si selon les scénarios l'augmentation du CO<sub>2</sub> atmosphérique peut passer de 370 ppm (partie par million) aujourd'hui à 550 ppm, voire 1 100 ppm en 2100, cela se traduira par un réchauffement atmosphérique de + 2 à + 6 °C à la même date. Cela ne sera pas sans conséquence, dont un bouleversement de la biodiversité.

### 1.2.2 Quelques chiffres sur la situation énergétique actuelle

#### a) Importance reconnue de la place de l'énergie

Un débat national sur les énergies a eu lieu en France au premier semestre 2003 (MEFI 1). Le document correspondant, à l'initiative du Ministère de l'économie, des finances et de l'industrie centrait le débat sur les énergies en relation avec l'environnement, la qualité de vie, le développement durable.

Ce débat a été relayé par un bilan publié dans les *Cahiers de l'industrie* (Industries) ; des contacts utiles figurent dans le même document (p. 21). Le débat se poursuit depuis.

Parmi les publications du Ministère de l'économie, des finances et de l'industrie, on notera l'édition 2004 des données et chiffres clés sur les bilans de l'énergie en France (MEFI 2), très détaillée ; les chiffres en bref figurent dans la référence (MEFI 3). Des compléments d'information peuvent être obtenus sur le site [www.industrie.gouv.fr/industrie](http://www.industrie.gouv.fr/industrie). Enfin, la Direction générale de l'énergie et des matières premières (DGEMP) édite une lettre d'information trimestrielle gratuite.

#### b) Une unité hors Système international

La « tep », tonne équivalent pétrole, est l'unité couramment utilisée dans les documents statistiques.

**Définition :** la tep est la quantité de combustible pétrole qui fournit la même quantité de chaleur par combustion.

On note que cette définition manque de rigueur scientifique, si elle est commode d'usage : l'arbitraire provient essentiellement de la qualité du combustible.

- 1 tep est équivalent à ( $\approx$ ) 11 630 kWh (unité hors système) ;
- 1 Mtep représente 1 million de tep ;
- 1 tonne de charbon  $\approx$  0,6 tep ;
- 1 tonne de bois  $\approx$  0,3 tep.

Pour les unités du Système international, on se reportera à l'annexe en fin de chapitre.

## c) Quelques chiffres dans le monde, en Europe, en France

Le tableau 1.1 (DGEMP) rend compte des données de 2002. Y figurent la population, la consommation totale d'énergie primaire, d'électricité, de pétrole dans les transports et les émissions de CO<sub>2</sub>.

La lecture de ce tableau est complétée par le tableau 1.2. Il apparaît alors des spécificités flagrantes indiquées ci-après :

- l'énergie primaire dominante dans le monde, ainsi qu'aux États-Unis et en Europe est le pétrole ;
- la France utilise majoritairement l'énergie nucléaire ;
- la Russie utilise majoritairement le gaz naturel ;
- la Chine utilise majoritairement le charbon.

Les situations sont donc très diverses : les 29 pays de l'OCDE (Organisation de coopération et de développement économique) consomment 5 500 Mtep en énergie primaire, alors que le reste du monde en utilise 4 600. Les consommations par habitant et par an sont très disparates :

États-Unis	8,1 tep	Chine	0,9 tep
France	4,3 tep	Afrique	0,6 tep
Allemagne	4,2 tep	Monde	1,7 tep

En France, en 1973, 75 % de l'énergie était importée ; en 2001, ce pourcentage est tombé à 50 % (voir tableau 1.1).

La production d'électricité est essentiellement assurée par EDF, malgré la libéralisation récente du marché (EDF-GDF, et site [www.edf.fr](http://www.edf.fr)). La production se répartit comme indiqué ci-dessous :

- électricité nucléaire 85,7 %
- électricité hydraulique 9,3 %
- charbon 3,3 %
- fioul 1,3 %
- gaz 0,3 %
- renouvelable biomasse 0,1 %

L'électricité achetée se répartit de façon suivante :

- thermique 65,4 %, dont 43,4 % gaz  
21,9 % charbon  
0,1 % fioul
- renouvelable 28,4 %, dont 24,3 % hydraulique  
2,6 % biomasse  
1,1 % éolien  
0,4 % autres
- nucléaire 0,2 %

Il reste 6 % non identifiés.

TABLEAU 1.1 Données annuelles 2002 de la situation énergétique (DGEMP)

Données annuelles 2002	France	UE (25)	États-Unis	Russie	Chine	Reste du monde	Monde
Population (millions d'habitants)	61	455	287	144	1 287	4 021	6 196
PIB (milliards de dollars US 1995 ppa)	1 453	9 556	9 196	1 039	5 359	18 264	43 413
PIB par habitant (milliers de dollars US 1996 ppa)	23,7	21,0	32,0	7,2	4,2	4,5	7,0
Consommation totale d'énergie primaire (Mtep)	266	1 692	2 290	618	1 245	4 385	10 231
Consommation d'énergie primaire par hab. (tep)	4,3	3,7	8,0	4,3	1,0	1,1	1,7
Consommation d'énergie primaire par unité de PIB ppa (tep/1 000 US\$ 95 ppa)	183	177	249	595	232	240	236
Consommation totale d'électricité (TWh)	451	2 848	3 802	771	1 554	5 726	14 701
Consommation d'électricité par habitant (MWh)	7,4	6,3	13,2	5,3	1,2	1,4	2,4
Consommation d'électricité par unité de PIB ppa (kWh/1 000 US\$ 95 ppa)	310	298	413	742	290	314	339
Consommation de pétrole pour les transports (Mtep)	52	339	605	50	80	673	1 746
Consommation de pétrole pour les transports par habitant (tep)	0,84	0,74	2,1	0,35	0,06	0,17	0,28
Émissions totales de CO <sub>2</sub> dues à l'énergie (MtC)	103	1 024	1 542	410	902	2 695	6 573
Émissions totales de CO <sub>2</sub> dues à l'énergie par habitant (tC)	1,7	2,2	5,4	2,8	0,7	0,7	1,1
Émissions totales de CO <sub>2</sub> dues à l'énergie par unité de PIB ppa (kgC/1 000 US\$ 95 ppa)	71	107	168	395	168	148	151
Taux d'indépendance énergétique ppa : parité de pouvoir d'achat	50,6 %	53,4 %	72,8 %	167,4 %	98,1 %	125,0 %	100,7 %

TABLEAU 1.2 CONSOMMATION EN ÉNERGIE PRIMAIRE (2002)

%	France	UE	Russie	États-Unis	Chine	Monde
Charbon	5	18	17	24	57	23
Pétrole	34	38	21	40	20	36
Gaz naturel	14	23	53	23	3	21
Électricité nucléaire	41	15	6	9	1	7
Électricité hydraulique	2	2	2	1	2	2
Autres énergies (renouvelables)	5	4	1	3	17	11
TOTAL Mtep	266	1 692	618	2 290	1 245	10 231

## 1.3 PRINCIPAUX USAGES DE L'ÉNERGIE

### 1.3.1 Trois usages essentiels

L'énergie est utilisée pour trois usages principaux :

- dans l'habitat ;
- dans les transports ;
- dans l'industrie.

Dans le cas particulier de la France, des efforts d'utilisation rationnelle de l'énergie ont été faits depuis 1973, sous l'impulsion coordonnée de ce qui est devenue l'ADEME (Agence de l'environnement et maîtrise de l'énergie).

Ainsi, dans le domaine de l'habitat, les normes de construction, isolation, ventilation ont fortement évoluées. La consommation dans l'habitat représente environ 1/3 de la facture énergétique.

Les transports, malgré des progrès, ont vu par contre leur part passer de 19,7 % en 1973, à 31,8 % en 2001. On peut noter à cette occasion la hiérarchie des transports :

- automobile : 4,5 ;
- avion : 4,2 ;
- autobus ; 2,1 ;
- train, RER : 1,5 ;
- TGV : référence.

**Remarque :** On peut se poser la question de ce même coefficient pour le vélo ou la marche à pied.

Dans l'industrie, un effort conséquent d'économie a déjà été accompli.

### 1.3.2 Conséquences de ces usages

#### a) Les gaz à effet de serre (GES)

Au-delà des usages de l'énergie, la prise de conscience du réchauffement planétaire (1967) a abouti récemment (1997) au protocole de Kyoto, qui vient d'entrer en vigueur en 2005, pour échéance en 2012. On rappellera à cette occasion que l'effet de serre a été découvert en 1827 par Joseph Fourier et que Svante Arrhenius, en 1895, a établi le lien entre la hausse de concentration en gaz carbonique (CO<sub>2</sub>) atmosphérique et l'effet de serre correspondant. En fait, d'autres gaz participent à ce même effet : vapeur d'eau, méthane (CH<sub>4</sub>), oxyde d'azote (NO<sub>x</sub>) principalement.

Depuis 1850 (début de l'ère industrielle), la concentration en CO<sub>2</sub> a augmenté de 30 %, celle de CH<sub>4</sub> a été multipliée par 2.

#### b) Changement climatique ou choc climatique

Sans gaz à effet de serre, la température atmosphérique serait de – 15 °C. La température ambiante a été « stable » sur une période de 10 000 ans environ, telle que nous la connaissons. Puis sont apparus récemment des perturbations (inondations, sécheresse, ouragans, fonte de glace, trou dans la couche d'ozone). Autant d'alertes qui vont jusqu'à la disparition possible du Gulf Stream.

Si cela paraît excessif, il n'en reste pas moins que la durée de vie des GES est d'environ 100 ans, pour une diffusion atmosphérique de quelques mois : le problème est donc un problème mondial, malgré et avec ses disparités.

À titre d'exemple, les émissions en kilogramme de CO<sub>2</sub> par habitant et par an en 2000 étaient de :

États-Unis	6 718	Mexique	1 000
Allemagne	3 292	France	2 545

une des plus faibles émissions mondiale s'établissant à 411.

Par rapport aux diverses énergies standard les émissions de CO<sub>2</sub> en g/kWh sont les suivantes :

charbon	800-1 050	hydraulique	4
gaz	430	photovoltaïque	60-450
biomasse	1 500	éolien	3-22
nucléaire	6		

Ces chiffres sont encore en discussion ; ils représentent des ordres de grandeur.

**Remarque :** Le chiffre donné pour le gaz est relatif à une centrale à cycle combiné. Celui sur la biomasse peut s'annuler en cas de replantation.

Selon une récente information, le chiffre de l'hydraulique pourrait être plus élevé, vu ses conséquences sur l'environnement en début d'exploitation.



## 1.4 DÉVELOPPEMENT DURABLE

### 1.4.1 La contrainte environnementale

Comme on vient de le voir, la problématique actuelle liée aux usages d'énergie est de satisfaire aux besoins, sans risque pour la santé, en préservant les ressources naturelles et en protégeant l'environnement.

La tendance actuelle est aux Écobilans ou à l'analyse de cycle de vie (ACV) ; la prise en compte de coûts environnementaux et sociaux se fait plus pressante.

La prise en considération de nombreux polluants est de plus en plus fréquente : fluides frigorigènes (chlore), oxyde de soufre (SO<sub>2</sub>), particules, déchets nucléaires, métaux lourds, composés organiques volatils (COV).

La pollution sonore (avions), thermique (eau), voir olfactive apparaissent aussi.

### 1.4.2 Projet ou rupture de civilisation

À l'augmentation constante des flux, dont les flux de matière et d'énergie, qui vise essentiellement le court terme par l'intermédiaire d'une richesse liée à la quantité (le thermodynamicien dirait l'extensité), l'alternative peut être de privilégier la durée et la qualité des services rendus (le thermodynamicien considère alors le temps et l'intensité).

L'énergétique et la thermodynamique sont des outils permettant l'analyse des progrès « techniques » : ceux-ci sont-ils toujours liés à une course à la vitesse ou à la puissance ?

Le présent livre se propose d'aider à cette réflexion sous forme au moins scientifique, sans pour autant négliger les autres aspects.

## BIBLIOGRAPHIE

ARTHUS-BERTRAND Y., *365 jours pour réfléchir à notre terre*. Paris, Éditions de la Martinière, 2004.

DGEMP, *Énergies et matières premières*, Lettre n° 25, décembre 2004.

EDF – GDF, *Lettre d'information*, novembre 2004, avril 2005.

MEFI 1, Ministère de l'économie, des finances et de l'industrie, *Énergie, Comprendre pour choisir*. [www.debat-energie.gouv.fr](http://www.debat-energie.gouv.fr), 2003.

Industries, *Bilan – Pratique*, n° 85, p. 19 et 21, avril 2003.

MEFI 2, Ministère de l'économie, des finances et de l'industrie, *Les bilans de l'énergie 1970–2003, données et chiffres clés*, Paris, Éditions de l'Industrie, 2004.

MEFI 3, Ministère de l'économie, des finances et de l'Industrie, *L'énergie en France, chiffres clés et repères*, 2004.

*Science et Vie*, « Effet de serre, Kyoto enfin sur les rails », février 2005, p. 86-91.

## DÉFINITION DES UNITÉS DU SYSTÈME INTERNATIONAL

### Unités de base

Le Système international d'unités est fondé sur les sept unités suivantes, appelées unité de base :

Nom	Symbole	Définition
mètre	m	Le mètre est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde, dans le vide, du rayonnement correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de krypton-86.
kilogramme	kg	Le kilogramme est l'unité de masse ; il est égal à la masse du prototype international du kilogramme.
seconde	s	La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes du rayonnement correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium-133.
ampère	A	L'ampère est le courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \times 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.
kelvin	K	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau ; le point triple de l'eau est la température d'équilibre ( $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; $273,16\text{ K}$ ) entre la glace pure, l'eau exempte d'air et de vapeur d'eau.
mole	mol	La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone-12. Lorsqu'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, d'autres particules ou des groupements spécifiés de ces particules.
candela	cd	La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12}$ hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est $1/683$ watt par stéradian.

### Unités dérivées

Les unités dérivées sont des unités qui sont exprimées algébriquement en fonction des unités de base. Certaines d'entre elles portent des noms spéciaux :

Nom	Symbole	Définition
radian	rd	Le radian est l'angle plan compris entre deux rayons qui, sur la circonférence d'un cercle, interceptent un arc de longueur égale à celle du rayon.
stéradian	sr	Le stéradian est l'angle solide qui, ayant son sommet au centre d'une sphère, découpe, sur la surface de cette sphère, une aire égale à celle d'un carré dont la longueur des côtés est égale au rayon de la sphère.
newton	N	Le newton est la force qui communique à un corps ayant une masse d'1 kilogramme, l'accélération d'1 mètre par seconde carré.
pascal	Pa	Le pascal est la pression (ou contrainte) produite par une force d'un newton appliquée à une surface d'1 mètre carré.
joule	J	Le joule est le travail effectué lorsque le point d'application d'une force d'1 newton se déplace d'une distance égale à 1 mètre dans la direction de la force.
watt	W	Le watt est la puissance qui donne lieu à une production d'énergie égale à 1 joule par seconde.
hertz	Hz	Le hertz est la fréquence d'un phénomène périodique dont la période est d'1 seconde.
coulomb	C	Le coulomb est la quantité d'électricité transportée en une seconde par un courant d'un ampère.
volt	V	Le volt est la différence de potentiel électrique entre deux points d'un conducteur parcouru par un courant constant d'1 ampère lorsque la puissance dissipée entre ces points est égale à 1 watt.
farad	F	Le farad est la capacité d'un condensateur électrique entre les armatures duquel apparaît une différence de potentiel d'1 volt lorsqu'il est chargé d'une quantité d'électricité égale à 1 coulomb.
henry	H	Le henry est l'inductance électrique d'un circuit fermé dans lequel une force électromotrice d'1 volt est produite lorsque le courant électrique qui parcourt le circuit varie uniformément à raison d'1 ampère par seconde.
ohm	$\Omega$	L'ohm est la résistance électrique qui existe entre deux points d'un conducteur lorsqu'une différence de potentiel constante d'1 volt, appliquée entre ces deux points, produit dans ce conducteur un courant d'1 ampère, le dit conducteur n'étant le siège d'aucune force électromotrice.
siemens	S	Le siemens est la conductance électrique qui existe entre deux points d'un conducteur lorsqu'un courant constant d'1 ampère passant dans ce conducteur produit une différence de potentiel d'1 volt entre ces deux points, le dit conducteur n'étant le siège d'aucune force électromotrice.
weber	Wb	Le weber est le flux magnétique qui, traversant un circuit d'une seule spire, y produit une force électromotrice d'1 volt si on l'amène à zéro en 1 seconde, par décroissance uniforme.

Nom	Symbole	Définition
tesla	T	Le tesla est l'induction magnétique équivalent à 1 weber par mètre carré.
lumen	lm	Le lumen est le flux lumineux émis dans l'angle solide d'un stéradian par une source ponctuelle uniforme ayant une intensité d'1 candela.
lux	lx	Le lux est l'éclairement d'une surface qui reçoit, d'une manière uniformément répartie, un flux lumineux d'1 lumen par mètre carré.
becquerel	Bq	Le becquerel est l'activité des radionucléides égale à 1 par seconde.
gray	Gy	Le gray est la dose absorbée égale à 1 joule par kilogramme.
degré Celsius	°C	Le degré Celsius a le même ordre de grandeur que le kelvin. La température Celsius se définit comme suit : $T = T - T_0$ où $T$ = température mesurée en kelvin et $T_0 = 273,15$ K
sievert	Sv	Le sievert est l'équivalent de dose, dans le domaine de la radioprotection, égal à 1 joule par kilogramme.

## NOUVELLES RÈGLES DE COMPATIBILITÉ ÉNERGÉTIQUE

Le tableau ci-après précise la notion de tep (tonne équivalent pétrole) abordée dans ce chapitre. Elle est conforme aux normes actuellement en vigueur.

Energie	Unité physique	en gigajoules (GJ) (PCI)	en tep (PCI)
<b>Charbon</b>			
Houille	1 t	26	$26/42 = 0,619$
Coke de houille	1 t	28	$28/42 = 0,667$
Agglomérés et briquettes de lignite	1 t	32	$32/42 = 0,762$
Lignite et produits de récupération	1 t	17	$17/42 = 0,405$
<b>Pétrole brut et produits pétroliers</b>			
Pétrole brut, gazole/fioul domestique, produits à usage non énergétique	1 t	42	1
GPL	1 t	46	$46/42 = 1,095$
Essence moteur et carburéacteur	1 t	44	$44/42 = 1,048$
Fioul lourd	1 t	40	$40/42 = 0,952$
Coke de pétrole	1 t	32	$32/42 = 0,762$
<b>Électricité</b>			
Production d'origine nucléaire	1 MWh	3,6	$\frac{0,086}{0,33} = 0,26$
Production d'origine géothermique	1 MWh	3,6	$0,086/0,1 = 0,86$
Autres types de production, échanges avec l'étranger, consommation	1 MWh	3,6	$3,6/42 = 0,086$
<b>Bois</b>	1 stère	6,17	$6,17/42 = 0,147$
<b>Gaz naturel et industriel</b>	1 MWh PCS	3,24	$3,24/42 = 0,077$

## Chapitre 2

# Les perspectives énergétiques

### 2.1 UNE ABONDANTE LITTÉRATURE

La prospective du domaine énergétique préoccupe de nombreux organismes depuis les chocs pétroliers de 1973 et 1979 (craintes de pénurie et menaces sur l'environnement planétaire). Ainsi l'AIE (Agence internationale de l'énergie) réalise des projections des marchés et des prix ; le Congrès mondial de l'énergie quant à lui se préoccupe davantage de l'évolution de la demande et des orientations technologiques.

On dispose ainsi à des horizons de 10 à 50 ans de scénarios sur la base d'évolutions technologiques, économiques et sociales ; un exemple de développement peut être trouvé dans l'ouvrage de J.-M. Martin.

D'un point de vue plus fondamental, le CNRS, Centre national de la recherche scientifique, développe en France un programme « Énergie » (CNRS focus : <http://www.imp.cnrs.fr/energie>). Les étudiants de 5<sup>e</sup> année de cycles universitaires reçoivent aussi couramment des enseignements dans ce domaine (DESS-EMI, devenu mastère MEPI, puis MEPP).

### 2.2 ÉVOLUTION PROBABLE DE LA DEMANDE ET DE L'OFFRE

#### 2.2.1 Demande en énergie

La consultation de la littérature met en avant :

- une croissance de la demande en électricité ;
- une demande soutenue dans le domaine des carburants.

La croissance de la demande en électricité est principalement liée à la démographie. Dans le domaine des transports, il y a un effet modérateur lié à l'efficacité énergétique correspondante : on notera à cet effet l'existence en France du Programme pour la recherche, le développement et l'innovation dans les transports terrestres (Prédit), consacré aux transports (<http://www.predit.prd.fr>).

## 2.2.2 L'offre en énergie

Elle est fortement dépendante de contraintes de capacités des ressources et aussi du potentiel d'économie d'énergie. Par ailleurs le facteur prix des sources d'énergie est important, même s'il est très « fluctuant » et si une tendance reste difficile à discerner. De ce fait le problème à résoudre paraît plus économique ou institutionnel que technique.

### a) Les tendances à moyen terme (10 ans)

La suprématie des énergies fossiles perdure : pétrole 40 %, charbon 30 %, gaz naturel 20 %, autres 10 %.

La production d'électricité se fera :

- à partir du charbon 40 %
- à partir du gaz 15 % (en augmentation)
- à partir du nucléaire 15 % (stable)
- à partir de l'hydraulique 20 % (stable)
- à partir du pétrole 10 % (en diminution)

### b) Les tendances à long terme (2020-2050)

La figure 2.1 confirme le déclin prévu du pétrole, l'importance du nucléaire et des énergies renouvelables, et sans doute, l'émergence de la biomasse tant traditionnelle que nouvelle (biocarburants par exemple).

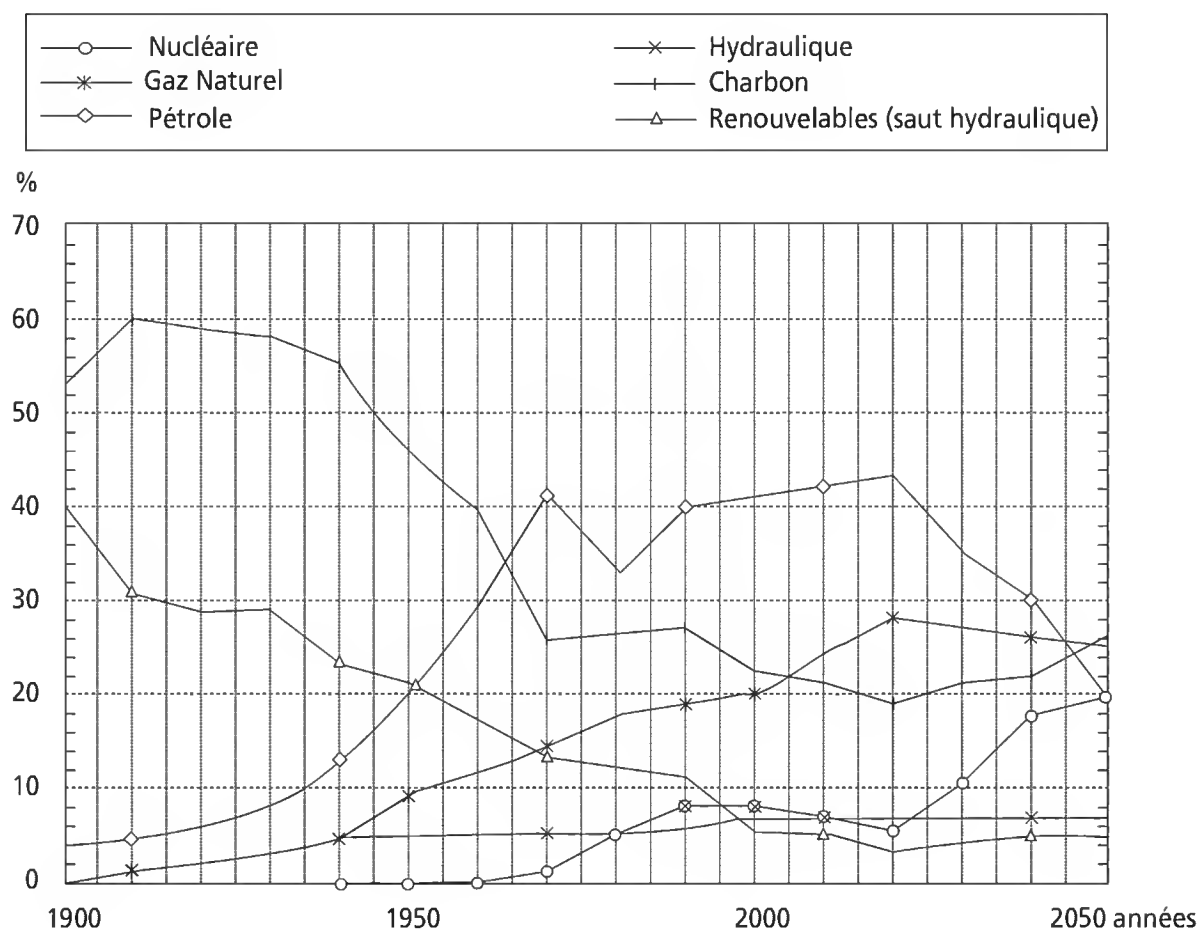
### c) Les réserves

Les estimations des réserves sont graduées en réserves prouvées, récupérables et ultimes (tableau 2.1), avec parfois des fourchettes, selon l'estimation.

TABLEAU 2.1 ESTIMATIONS DES RÉSERVES EN GTEP

Énergie	Prouvée	Récupérable	Ultime
Pétrole	150 – 193 (50 ans)	145 – 332	1 900
Gaz naturel	141 – 192 (80 ans)	258 – 279	400
Hydrates			18 700
Charbon	606 (275 ans)	2 794	3 000
Total	1 282	3 804	24 000





**Figure 2.1** Évolution possible des contributions relatives des diverses sources d'énergie (source : Total)

Il ressort de ce tableau que l'utilisation du pétrole en augmentation dans les transports a des réserves limitées à 50 ans. Le GN (gaz naturel) voit sa consommation augmenter dans l'habitat, avec des réserves estimées à 65 ans en 2002. Le charbon, à l'origine de la révolution industrielle au XIX<sup>e</sup> siècle, possède la plus grande longévité d'usage, vu ses réserves (260 ans, base 2002).

On remarque que les chiffres sont susceptibles de variations significatives selon les sources et doivent donc être relativisés. D'autre part la production d'énergie à partir des hydrates reste actuellement controversée.

L'énergie nucléaire reste un cas atypique d'énergie fossile ; les réserves prouvées varieraient entre 57 et 3 390 Gtep, les réserves ultimes entre 410 et 21 050 Gtep ; donc la limite actuelle de cette énergie serait à terme de 40 ans. La France qui génère l'essentiel de son électricité à partir de cette énergie, produit 1 kg de déchet par an et par habitant (dont 50 g à haute activité et longue durée de vie).

Les énergies renouvelables sont des énergies de type flux. De ce fait les estimations sont rapportées en Gtep/an. Le tableau 2.2 donne des estimations pour le monde.

TABLEAU 2.2 ÉNERGIES RENOUVELABLES EN GTEP/AN

Hydraulique	Biomasse	Solaire	Éolien	Géothermie	Océan
0,9	2	100 000	8	15	2

Il y a lieu de remarquer ici que ces chiffres sont fortement dépendants des technologies. Pour les coûts selon les filières on pourra se reporter à MEF13.

La France possède un bon potentiel hydraulique (en particulier sur la micro-hydraulique), de même en géothermie (expérimentation de Soultz). Le gisement éolien est le deuxième d'Europe. Il se développe actuellement en Roussillon, dans le Nord, en Charente et en Vendée. La biomasse est aussi bien représentée, puisque la forêt française est la troisième forêt d'Europe (après la Suède et la Finlande), mais les 14 millions d'hectares sont très morcelés. Par contre la biodiversité est bonne (une dizaine d'essences). On remarquera que le bois comme le pétrole n'est pas seulement combustible. Les 500 000 emplois liés au bois (essentiellement en PME) produisent :

- du bois d'œuvre 61,4 %
- du bois industriel : papier et panneau 31,1 % ; bois du feu 7,5 %
- et des déchets qui restent souvent à valoriser.

#### d) *Le bouquet énergétique*

De l'ensemble des considérations précédentes, il ressort la nécessité d'utiliser aux mieux toutes les formes d'énergie dont nous disposons, pour satisfaire à nos besoins essentiels. Ce livre a pour objet de fournir des outils en ce sens, sachant que l'industrie de l'énergie représente aujourd'hui :

- 3 % du PIB (produit intérieur brut), soit 600 € par habitant ;
- 26 % des investissements industriels ;
- 230 emplois (1 % de la population active).

## 2.3 LES ORIENTATIONS TECHNOLOGIQUES

### 2.3.1 Nécessité des progrès technologiques

Les pages précédentes ont illustré la forte corrélation existant entre le développement économique et la consommation en énergie ; il est même apparu que les freins semblaient davantage économiques, financiers ou institutionnels que techniques. Il n'en reste pas moins que l'on doit se poser les questions suivantes : les besoins énergétiques du futur sont-ils, sans apport d'énergie fossile :

- scientifiquement possibles ;
- techniquement faisables ;
- économiquement acceptables, voire rentables ;
- écologiquement (et humainement) acceptables ?

L'ordre ici n'est pas quelconque et montre que les aspects scientifiques et techniques ont un rôle important à jouer. Cela est résumé ci-après.

### 2.3.2 Un pouvoir de proposition

#### a) Dans le monde

Des organismes internationaux synthétisent et harmonisent les diverses propositions faites de par le monde. À titre d'exemple l'OTAN (NATO-OTAN, site web : <http://www.nato.int/ccms>), à travers son Comité scientifique sur les défis de la société moderne se préoccupe :

- des relations science-société-sécurité (environnement) (point de vue général) ;
- des rendements dans l'utilisation de l'énergie (aux niveaux d'entreprises, nationaux ou mondial) ;
- du stockage des déchets nucléaires dans des mines de sel.

Des associations, comme l'ASME (*American Society of Mechanical Engineers*) ont une division liée à l'énergie (avec édition de numéros spéciaux de la revue *Mechanical Engineering*). Les États-Unis se donnent ainsi 14 challenges « pour la survie au XXI<sup>e</sup> siècle » dont l'énergie nucléaire de fusion et de fission.

Il existe aussi des instituts spécialisés dont nous citons deux :

- ITG, *International Gas Turbine Institute* ;
- IIF-IIR, l'Institut international du froid ;

ou des Instituts universitaires : ETH, l'Institut fédéral suisse de technologie, a fait paraître récemment un livre blanc (Jochem E.) sur la recherche et le développement des technologies visant à l'efficacité énergétique.

#### b) En France

L'Agence de l'environnement et de la maîtrise de l'énergie (<http://www.ademe.fr>) se préoccupe de la coordination de tous les acteurs du domaine que nous explorons en relation avec l'environnement.

L'ATEE, Association technique énergie environnement, est une association plus professionnelle, qui édite une revue bimensuelle d'actualité sur l'énergie et l'environnement (*Énergie Plus*).

La Société française de thermique, SFT (<http://www.sft.asso.fr>), possède par ailleurs un groupe thématique dédié à l'énergétique. Celui-ci est subdivisé en trois sous thèmes :

- transferts thermiques et combustion ;
- thermodynamique ;
- conversion de l'énergie.

Des thèmes transverses leur sont par ailleurs associés, sur les piles à combustibles et les échangeurs de chaleur. Des journées d'études sont régulièrement organisées en relation avec d'autres sociétés et groupements.

Enfin le CNRS, par l'intermédiaire du Programme énergie, se préoccupe des aspects plus amonts.

On notera pour terminer, la parution, à l'initiative de la SFT, d'un livre blanc sur la recherche en thermique (*SFT - Livre blanc*) : celui-ci comporte un chapitre entier sur la thermique des systèmes.

On voit donc que des tribunes existent pour tous les acteurs, mais que le problème le plus délicat reste sans doute la coordination des efforts et la pluridisciplinarité des démarches. L'outil thermodynamique apparaît alors privilégié.

L'ensemble débouche pour les aspects amonts (scientifiques et techniques) qui nous intéressent sur les grandes orientations résumées dans le paragraphe suivant.

### 2.3.3 Les grandes orientations technologiques

Celles-ci sont détaillées ci-après conformément aux trois grands postes d'usage : industrie, transport, habitat.

#### a) L'industrie

Dans ce cas il s'agit de production fortement centralisée.

Les *centrales à cycles combinés* vont se développer, particulièrement par l'utilisation croissante de TAC, turbines à combustion (dans les transports hors aviation : voir l'exemple du bateau *Queen Mary 2*), mais aussi sous forme de miniturbines (30-400 kW) ; des turbines à gaz à lit fluidisé valorisant la biomasse sont attendus.

De plus, des cycles à charbon avancés devraient se développer. Ces systèmes se prêtent par ailleurs à la cogénération, voire à la trigénération (Descieux D., Feidt M.).

La production centralisée utilisera les évolutions dans le domaine de l'énergie nucléaire.

#### ► Fission et réacteurs nucléaires avancés

Marcus G.H. a proposé une sélection de 6 réacteurs pour les recherches à venir. Pour tenir compte d'informations récentes au niveau européen et français, deux programmes semblent retenus pour le moyen terme :

- réacteurs hybrides (programme européen à l'échelle de temps de 10 à 30 ans) ;
- réacteurs VHTR (*Very High Temperature Reactor*).

La France se propose de développer deux voies à terme de 15 à 50 ans :

- le réacteur à gaz à surgénération (par le CEA) ;
- le réacteur à sels fondus et thorium (par le CNRS).

### ► Fusion contrôlée

Tout le monde a entendu parler du projet ITER, projet d'envergure, mais de longue haleine.

### ► L'électricité verte

La micro-hydraulique devrait se développer dans l'avenir, mais aussi et surtout le parc éolien français (*Industries Dossier*), avec pour objectif 20 % de l'électricité produite sous forme renouvelable. L'électricité photovoltaïque, de même que la géothermie devraient participer à ce mouvement.

Aussi il existe onze projets de parcs d'éoliennes offshore pour une puissance de 500 MW, à l'horizon 2007 (selon l'ADEME).

Les cellules photovoltaïques quant à elles, seraient produites en alliage CIS (cuivre-iridium-silicium) par électrodéposition à l'horizon 2100 (étude du consortium CNRS-EDF) : une division du coût par 3 est visée. La géothermie (BRGM-EDF) vise la haute température (180 °C) avec des forages profonds (5 000 m).

### b) Les transports

Même si le pétrole offshore est une énergie fossile « à réserve évolutive » (récupération avancée du pétrole), les énergies fossiles sont épuisables. Aussi la biomasse aura un rôle de plus en plus important à jouer, même si le rendement de photosynthèse reste faible (aux environs de 1 %) : les biocarburants sont un enjeu majeur pour demain et nécessitent des études d'adaptation (actuellement, il faut environ 1 ha pour produire 1 t d'huile végétale).

Les études à moyen terme proposent toutefois d'autres alternatives, comme le *moteur hybride Diesel*, pour lequel existent des démonstrateurs (Golf Ecopower : 104 CV, 3,8 l/100 km ; PSA : 90 CV ; Toyota) (*Science et Vie* 2).

À ces expérimentations répondent par ailleurs des études à plus long terme, pour des *véhicules électriques* existant déjà sur le marché :

- batteries perfectionnées, pour 2010 ;
- supraconducteurs à température ambiante, pour 2020 ;
- pile SOFC, pour 2030 (SOFC, Solid Oxide Fuel Cell) ;
- vecteur hydrogène H<sub>2</sub>, pour 2030.

Il y a lieu ici de développer les deux derniers points.

### ► Pile à combustible

Tout d'abord la pile SOFC n'est pas la seule en développement ; la filière PEMFC (*Proton Exchange Membrane Fuel Cell*) est sans doute plus étudiée. Les applications visées vont des transports à l'habitat, en passant par le téléphone portable ; une des caractéristiques recherchée est le rapport énergie/poids (450 Wh/kg au lieu de 180 pour les batteries lithium/ions). La puissance surfacique correspondante est de l'ordre de 300 MW/cm<sup>2</sup> de surface de réaction (encombrement géométrique).

### ► Vecteur hydrogène

Le deuxième point est relatif au *vecteur hydrogène*. On distinguera à cet effet les *énergies dites primaires* ou naturelles, des *vecteurs énergétiques* issus d'une transformation des premières. Le tableau 2.3 illustre cette différence fondamentale par des exemples.

**TABLEAU 2.3** ÉNERGIES PRIMAIRES ET VECTEURS ÉNERGÉTIQUES ASSOCIÉS

Source	Formes primaires	Vecteurs énergétiques
Énergie solaire fossile	Pétrole Bitumes Charbons Tourbes	Hydrocarbures liquides
Énergie solaire renouvelable	Chute d'eau Vent Bois Biomasse	H <sub>2</sub> , CO (hydrogène, oxyde de carbone)
Énergie terrestre gravitationnelle	Géothermie Marée	Électricité
Énergie nucléaire	Fission Fusion	Eau surchauffée Métaux liquides (chaleur)

Il apparaît à cette occasion des formes stockables, qui revêtent une importance fondamentale dans le domaine des transports, puisqu'elles peuvent être « embarquées », ce qui est le cas majoritaire actuellement. Les espoirs actuels se tournent vers la production du vecteur hydrogène par voie thermodynamique, à des températures comprises entre 400 et 850 °C dans les réacteurs VHTR précédemment cités (études du CEA à Saclay). Les réactions se produisent en milieux extrêmes selon une thermodynamique complexe et manquant de données.

Pour terminer ce tour d'horizon relatif aux transports, on indiquera que le progrès en cours des moteurs à combustion interne (MCI) méritent d'être poursuivis et nous réservent sans doute encore beaucoup de surprises ; par exemple, le moteur Diesel, récemment devenu majoritaire sur le marché français, voit ses caractéristiques environnementales évoluer favorablement grâce aux filtres à particules (FAP). La réduction des émissions d'oxyde d'azote (NO<sub>x</sub>) passe sans doute par la combustion humide (Guillet R.). L'évolution des critères d'évaluation redistribue en effet fortement la donne, de façon constante comme le montre le tableau 2.4 relatif à 6 sortes de moteurs et 6 sortes de combustibles (Kreith F., West R.E.).



TABLEAU 2.4 EFFICACITÉS DE MOTEURS DU Puits À LA ROUE, EN PASSANT PAR LE RÉSERVOIR

Rendement Système	Du puits au réservoir	Du réservoir à la roue	Du puits à la roue
MCI classique : allumage commandé + CH <sub>4</sub>	0,88	0,22	0,19
Hybride à allumage commandé + CH <sub>4</sub>	0,88	0,36	0,32
Diesel classique + mélange fuel FT + CH <sub>4</sub>	0,86	0,26	0,22
Diesel hybride + mélange fuel FT + CH <sub>4</sub>	0,86	0,38	0,32
Diesel chimique + fuel FT	0,66	0,29	0,19
Diesel hybride + fuel FT	0,66	0,45	0,30
MCI classique : allumage commandé + H <sub>2</sub>	0,62	0,22	0,14
Hybride à allumage commandé + H <sub>2</sub>	0,62	0,36	0,22
PACo + H <sub>2</sub>	0,62	0,44	0,27
PACo + CH <sub>3</sub> OH	0,58	0,28	0,16
Batterie + moteurs électriques	0,48	0,44	0,21
PACo + H <sub>2</sub> (électrolyse) + moteurs électriques	0,29	0,44	0,13

**Remarque :** Les notations intervenant dans le tableau ci-dessus ont la signification suivante : FT = Fisher – Tropsch, PACo = pile à combustible.

Il ressort principalement du tableau que l'utilisation immédiate de nouveaux vecteurs énergétiques peut conduire en l'état, ou même avec de nouvelles architectures, à une forte dégradation du rendement du puits à la roue (0,19 → 0,14–0,10).

Réciproquement, une adaptation soignée du moteur au combustible peut conduire à une amélioration importante de ce même rendement (0,19 → 0,32). Les solutions les plus médiatisées ne sont pas forcément les plus prometteuses (0,27).

Des études soigneuses doivent donc être menées.

### c) L'habitat

L'énergie utilisée dans l'habitat se caractérise par une faible concentration de la demande, hormis dans les grands centres urbains. Il semble donc qu'il y ait une bonne adéquation entre les énergies de type flux, elles-mêmes de faible densité, et les besoins précédents, en particulier pour l'énergie solaire directe d'où l'intérêt d'une conception « bioclimatique » de l'habitat.

Le problème essentiel vient du décalage (déphasage) temporel courant entre l'offre et la demande : d'où l'importance du couplage avec des formes stockées

d'énergies thermique et/ou électrique. Ce point mérite des études et développements approfondis.

De plus l'excès de chaleur est aussi source d'inconfort et donc de « traitement thermique » : les zones fortement ensoleillées ont surtout besoin de rafraîchissement, voire de climatisation. Nous montrerons qu'il est possible de « faire du froid avec du chaud ».

Au solaire direct correspond aussi l'énergie solaire différée, par l'intermédiaire de la photosynthèse, sous forme de biomasse terrestre ou marine. Cela mérite considération : une prise de conscience récente débouche sur des actions en développement actuellement. On citera, par exemple, la Combustion en lit fluidisé des déchets solides de type biomasse.

Une autre voie prometteuse, peu considérée en France actuellement, est la *microcogénération*. Celle-ci peut revêtir des formes très diverses (Descieux D. et Feidt M.), voire même aboutir à la *trigénération*. L'avantage serait d'avoir sous *forme intégrée*, minimisant les pertes de distribution, un système utilisant de façon optimale l'énergie pour répondre à l'ensemble des besoins : force – chauffage – froid, climatisation – eau chaude sanitaire. De nombreuses recherches et développements sont à venir dans ce domaine ; la dernière référence citée évoque les problématiques actuelles et les verrous associés.

## 2.4 CONCLUSIONS

### 2.4.1 L'efficacité énergétique

Le présent chapitre a mis en exergue l'importance du *coût de l'énergie* et l'émergence forte de la *contrainte de l'environnement*, toutes les deux à un niveau mondial, avec l'émergence des puissances potentielles que sont la Chine, l'Inde, le Brésil et sans doute d'autres pays.

Il en résulte la nécessité de disposer de systèmes visant la qualité, la flexibilité et l'*efficacité de transformation et d'utilisation des sources* d'énergie.

Des progrès techniques et technologiques sont à rechercher pour réduire les intensités énergétiques, et par conséquent augmenter les rendements de transformation de l'énergie.

Dans l'industrie et l'agroalimentaire les progrès attendus sont :

- amélioration des systèmes à moteurs électriques ;
- gestion des chaleurs perdues ;
- perfectionnement et diffusion de techniques plus performantes.

Dans les transports, on vise des transports plus économes avec prise en compte de la pollution et de l'effet de serre.

Dans l'habitat, on tend à l'amélioration de l'efficacité de chauffage, de climatisation, et d'éclairage des locaux.

En résumé, l'objectif de l'avenir est une *Gestion optimale de l'énergie* (GOE), qui passe sans doute de façon privilégiée par l'*Optimisation thermodynamique généra-*



lisée (OTG) : l'efficacité énergétique suppose une recherche-développement et des investissements soutenus, ainsi que des normes techniques exigeantes à venir.

### 2.4.2 L'évolution envisagée de la demande et de l'offre

La demande en électricité va croître immanquablement dans l'avenir, notamment avec les grands pays émergents. Les combustibles fossiles devraient rester prédominants dans les 50 ans à venir, alors que le nucléaire fournira 10 à 15 % de l'énergie ; l'usage du charbon ne sera pas sans poser problème, alors que les énergies renouvelables ont une émergence difficile : quand atteindront-elles 40 à 50 % des besoins ?

Quoi qu'il en soit, un bouquet des énergies et des systèmes (TAC ; systèmes combinés) est inévitable. Dans le domaine des transports, les véhicules hybrides électriques et les carburants propres vont se développer, ainsi que de nouveaux modes (ferro-route).

Dans l'habitat des systèmes intégrés et décentralisés sont attendus.

### 2.4.3 Des ruptures possibles

La raréfaction de l'énergie fossile et « facile » induisant une forte augmentation du prix de l'énergie, des ruptures deviennent probables. Pour ce qui les concernent, les scientifiques doivent anticiper. P. Le Goff estimait qu'il y avait un prix écologique critique de l'énergie exploitable sur « les fluctuations de contenu énergétique de l'eau et de l'air ».

L'énergie de l'eau est assez bien connue sous forme de l'énergie :

- des vagues ;
- marémotrice ;
- d'altitude (chute d'eau) ;
- d'écart de température fond-surface ;

Elle l'est moins sous forme d'écart de concentration (eau douce/eau salée).

L'énergie de l'atmosphère peut revêtir 4 formes (dont une est bien connue) :

- énergie cinétique (vent) ;
- énergie thermique ;
- énergie de pression ;
- énergie liée à l'humidité.

L'avenir dira si ces directions de recherche tiendront leurs promesses pour l'humanité du futur.

## BIBLIOGRAPHIE

- CNRS Focus, *L'énergie*, avril 003, [www.imp.cnrs.fr/energie](http://www.imp.cnrs.fr/energie)
- DESS-EMI, *L'énergie au XXI<sup>e</sup> siècle*. Conférence Université Henri Poincaré Nancy, année 2004-2005.
- DESCIEUX D. et FEIDT M., *Étude de terrain sur la cogénération*. Rapport d'expertise AC ÉNERGIE GAT 9 CNRS, janvier 2005.
- GUILLET R., *Du diagramme hygrothermique de combustion aux pompes à vapeur d'eau, un nouveau regard sur la combustion et ses applications énergétiques*. Paris, Elsevier, 1998.
- Industries Dossier, *Électricité Verte, les projets de la France*. N° 102, p. 9-19, février-mars 2005.
- JOCHEM E, *Steps Towards a Sustainable Development, White Book for RetD of energy efficient technologies*, mars 2004.
- KREITH F. et WEST R.E., *Transportation Quarterly*. Vol. 56, n° 1, p. 51-73, 2002.
- LE GOFF P., *Les sources d'énergie au XXI<sup>e</sup> siècle*, conférence DESS EMI, UHP, Nancy, 2003.
- LE GOFF P., *L'énergétique face à l'économie et à l'écologie*, conférence DESS EMI, UHP, Nancy, 2003.
- MARCUS G.H., *A New World of Power*, supplément *Mechanical Engineering Power*, 2003.
- MARTIN J.-M., *Perspectives énergétiques mondiales. Techniques de l'Ingénieur*, B8515, 10 pages, 1996.
- NATO – OTAN, *Bulletin n° 68*, édition 03, 2004 [www.nato.int/ccms](http://www.nato.int/ccms)
- PREDIT, *Lettre du Programme de Recherche et d'Innovation dans les Transports*. N° 11, mars 2005, [www.predit.prp.fr](http://www.predit.prp.fr)
- Science et Vie* 2, *L'énergie, transports*, p. 114-122, janvier 2005.
- [www.ademe.fr](http://www.ademe.fr)
- Énergie Plus*, bimensuel d'actualité sur l'énergie et l'environnement. N° 345, mai 2005.
- [www.sft.asso.fr](http://www.sft.asso.fr), SFT, *La Recherche en Thermique, enjeux et perspectives en 2005*. Livre Blanc, chapitre 5, version 3 provisoire, novembre 2004.

## Chapitre 3

# L'énergie

### 3.1 LES FORMES DE L'ÉNERGIE

#### 3.1.1 Un point d'histoire du développement de l'humanité

L'énergie se manifeste sous diverses formes dans le monde qui nous entoure.

Il ne sera plus fait ici de référence à des énergies primaires ou non, ni à ce qui est qualifié parfois de vecteur énergétique. Le point de vue adopté est délibérément différent pour donner une vision plus scientifique et physique à l'étude proposée.

Primitivement c'est l'énergie calorifique (ou chaleur, de préférence à l'énergie thermique), qui a retenu l'attention de l'humanité : la domestication du feu (combustion) a permis dans un premier temps la cuisson des aliments, puis le chauffage. Après seulement est apparue l'énergie mécanique.

#### 3.1.2 Recensement des formes de l'énergie

##### a) *L'énergie mécanique*

L'énergie mécanique est la deuxième forme d'énergie à avoir été maîtrisée par l'homme, surtout dans l'Antiquité (levier, poulie, voile, rame...).

On voit ainsi que l'aspect applicatif (technologique, technique ou expérimental) a précédé l'aspect fondamental (formel, scientifique) ; la mécanique a sans doute été la première science physique à se développer de façon forte, précisément dès l'Antiquité.

L'énergie mécanique elle-même peut prendre diverses formes.

➤ Énergie cinétique, énergie potentielle

L'énergie cinétique est liée au mouvement du corps considéré. L'énergie potentielle est liée à la position du corps, dans l'espace où il est immergé.

L'énergie potentielle du mécanicien est couramment associée au champ de pesanteur (environnement terrestre) ; l'accélération de la pesanteur prend en moyenne à la surface du globe terrestre la valeur  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

➤ Énergie de rotation, énergie de translation

Le mouvement général d'un corps solide supposé indéformable est décrit par la superposition de deux mouvements :

- Un mouvement de translation du corps dans l'espace où il est immergé. Ce mouvement se fait identiquement pour tous les points du solide ; il est commode de l'étudier par rapport au centre de masse de celui-ci, se déplaçant dans un repère appelé référentiel (mouvement par rapport au référentiel).
- Un mouvement de rotation du corps dans l'espace. Le mouvement est un mouvement différent pour chaque point du solide ; il est commode de l'étudier dans un repère déduit du référentiel précédent, mais transporté au centre de masse du solide.

b) L'énergie électrique

Dès l'Antiquité, la triboélectricité a permis de mettre en évidence l'attraction de charges de signes contraires (+ et -), ou la répulsion de charges de même signes (+ + et - -).

Il apparaît alors comme pour l'énergie mécanique une énergie potentielle, mais associée cette fois au champ électrique (électrostatique).

À cette forme d'énergie électrique correspond aussi une énergie électrocinétique ; cette énergie électrique est caractérisée par le mouvement de charges électriques dans un champ électrique.

On rencontre alors les deux formes correspondantes courantes de l'énergie électrique, qui sont les suivantes.

➤ L'énergie électrique de type continu

Cette forme de l'énergie électrique est le plus souvent de faible intensité et faible tension. Elle est très utilisée dans les dispositifs électroniques grand public, et dans des systèmes embarqués pour les transports, voire l'énergie photovoltaïque.

➤ L'énergie électrique de type alternative

Il s'agit de l'énergie électrique des réseaux centralisés, qui peuvent fonctionner selon les usages sous très forte tension (400 000 V) et sous très forte intensité (par exemple pour usages industriels). L'utilisation courante en France se fait en courant monophasé sous 220 V et une intensité de ligne de l'ordre de 10 A.

### c) Énergie magnétique

Cette énergie est intimement liée au champ du même nom. Et il existe un parallèle fort avec l'énergie électrique du point de vue formel.

Pour l'application, le couplage électromagnétique est essentiel.

Selon les matériaux, les manifestations du magnétisme peuvent être très variées et différentes ; on notera l'existence de matériaux :

- paramagnétique ;
- ferromagnétique...

La structure intime de la matière joue alors un rôle fondamental (la thermodynamique statistique permet des modélisations pertinentes de ces phénomènes).

### d) Énergie radiative

L'énergie radiative, dont la plus connue est l'énergie lumineuse (visible), est une énergie combinant les deux formes précédentes d'énergie : c'est une énergie électromagnétique particulière dont la longueur d'onde est visible par l'œil dans le domaine compris entre 0,4  $\mu\text{m}$  et 1  $\mu\text{m}$ .

Toutefois, il existe de nombreuses autres radiations ; en allant du plus énergétique vers le moins puissant, on rencontre les rayons  $\gamma$ , X, les rayons ultraviolets (UV), le spectre visible, puis les rayonnements infrarouges (IR) et enfin les rayonnements radiométriques.

L'énergie radiative présente la particularité de ne pas nécessiter de support matériel pour se propager. Les expériences ont montré qu'elle peut se propager de deux façons :

- soit sous forme ondulatoire ;
- soit sous forme corpusculaire (photon) ;

avec équivalence entre les deux formes, comme l'a montré Louis de Broglie.

### e) Énergie chimique

L'énergie chimique est une énergie liée à la conformation des cortèges électroniques autour des noyaux des atomes et molécules. Les cortèges tendent vers des configurations de stabilité croissante, correspondants à des minima énergétiques de l'ensemble ayant réagi.

L'exemple le plus simple de réaction chimique est la combustion. Cette réaction met en jeu un combustible et un comburant (très souvent de l'air) ; la réaction peut être violente (comme dans un moteur thermique) ou lente (oxydation d'un métal à l'air libre).

Selon le mode de réaction, une certaine énergie calorifique est mise en évidence de façon concomitante :

- réaction exothermique (avec libération de chaleur) ;
- réaction endothermique (nécessitant un apport de chaleur pour se développer).

### f) Énergie nucléaire

L'énergie nucléaire est une énergie liée cette fois au noyau de certains atomes et à la façon dont les particules élémentaires qui le constituent sont maintenues dans ce noyau. Certains noyaux sont très stables, d'autres moins et ce d'autant plus que leur masse (le nombre de particules les constituant) est élevée.

On distingue de ce fait deux formes essentielles de l'énergie nucléaire :

- la fission nucléaire qui consiste à casser un atome lourd et instable en plusieurs morceaux, généralement sous impact neutronique ; dans ces réactions de fission, il apparaît un défaut de masse. À ce défaut de masse correspond une énergie libérée, sous forme calorifique dans le milieu ;
- la fusion nucléaire, qui utilise à l'opposé des atomes légers, qui par confinement et impact peuvent produire des atomes plus lourds. Le projet ITER relève de cette filière. Là aussi, sous conditions très spécifiques (à maîtriser : ce qui est un des enjeux de l'expérience), il y a défaut de masse dans la réaction nucléaire ; ce défaut correspond encore à une énergie libérée globalement selon la relation suivante :

$$\Delta E = c_0^2 \cdot \Delta m \quad (3.1)$$

où  $c_0$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

### g) Énergie calorifique

Évoquée précédemment, on peut noter que la première énergie utilisée par l'humanité apparaît aussi couplée à d'autres formes d'énergie telles que les énergies chimique et nucléaire. Il en existe plusieurs formes.

L'énergie calorifique joue un rôle très particulier dans l'ensemble des formes d'énergie ; elle apparaît aussi bien à l'échelle macroscopique des systèmes, que dans la structure plus intime de la matière.

#### ➤ Énergies calorifique-frigorifique

Cette forme d'énergie revêt aujourd'hui une importance toute particulière dans ses applications directes :

- chauffage → énergie calorifique ;
- réfrigération → énergie frigorifique.

Elle fait apparaître la notion de référence à l'ambiance locale, sur laquelle on veut influencer (l'énergie dans un environnement).

Elle est présente aussi dans les systèmes utilisant des énergies dites nobles, dont la mécanique, par exemple :

- les moteurs électriques sont sujets à des échauffements ;
- les pneumatiques se mettent en température au roulage... (le lecteur pourra rechercher d'autres exemples).

Ces phénomènes traduisent en fait des dissipations d'énergie sous forme calorifique sur lesquelles nous reviendrons par la suite.

### ► Chaleur sensible – chaleur latente

D'un point de vue thermodynamique, il convient de distinguer par ailleurs deux formes d'énergie calorifique :

- la chaleur sensible qui est liée à l'évolution de la température de milieu matériel recevant ou cédant de la chaleur ;
- la chaleur latente qui a pour originalité d'être échangée dans des conditions de température constante pour les changements de phase d'un corps pur. Généralement, les quantités de chaleur échangées sont plus grandes que pour les échanges de chaleur sensible, d'où leur importance pratique.

### 3.1.3 L'importance des formes d'énergie

Il ressort du catalogue succinct précédent un aspect multiforme de l'énergie. Cette diversité de formes induit de nombreuses possibilités :

- de conversion d'une forme d'énergie dans une autre ;
- de transfert, sous une forme bien définie d'énergie ;
- de transport, sous une forme bien définie d'énergie ;
- de stockage, sous certaines formes d'énergie.

C'est ce qui va être examiné dans les paragraphes qui suivent.

## 3.2 LA CONVERSION D'ÉNERGIE

### 3.2.1 Définition et historique

La conversion d'énergie est un processus qui voit le passage d'une forme d'énergie initiale vers une forme d'énergie finale.

La conversion d'énergie existe dans la nature sous des aspects très variés. Par exemple à l'échelle de l'homme, la maîtrise du feu correspond à la maîtrise d'une combustion, c'est-à-dire d'une réaction d'oxydation dont le processus marque le passage d'une énergie chimique (de réaction) à une énergie calorifique :

énergie chimique → (réaction de combustion) → énergie calorifique

À l'échelle de l'Univers, le Cosmos est dominé par l'énergie radiative, avec des opérations de conversion complexes au cœur des objets célestes. La compétition entre énergie et matière donne lieu à l'observation de structures allant des amas de galaxies aux galaxies, puis aux étoiles. Les étoiles sont des convertisseurs matière-énergie.

matière → (réaction nucléaire) → énergie radiative

Le cas particulier du Soleil est intéressant car c'est l'étoile la plus proche de nous. À l'échelle du Système solaire, cette étoile est environnée par des planètes et par son énergie radiative, elle a permis l'apparition de la vie sur une des planètes, la Terre (peut-être sur d'autres ?).

L'équilibre dynamique de notre planète est encore mal connu. En particulier, du point de vue thermique, il apparaît que cet équilibre fragile est sensible à la composition de l'atmosphère gazeuse, entourant la masse minérale et liquide : on entrevoit



ici l'interaction que l'homme peut avoir par son activité sur les phénomènes de conversion d'énergie et la modification notable de l'équilibre associé.

Depuis son apparition sur la Terre, l'homme a cherché à comprendre son environnement et les phénomènes naturels, puis à en user. Ce mimétisme de la nature a été amplifié par l'usage de techniques, puis de technologies de plus en plus développées tant en qualité, qu'en quantité. Ainsi à une échelle locale, l'homme a utilisé l'énergie du vent (voiles marines, moulins), l'énergie des chutes d'eau (moulins, centrales), de combustibles solides (charbon, pétrole), enfin l'énergie nucléaire ; autant d'exemples de conversion d'énergie.

Il est important de noter que l'échelle des convertisseurs a évolué dans le temps :

taille croissante	↓	– voile ; moulins à vent, à eau
	↓	– chaudières particulières ou industrielles
	↓	– centrales nucléaires

### 3.2.2 Matrice de conversion des énergies

Ayant identifié les formes principales d'énergie, il est intéressant de construire une matrice des conversions d'énergie correspondante. Le tableau 3.1 rend compte de cette matrice.

On a fait apparaître dans ce tableau les principaux modes de conversion et les sciences qui leurs sont associées. Certaines ne sont pas parfaitement identifiées. Cela ne veut pas dire pour autant que les conversions n'existent pas.

Par exemple, la conversion radiative – mécanique existe bien. Elle se manifeste par une pression de radiation. Celle-ci a donné lieu à des réalisations que l'on peut observer dans les cabinets de physique : radiomètre de Crookes (figure 3.1).

La pression de radiation met en mouvement un moulinet. Mais d'autres réalisations plus pratiques sont possibles ou existent : voiles solaires.

Le lecteur pourra continuer à exercer sa sagacité sur d'autres exemples.

Pour terminer sur la matrice des conversions d'énergie, on notera que la diagonale descendante correspond pour chaque forme à un processus qui ne peut être que de transfert ou de transport (paragraphes 3.3 et 3.4.2). Toutefois, nous avons vu qu'une forme fondamentale d'énergie peut revêtir plusieurs formes secondaires ; alors il peut apparaître des conversions secondaires (paragraphe a) de la section 3.1.2).

À titre d'exemple on citera :

- la conversion potentiel-cinétique ; cette conversion peut apparaître pour plusieurs domaines scientifiques cités (mécanique, électrique, magnétique) ;
- la conversion d'énergie mécanique (cinétique de translation, en rotation (ou réciproquement)).

En termes de technologie, cela correspond à l'ensemble bielle-manivelle, bien connu pour son usage dans les moteurs : à la matrice du tableau 3.1 correspond donc une matrice plus complexe des technologies (convertisseurs), à laquelle le lecteur pourra réfléchir, vu son expérience personnelle et son environnement : voir tableau 3.2.



TABLEAU 3.1 MATRICE DES CONVERSIONS D'ÉNERGIE (DOMAINES SCIENTIFIQUES ET SCIENCES CORRESPONDANTES)

Forme d'énergie	Mécanique	Électrique	Magnétique	Radiative	Chimique	Nucléaire	Calorifique
Mécanique		Mécano-électrique					Mécanothermique
Électrique	Électromécanique		Électromagnétique	Électrothermie	Électrochimie	Électronucléaire	Électrothermie
Magnétique	Magnétomécanique	Magnéto-électrique					Magnétothermie
Radiative		Photovoltaïque			Photosynthèse		
Chimique		Électrochimie					Thermochimie
Nucléaire		Électronucléaire		Physique nucléaire			Thermonucléaire
Calorifique	Thermomécanique	Thermo-électricité	Thermomagnétisme	Thermocinétique ; rayonnement	Thermochimie		

TABLEAU 3.2 MATRICE DES CONVERTISSEURS D'ÉNERGIE

Forme d'énergie	Mécanique	Électrique	Magnétique	Radiative	Chimique	Nucléaire	Calorifique
Mécanique	piston turbine	alternateur					frottements
Électrique	moteurs électriques	transformateurs convertisseurs	électroaimant	Haut parleur Tube radiant	Électrochimie		résistance (effet Joule)
Magnétique							hystérésis
Radiative	radiomètre voile solaire	cellule photovoltaïque			plantes (photosynthèse)		capteur solaire thermique
Chimique		pile à combustible			réacteurs gazéification, pyrolyse, hydrolyse		brûleur chaudière
Nucléaire				rayons $\gamma$ , $\beta$			réacteur nucléaire
Calorifique	moteurs thermiques				réacteurs		transferts (3 modes) changement de phase



Figure 3.1 Un radiomètre de Crookes (Photographie : Michel Feidt)

## 3.3 TRANSFERT D'ÉNERGIE

### 3.3.1 Définition et exemple

Comme il a été vu dans le tableau 3.1 de la matrice de conversion des énergies, la diagonale descendante correspond essentiellement aux opérations de transfert ou de transport d'une même forme d'énergie.

Cela suppose successivement deux nouvelles formes secondaires d'énergie, si elles existent :

- une énergie flux ;
- une énergie stock.

Nous nous intéressons principalement à la thermodynamique ; dans cet ouvrage, nous étudierons la forme la plus connue de l'énergie flux qu'est l'énergie calorifique.

La chaleur est sujette à trois modes de transfert :

- la conduction de la chaleur, qui nécessite un support matériel souvent supposé indéformable ;
- la convection de la chaleur, qui fait intervenir un support fluide en mouvement naturel ou forcé ;
- le rayonnement, quant à lui, ne nécessite pas de support matériel.

### 3.3.2 Régime dynamique stationnaire

De façon à ne considérer que le transfert d'énergie, nous supposons ici un régime de fonctionnement (ou état du système) dynamique stationnaire, par opposition au régime transitoire ou instationnaire qui fait intervenir un stock (voir paragraphe 3.4).

Un système ou procédé en régime dynamique stationnaire n'est pas en équilibre véritable avec son environnement ; on peut dire qu'il est en équilibre dynamique sous l'action de contraintes externes.

On citera comme exemples :

- une chute d'eau, de hauteur constante ;
- un réseau d'air comprimé, dont la pression d'alimentation est maintenue constante par rapport à la pression atmosphérique ;
- la température froide de conservation d'une installation de réfrigération (par exemple un réfrigérateur ménager) réglée par rapport à la température ambiante.

On retiendra que :

Le régime dynamique stationnaire d'un système ou procédé par rapport à une propriété suppose que celle-ci est localement constante et indépendante du temps, mais que cette propriété est une fonction de l'espace (du point).

On conçoit que pour un même système, il peut exister une multiplicité de régimes dynamiques stationnaires. Parmi ceux-ci, l'un d'eux a un rôle fondamental : il s'agit du *régime nominal*. Ce régime de fonctionnement est encore appelé plein régime, ou régime de pleine charge. Il répond généralement à un protocole d'essai défini par des normes strictes.

L'exemple le plus connu est sans doute la consommation d'un véhicule automobile en régime stabilisé, le régime nominal correspondant à la vitesse maximale.

Le dimensionnement (la conception d'un système) s'effectue par rapport au régime dynamique particulier qu'est le régime nominal. L'élaboration de modèles conduit dans ce cas à *l'optimisation de conception*.

**Remarque :** un régime nominal n'est pas forcément optimal.

### 3.3.3 Les modèles de transfert en régime dynamique stationnaire

En généralisant ce qui vient d'être vu dans les paragraphes 3.3.1 et 3.3.2, et en appelant  $X$  la variable d'intensité locale (pression, température, hauteur d'eau...), on s'aperçoit qu'à une différence d'intensité (un gradient) de  $X$  sera associé un flux d'une extensité  $Y$ , noté  $\dot{Y}$  (pour dérivée de  $Y$  par rapport au temps).

Dans les exemples précédents ;

- à un gradient de pression est associé un transfert de masse (gaz) ;
- à un gradient de température est associé un transfert de chaleur (flux de chaleur).

De façon formelle, le flux  $\dot{Y}$  est proportionnel à grad  $X$ , mais cela ne constitue qu'une approximation linéaire locale, bien que couramment admise :

$$\dot{Y} \approx \text{grad } X \quad (3.2)$$

De façon plus globale, il y correspond la notion de conductance de transfert  $K$ , ou de résistance de transfert  $R$ , telle que  $R = 1/K$ . Ici généralisée, la proportionnalité des flux à l'écart d'intensité  $\Delta X$  devient :

$$\dot{Y} = K \Delta X \quad (3.3)$$

Ces notions sont utiles pour tous réseaux de distribution, y compris l'information.

## 3.4 STOCKAGE ET TRANSPORT D'ÉNERGIE

### 3.4.1 Stockage d'énergie

#### a) Régime instationnaire ou transitoire

La notion de stockage (ou déstockage) d'énergie est incontournable en régime instationnaire ou transitoire. Ce régime apparaît lorsque l'une des contraintes externes au système est changée (changement de régime ; commande). Ce changement de régime peut prendre des formes très variées, comme il sera revu plus tard.

Le régime transitoire s'étend dans le temps de l'instant initial de la perturbation, jusqu'à l'instant où le système atteint un nouvel état d'équilibre dynamique stationnaire, si cela est possible.

Des exemples de telles évolutions sont :

- des adaptations au chauffage ou au refroidissement d'habitats ou de locaux ;
- des accélérations ou décélérations de véhicules ;
- des mises en régime (ou arrêt) de machines.

On retiendra que :

Le régime transitoire d'un système ou d'un procédé par rapport à une propriété suppose que celle-ci observée localement, va varier dans le temps, jusqu'à rejoindre un nouvel état d'équilibre dynamique (voire d'équilibre avec l'environnement).

#### b) Notion de constante de temps

Les phénomènes transitoires peuvent être lents ou rapides. Dans le domaine de l'énergie, les transitoires thermiques sont plutôt lents, les transitoires mécaniques sont plutôt rapides, les transitoires chimiques sont très rapides (combustion).

Il apparaît alors des *constantes de temps* ou des *temps caractéristiques des phénomènes* qui représentent les échelles de temps des phénomènes étudiés.

Un cas particulier est la *relaxation* d'un système vers l'ambiance. On parle alors de temps de relaxation : celui-ci mesure la durée mise par le système pour passer de l'état initial à l'état d'équilibre avec l'ambiance, pour la propriété relaxée.

L'équilibre correspondant est un équilibre qui peut être partiel. L'équilibre thermodynamique par rapport à l'ambiance suppose la relaxation de toutes les propriétés par rapport à cette ambiance.

**Remarque :** Pour l'Univers, il n'existe qu'un seul équilibre thermodynamique, correspondant à la mort de celui-ci : fin de l'évolution.

### c) Notion de capacité

Par opposition à une énergie flux (l'électricité est l'exemple le plus courant), l'énergie stock suppose des réservoirs, notamment :

- réservoir de liquide (combustibles pour les transports, château d'eau, lac de retenue, réservoir d'énergie potentielle gravifique) ;
- réservoir de gaz (stockage sous pression) ;
- stockage solide (énergies fossiles : charbon, lignite, minerais radioactifs ; énergie biomasse : bois, matières végétales dont pailles ; énergie chimique : piles sèches) ;
- réservoir de chaleur (chauffe-eau à accumulation).

Il apparaît alors la notion de *capacité*, massique, chimique, thermique, électrique : la capacité représente alors un réservoir pour une extensité donnée.

Toute forme d'énergie peut donner lieu dans le principe à accumulation. Toutefois, les capacités mises en œuvre restent finies, et en conséquence, leurs réserves énergétiques épuisables, d'où la nécessité d'une bonne évaluation et gestion des stocks pour une valorisation optimale de l'énergie.

Si les capacités des systèmes, particulièrement les capacités thermiques, sont de dimensions finies, nous serons amenés à raisonner sur des thermostats, qui sont des réservoirs thermiques de capacité infinie (pouvant recevoir ou céder de l'énergie calorifique, sans modification de leur température).

Le meilleur exemple de thermostat était jusque récemment l'atmosphère terrestre, considérée de température quasi constante à l'échelle de nos activités. Cependant, il s'avère que la perturbation apportée par l'homme n'est plus insignifiante, même si elle reste négligeable pour la majorité des applications qui nous intéressent.

Enfin et pour terminer avec le stockage de chaleur, il ne faut pas perdre de vue que si le stockage chaud (température supérieure à l'ambiance) est le plus courant, le stockage froid n'en revêt pas moins une grande importance pratique (température inférieure à l'ambiance).

### 3.4.2 Le transport d'énergie

Le transport d'énergie est une opération intimement liée à la possibilité de stockage de l'énergie correspondante.

Le transport en réservoir est une opération bien connue pour de nombreux combustibles fluides. Le transport en phase gazeuse nécessite quant à lui, pour des raisons d'encombrement, des conditions très différentes de l'ambiante (pressions plus élevées). C'est en particulier un des problèmes actuels du vecteur énergétique émergent, l'hydrogène, ce qui induit des difficultés de mise en œuvre.

### 3.5 RETOUR SUR LES USAGES DE L'ÉNERGIE

Nous avons vu au chapitre précédent (paragraphe 2.3.2) qu'il y avait trois grands postes d'utilisation de l'énergie :

- habitat ;
- transport ;
- industrie.

Ces trois postes font apparaître la nécessité d'une adéquation de la production à la demande énergétique, conformément au schéma commun présenté dans la figure 3.2.

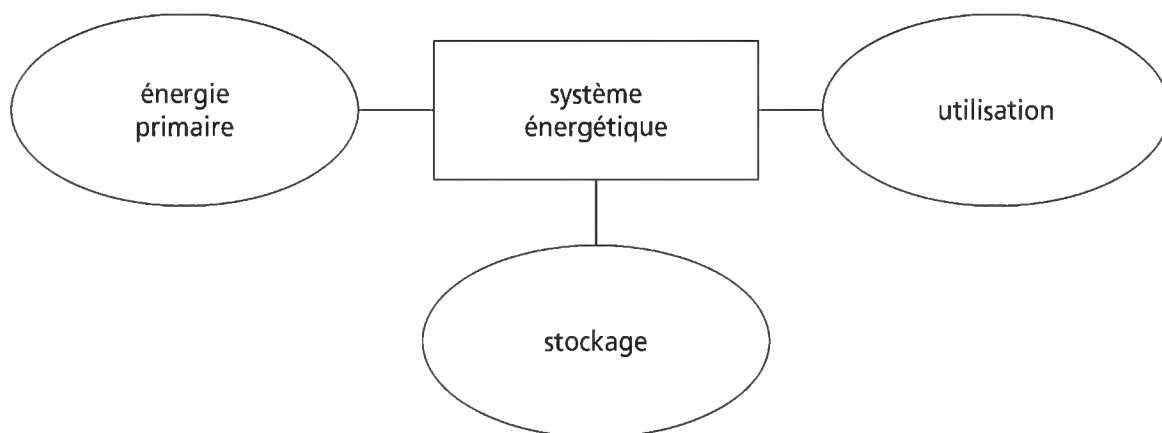


Figure 3.2 Production et usage de l'énergie : motif élémentaire

Le schéma de la figure 3.2 représente une production décentralisée d'énergie qui a pour but de minimiser les opérations de transfert et de transport, mais il ignore le problème de distribution associé aux systèmes de production centralisée.

La production décentralisée (ou de proximité) est une approche locale, basée souvent sur un micro (ou nano) système, dont on cherchera une forte efficacité de conversion à la conception et au fonctionnement, sachant que l'efficacité de distribution est favorable.

La production centralisée, au contraire, bénéficie d'un effet d'échelle (mégasystème) favorable à une forte efficacité de conversion, au détriment d'une efficacité de distribution moindre (pertes par transfert et/ou transport), vu la nécessité d'un réseau de distribution vers les utilisateurs. Il apparaît de plus l'importance cruciale de la gestion des flux en temps réel, ce qui reste plus complexe pour un système en réseau, et confirme l'intérêt des capacités du stockage quand il est possible.

On notera qu'en production décentralisée, l'adaptation de la production à la demande peut éviter le recours au stock en mutualisant les systèmes et les usages, par le concept de réseau local.

### 3.6 CONCLUSIONS

Le paragraphe 3.5 a fait apparaître l'importance de la gestion des flux en temps réel (optimisation dynamique ou de gestion), mais aussi l'intérêt d'une conception optimale de système (optimisation de conception) qui ne sera pas la même selon que la production sera centralisée ou non.

Ces deux approches peuvent se résumer ainsi : quel système, pour quel besoin et selon quel critère ?

La recherche d'une réponse à cette question passe par l'optimisation de conception et de gestion que nous allons définir ci après.

#### 3.6.1 L'optimisation de conception

Celle-ci suppose la comparaison de diverses alternatives, la prise en compte d'effet d'échelle, puis une optimisation de dimensionnement plus classique.

Il a été vu au paragraphe 3.5 qu'après une période allant du système au mega-système, la tendance actuelle est au contraire d'aller du système au micro (voire au nano) système. Cela pour apporter une réponse liée :

- aux besoins ;
- aux moyens de production, qui dépendent de l'état des savoir-faire scientifiques et techniques.

Cette inversion de tendance peut être illustrée et confortée par la figure 3.3, qui montre de façon intuitive l'existence d'une efficacité globale minimale d'un système environné en fonction de sa taille.

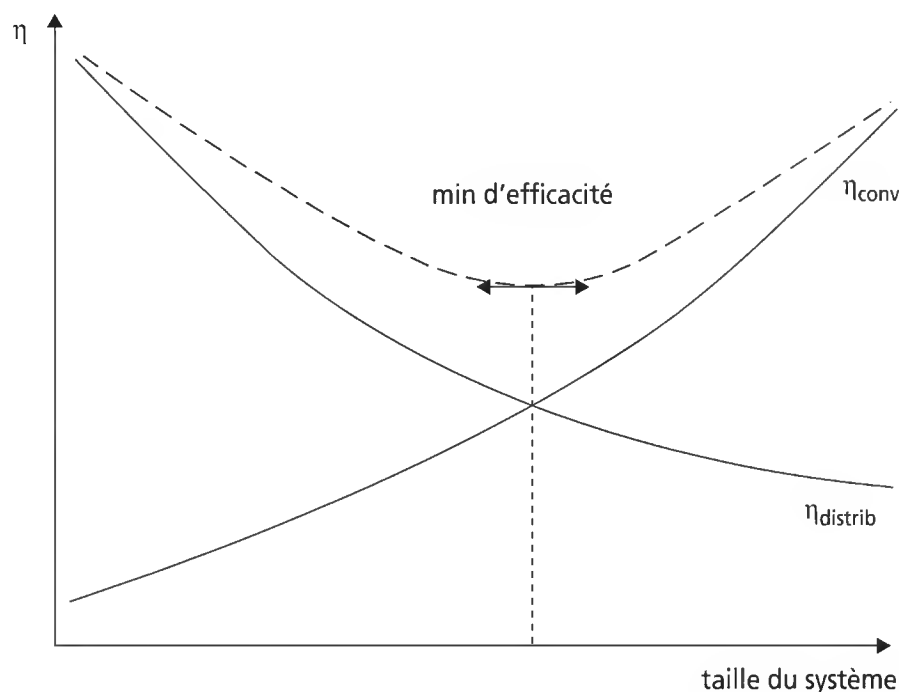


Figure 3.3 Optimisation de conception



On notera que ce minimum n'intègre pas un certain nombre de contraintes telles qu'économique et environnementale, mais qu'il rend compte de l'intérêt de taille sous-critique pour des systèmes, par rapport aux systèmes géants.

### 3.6.2 L'optimisation de gestion

Cette optimisation peut revêtir deux formes essentielles, le contrôle-commande et l'utilisation de capacités.

#### a) Le contrôle-commande

Cette approche de l'automatique suppose une adaptation constante de la production à la demande. Elle oblige alors à concevoir un système capable de fournir la puissance maximale de l'usage d'une part, et d'autre part, que ce même système puisse fonctionner à la puissance minimale imposée ; d'où une large gamme de fonctionnement.

Cela est toutefois rarement possible avec une configuration simple, mais des éléments de réponse à cette question seront fournis au long de cet ouvrage (combinaison en parallèle de machines, par exemple).

#### b) L'utilisation de capacités

Lorsqu'on n'utilise pas le stock, le fonctionnement est nécessairement à flux tendus avec surdimensionnement du système de production par rapport à un usage « moyen » (surinvestissement du système de production).

À l'inverse, un surstockage ne serait pas efficace, conduisant à un surdimensionnement du stock par rapport à la fluctuation « moyenne » de la demande.

La représentation de la figure 3.4 montre intuitivement qu'il doit exister un minimum d'investissement par rapport à une utilité énergétique donnée. Cette utilité répond à la meilleure adaptation du système à la demande.

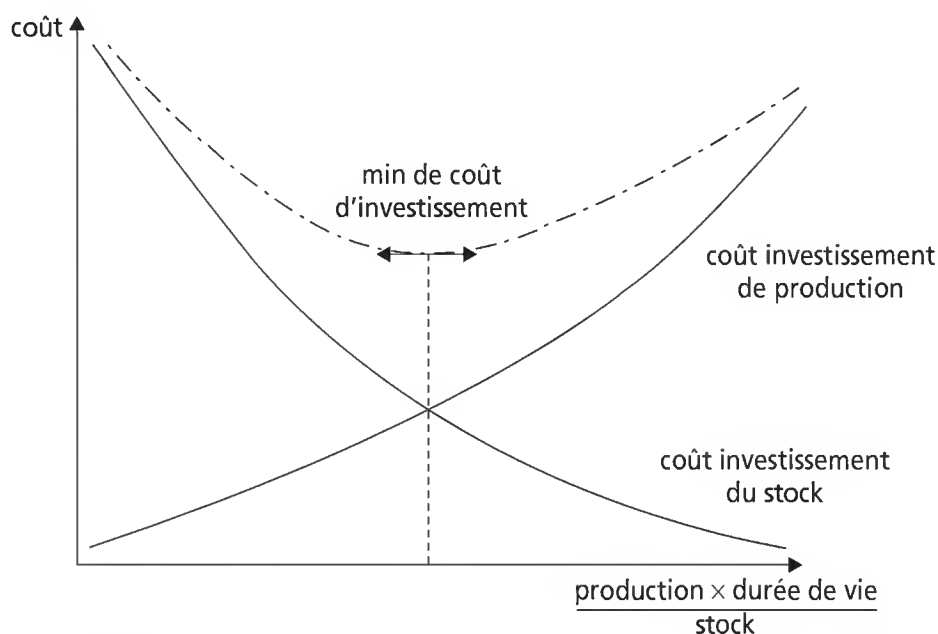


Figure 3.4 Optimisation de gestion avec stock en fonction du ratio (production x durée de vie / stock)

Cette approche reste sous-exploitée actuellement.

**Remarque :** Le raisonnement précédent, purement physique, s'étend à l'optimisation du savoir-faire. En effet, on peut noter qu'il existe un compromis entre le temps d'étude d'un système et le coût associé à cette étude, par rapport au coût de réalisation.

En conclusion, on peut indiquer que les optimisations de conception et de gestion ne sont pas indépendantes de l'histoire qui a précédé. Elles participent de l'évolution des connaissances et des savoir-faire, confirmant l'intérêt récent pour les méthodes informatiques d'algorithmes génétiques.

Le cadre étant situé, il est temps d'aborder les détails de connaissance dans la deuxième partie.

## **PARTIE 2**

---

# **LES OUTILS DE L'ÉNERGÉTIQUE**



## Chapitre 4

---

# **Les bases thermodynamiques : la thermostatique**

### **4.1 INTRODUCTION**

Toute étude énergétique suppose la connaissance de la thermostatique, science des équilibres généraux et de la stabilité des systèmes physiques. Tel est l'objectif du présent chapitre et des chapitres suivants, pour aboutir à ce qui est essentiel à l'ingénieur et au chercheur : la notion de bilan (bilans matières et énergie entre autres) pour un système quelconque.

Tout le vocabulaire introduit ici est indispensable pour une bonne compréhension de la suite de ce livre, ainsi que les notions-clés de système thermodynamique, d'états de ce système, de variables et équation d'état d'un système, de transformation thermodynamique.

Le tableau 4.1 illustre le développement logique des sciences, en relation avec la matrice des énergies (1<sup>re</sup> partie).

TABLEAU 4.1 SÉQUENCES DE DÉVELOPPEMENT DES SCIENCES PHYSIQUES

Énergie	Mécanique		Physique		Chimie	Chaleur calorimétrie et thermique
	Solide	Fluide	Électricité	Magnétisme		
Système à équilibre	Statique	Hydrostatique Gazostatique	Électrostatique	Magnétostatique	Équilibre chimique	Équilibre thermique
Système en mouvement	Cinématique (point) Cinématique (solide)	Écoulement des fluides incompressibles	Électrocinétique		Cinétique chimique	Thermocinétique (transferts de chaleur)
Dynamique générale	... du solide (indéformable)	... des fluides	Électrodynamique	Magnétodynamique		Thermodynamique

Toutes les branches des sciences physiques sont couramment développées de façon isotherme, sauf la dernière colonne (énergie calorifique). Celle-ci fait apparaître les interactions complexes qui résultent du comportement général anisotherme des systèmes ; l'anisothermie est une conséquence des dissipations, traduisant les irréversibilités des transformations. D'où le nécessaire couplage entre les différentes formes d'énergie, qui confirme le rôle pivot de la thermodynamique : dans cet ouvrage, on se concentrera sur les *systèmes thermomécaniques*, et, par conséquent, sur le couplage entre les énergies mécanique et calorifique. Toutefois, la généralisation est en droite ligne (universalité de l'approche). L'extension de l'approche à toute forme d'énergie est réalisée à partir de deux variables conjuguées intensive et extensive.

Pour les systèmes, la dynamique fait appel à la relation de cause à effet (force à mouvement), c'est-à-dire au principe de causalité. Le mouvement général se traduit mathématiquement par des dérivées par rapport au temps (notion de flux). Cela sera repris par la suite en faisant apparaître des relations flux-force.

Le temps est une variable thermodynamique privilégiée, qui fait apparaître l'*échelle de temps* : la thermostatique ne décrit que les systèmes dont les états sont stables à l'échelle de temps d'observations.

À l'échelle de temps, il y a lieu de rajouter l'*échelle spatiale*. La thermodynamique considérée est une thermodynamique *macroscopique*, qui suppose une moyenne volumique homogène. Le volume sera la référence pour l'approche globale. En revanche, pour des approches discrètes (ou différentielles), des échelles de longueur (dimensions spatiales) apparaissent. Par simplicité et souci pédagogique, on n'introduira dans cet ouvrage que des *modèles filaires* (une dimension d'espace : 1D). La généralisation formelle en 3D est immédiate et laissée aux soins du lecteur.

**Remarque 1 :** on conçoit que l'intérêt actuel pour les micro et nano-systèmes puissent remettre en cause les considérations ci-dessus ; une autre thermodynamique sera alors à considérer (sans doute en cours de développement).

**Remarque 2 :** la thermodynamique statistique traitant des ensembles de particules n'est pas sans intérêt, de même que son interaction avec la thermodynamique macroscopique considérée ici ; mais elle est en dehors du champ exploré dans cet ouvrage.

## 4.2 NOTIONS ESSENTIELLES DE THERMOSTATIQUE

### 4.2.1 Système thermodynamique

#### a) Volume de contrôle

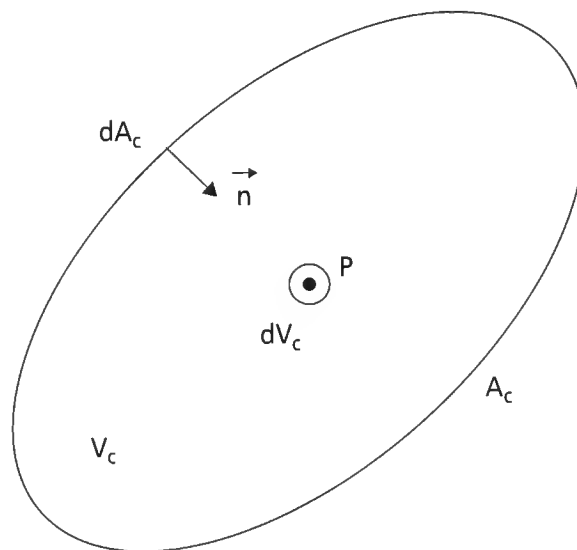
Un système thermodynamique est caractérisé par un volume de contrôle  $V_C$  (figure 4.1). Ce volume est plongé dans son complément à l'Univers, qui constitue son environnement large, et avec lequel il interagit. Dans la majorité des cas, les interactions à longue distance (électrique, magnétique, gravitationnelle) sont très

faibles, de sorte que seules les interactions avec l'environnement immédiat (à courte distance) seront à prendre en compte.

Ce sera le cas des systèmes thermomécaniques sur lesquels nous nous centrons. De plus dans le cadre de ce chapitre (approche globale), nous considérons des systèmes macroscopiques, homogènes et isotropes d'extension géométrique suffisante pour que les effets de surface soient négligeables ; cette restriction est raisonnable pour les systèmes macroscopiques (taille du système de l'ordre du nombre d'Avogadro,  $N = 6,02217 \cdot 10^{23}$ ), voire microscopique. Toutefois, la question de l'échelle se pose à nouveau, avec l'apparition de la granularité de la matière. Pour les milieux continus apparaît la notion de V.E.R., volume élémentaire représentatif ou la nécessité d'une opération d'homogénéisation (prise de moyenne : exemple des milieux poreux).

### b) Frontière, ou interface avec l'extérieur

La frontière entre le système et son environnement est représentée figure 4.1 par l'aire de contrôle  $A_c$ .



**Figure 4.1** Représentation schématique d'un système thermodynamique

Même si les effets de surface sont négligés, cette aire joue un rôle fondamental dans l'étude du système de par sa nature, qui peut être complexe et variée. Aussi y a-t-il lieu de bien analyser et de définir cette surface dans ses propriétés : elles commandent la nature des interactions du système avec l'extérieur.

En première approche, dans ce chapitre, on considérera pour la description macroscopique globale, une interface homogène. Il en résultera essentiellement trois grands types de systèmes.



### ➤ Système isolé

Il n'échange ni matière, ni énergie avec l'extérieur. Le système possède une aire de contrôle totalement imperméable, il n'a pas d'interactions avec l'extérieur. Cependant, peu de systèmes sont susceptibles de satisfaire ce critère (exemple : l'Univers, la bombe calorimétrique).

### ➤ Système fermé

Il n'échange pas de matière avec son environnement, mais il peut échanger toutes formes d'énergie. La frontière possède donc une perméabilité sélective à l'énergie.

En choisissant comme normale de référence la normale intérieure à la frontière, on dit encore que si le système reçoit de l'énergie de l'extérieur, il est en contact avec une *source* d'énergie et que si le système cède de l'énergie à son environnement, il est en contact avec un *puits* d'énergie.

### ➤ Système ouvert

Il échange de la matière et toute forme d'énergie avec son environnement. Cela n'empêchera pas, comme il sera vu, certaines formes de sélectivité de la frontière.

Ce cas de figure est très courant en physique et en théorie des machines.

**Remarque 1 :** la surface de contrôle  $A_C$  peut être une surface mobile dans l'espace, avec le temps (le volume de contrôle  $V_C$  associé est alors mobile dans l'espace, et (ou) variable dans le temps).

**Remarque 2 :** l'extension au cas de surface  $A_C$ , et volume  $V_C$  non homogène peut se faire moyennant subdivision du volume voire approche différentielle : à chaque point  $P \in V_C$ , on associe alors une densité volumique de la grandeur étudiée pour  $dV_C$ , ou une densité surfacique de cette même grandeur pour  $dA_C$ .

### c) Un exemple de système

Soit un ballon, considéré système pressostatique. Il apparaît que le volume  $V_C$  correspond à un volume homogène, isotrope. Selon la taille du ballon, les effets de surface (tension), seront négligeables (cas de la montgolfière) ou mériteront considération, dans le cas du ballon de football, voire de la balle de tennis.

En revanche, si le ballon de football et la balle de tennis sont des systèmes fermés, il n'en est pas forcément de même de la montgolfière.

## 4.2.2 État d'un système thermodynamique

L'état d'un système thermodynamique est précisé par la caractérisation ou la mesure de propriétés associées à la matière et à chaque forme d'énergie.

### a) Propriétés locales, globales

Une propriété locale est caractérisée par sa valeur au point  $P$  considéré ; à chaque forme d'énergie correspond un ensemble de propriétés dont l'estimation est réalisée

sur la base de l'hypothèse d'équilibre locale entre le milieu et la mesure ponctuelle. On utilisera ainsi des propriétés mécanique, physique, chimique, thermique, et autres.

Les propriétés globales supposent une extension de l'équilibre à un volume macroscopique donné. Il y a alors lieu de considérer l'effet d'échelle, de même que le temps (constante de temps ou de relaxation).

### b) Variation des propriétés

#### ► Variation dans l'espace

Le paragraphe précédent a montré que les propriétés peuvent varier dans l'espace. Un cas qui sera couramment développé par la suite correspond au *régime dynamique stationnaire*.

Un tel régime se caractérise par une variation des propriétés physiques précisément dans l'espace, mais une indépendance du temps (figure 4.2).

Les exemples sont nombreux en sciences de l'ingénieur : tout régime permanent ou nominal de machines (qui sont des systèmes ouverts).

À cela correspond la notion mathématique de gradient, qui rend compte de l'intensité de la variation dans l'espace :

$$\overrightarrow{\text{grad}G(s)} = \lim_{ds \rightarrow 0} \left[ \frac{\overrightarrow{dG(s)}}{ds} \right]$$

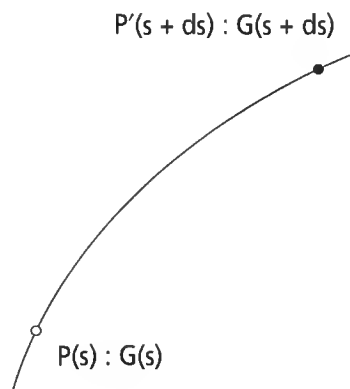


Figure 4.2 Gradient d'une grandeur physique G

**Remarque 1 :** le gradient est un vecteur dans l'espace des dimensions.

**Remarque 2 :** si l'approche filaire est réduite à une dimension linéaire de l'espace cartésien (par exemple  $x$ ), le gradient se réduit à la dérivée selon la direction  $x$  pour la grandeur  $G$ , soit  $\frac{dG}{dx}$ .

### ► Variation dans le temps

On observe cette fois, en un point P donné, la variation de la propriété G dans le temps. Deux cas de figure se présentent.

#### *Point P, fixe dans l'espace*

Le point P appartient au repère absolu, alors la variation dans le temps s'exprime

sous la forme :  $\frac{dG(P)}{dt} = \frac{\partial G(P)}{\partial t}$ .

#### *Point P, mobile dans l'espace*

Si on regarde l'évolution de la grandeur G, au point courant P(t), il vient :

$$\frac{DG(P)}{Dt} = \frac{\partial G(P)}{\partial t} + \frac{\partial G(P)}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt}$$

**Remarque 1 :** si l'approche filaire est réduite à une dimension linéaire de l'espace cartésien (x), la relation précédente se réduit à :

$$\frac{DG(P)}{Dt} = \frac{\partial G(P)}{\partial t} + \frac{\partial G(P)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$$

avec  $v_x = \frac{dx}{dt}$ , vitesse de P dans la direction des x.

**Remarque 2 :** La dérivation introduite  $\frac{D}{Dt}$ , est appelée dérivée particulière. Elle sera très utile par la suite.

### c) Quelques exemples de propriétés

Les principales propriétés physiques auxquelles nous aurons à faire sont de trois natures différentes quant à leur représentation mathématique ; on rencontre successivement :

- des propriétés scalaires. Par exemple :  
 $\rho$  la masse volumique ;  
 $P$  la pression ;  
 $T$  la température ;
- des propriétés vectorielles. Par exemple :  
 $\vec{v}(P)$  la vitesse de l'élément au point P ;  
 $\vec{\gamma}(P)$  l'accélération de ce même élément.

**Remarque :** ces deux vecteurs sont exprimés dans un repère. Leur signification varie selon le repère choisi (voir Annexe de mécanique générale).

- $\vec{E}$  le champ électrique ;
- $\vec{H}$  le champ magnétique.

**Remarque :** on rappelle qu'un vecteur est caractérisé par sa norme  $|\vec{V}|$  invariante, et une direction sur son support.

– des propriétés tensorielles. Par exemple :

$\Rightarrow \sigma(P)$  le tenseur des contraintes au point P d'un élément matériel

$\Rightarrow \varepsilon(P)$  le tenseur des déformations pour un élément d'un milieu solide.

On pourra aussi considérer le tenseur des taux de déformation pour un élément d'un milieu fluide. Dans tous les cas, ces propriétés relèvent de milieux anisotropes, qui ne sont pas la préoccupation majeure de ce précis.

### 4.2.3 Variables d'état

Parmi les propriétés physiques recensées au paragraphe précédent, certaines joueront un rôle particulier et déterminant pour le système thermodynamique étudié ; ce seront les *variables d'état*.

#### a) Exemples

Dans le cas d'un système fermé, on précisera que l'énergie de ce système est une quantité physique fondamentale, dont la valeur est parfaitement définie et de surcroît soumise au principe de conservation ; elle sera appelée l'énergie interne du système thermodynamique fermé, U. Cette quantité pourra aussi être considérée comme une variable, et non une fonction thermodynamique, selon le cas.

De la même façon l'entropie S, de ce même système fermé, sera une fonction thermodynamique utile à la caractérisation de l'équilibre ou de l'évolution du système. Cette quantité sera alors considérée comme une variable thermodynamique.

#### b) Variables extensives, variables intensives

Dans l'ensemble des variables qui caractérisent un système, il existe deux grandes catégories : les variables extensives et les variables intensives.

##### ► Variables extensives

Une variable extensive est une variable thermodynamique fonction de la taille du système (extension), couramment la quantité de matière : masse ou nombre de moles.

Sont apparus successivement V, le volume du système ; U, l'énergie interne ; S, l'entropie. On peut ajouter la matière contenue dans le volume, qui peut revêtir deux formes :

- $m$ , la masse présente ;
- $N$ , le nombre de moles.

Dans le cas d'un système simple à composant unique, ces deux quantités de matière se correspondent par la masse molaire  $M$ . Dans le cas d'un système à constituants multiples, il y aurait lieu d'indicer ces deux quantités pour chaque constituant  $i$ , de masse molaire  $M_i$ . Ces variables sont additives.

**Remarque 1 :** Pour un mélange de  $r$  constituants, on a :

la masse totale  $m$  sous la forme :

$$m = \sum_i m_i$$

le nombre total  $N$  de moles sous la forme :

$$N = \sum_i N_i$$

Des précautions doivent être prises pour d'autres propriétés.

**Remarque 2 :** Généralement le chimiste travaille en référence molaire, alors que l'ingénieur préfère la référence massique. Il en résulte deux types de grandeurs spécifiques :

– les grandeurs spécifiques molaires ;

**Exemples :**  $v_n = \frac{V}{N}$  ;  $u_n = \frac{U}{N}$  ;  $s_n = \frac{S}{N}$

– les grandeurs spécifiques massiques ;

**Exemples :**  $v_m = \frac{V}{m}$  ;  $u_m = \frac{U}{m}$  ;  $s_m = \frac{S}{m}$

### ► Variables intensives

Sont apparues successivement dans le texte,  $P$ , la pression ;  $T$ , la température ;  $\left| \vec{E} \right|$ , l'intensité du champ électrique ;  $\left| \vec{H} \right|$ , l'intensité du champ magnétique. D'autres pourront apparaître dans la suite.

Les variables intensives ne dépendent pas de la taille du système, mais plutôt de la position spatiale (et du temps). Elles sont généralement accessibles à la mesure.

### Variables conjuguées

Les variables d'état extensives et intensives introduites s'associent deux à deux dans les diverses expressions des formes de l'énergie (relations à venir). Par exemple  $V, P$  pour l'énergie mécanique de pression tridimensionnelle ;  $S, T$  pour l'énergie calorifique.

Le tableau 4.2 rend compte des couplages entre variables intensive et extensive pour des systèmes thermodynamiques simples.

TABLEAU 4.2 VARIABLES D'ÉTAT CONJUGUÉES POUR DES SYSTÈMES THERMODYNAMIQUES SIMPLES

Système thermodynamique	Variable intensive	Variable extensive
S. Mécanique Système fluide (gaz) 3D Solide bidimensionnel 2D (film) Solide monodimensionnel 1D (fil)	– P, pression $\gamma$ , tension superficielle F, force	V, volume A, surface L, longueur
S. Électricité (pile) générateur milieu continu (solide)	V, potentiel électrique E, intensité du champ électrique	q, charge électrique P, polarisation électrique
S. Magnétique	H, intensité du champ magnétique	M, moment magnétique
S. Chimique	$\mu_m$ potentiel chimique	m, masse du constituant

Cette relation privilégiée entre variables d'état conjuguées est d'importance pour l'étude des fonctions thermodynamiques en particulier de la fonction U.

### Conséquences pour la fonction d'état U

En anticipant sur la forme de la fonction d'état, que nous écrivons comme suit :

$$U = U(S, V, m)$$

cette fonction d'état sera dite caractéristique, car exprimée en fonction des variables extensives S, V, m qui caractérisent un système thermodynamique simple.

Il est intéressant pour l'étude des systèmes et procédés d'en connaître la forme différentielle première correspondante :

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,m} dS + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,m} dV + \left( \frac{\partial U}{\partial m} \right)_{S,V} dm$$

conformément à l'annexe mathématique.

Il apparaît alors en accord avec le tableau 4.2, que pour satisfaire les équations aux dimensions d'une énergie, les dérivées partielles introduites correspondent à des variables intensives : l'identification conduit aux variables intensives conjuguées. Cela est confirmé pour les formes d'énergie noble du tableau 4.2, par les considérations physiques classiques. Ainsi, il vient :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,m} = -P, \text{ pression}$$

$$\left( \frac{\partial U}{\partial m} \right)_{S,V} = \mu_m, \text{ potentiel chimique spécifique massique}$$

Seule l'énergie calorifique nécessitera quelques précautions, mais on peut dès maintenant, par la même procédure, avoir :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,m} = T, \text{ température}$$



### 4.2.4 Équations d'état

#### a) Définition

La connaissance de l'équation fondamentale caractéristique, énergie interne  $U$  ( $S, V, N$ ), conduit par l'intermédiaire des dérivées partielles introduites au paragraphe précédent, à la définition de l'ensemble des fonctions exprimant les variables intensives en fonction des variables extensives :

$$T = T(S, V, m)$$

$$P = P(S, U, m)$$

$$\mu_m = \mu_m(S, V, m)$$

Les équations sont les fonctions d'état du système thermodynamique simple à un seul constituant.

**Remarque 1 :** la connaissance d'une seule équation d'état est insuffisante à la connaissance complète d'un système thermodynamique ; la connaissance de l'ensemble des équations d'état d'un système est équivalente à l'équation fondamentale caractéristique du système ; par exemple pour un système chimique la connaissance de  $G(P, T)$ , qui représente l'enthalpie libre du système permet de remonter à la connaissance de toutes propriétés en fonction des variables indépendantes associées ( $P, T$ ) (Feidt, M.1).

**Remarque 2 :** L'équation fondamentale caractéristique est une fonction homogène de premier ordre :

$$u(s, v) = \frac{1}{m} U(S, V, m)$$

En conséquence pour un système thermomécanique :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)_v = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V, m} = T$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_s = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S, m} = -P$$

La température et la pression apparaissent comme des variables intensives homogènes, dans la description globale du système.

#### b) Équations d'état d'un corps pur

À la détermination théorique précédente correspond une détermination qui résulte des expériences menées initialement sur les gaz.

Ce type d'équation s'exprime sous la forme générale d'une fonction liant les trois variables  $P, V, T$  qui ne sont pas indépendantes :

$$f(P, V, T) = 0$$

Les premières tentatives de recherche d'équation d'état sont dues à Mariotte, Gay-Lussac, Charles. Elles ont abouti à l'équation d'état la plus simple qui rend compte du comportement des gaz réels sous pression faible, soit l'équation d'état du gaz parfait qui apparaît comme une notion limite des gaz réels :

$$PV = NRT$$

R, constante molaire des gaz parfaits = 8,314 J/K.mole

La retranscription pour un fluide réel dans le diagramme d'Amagat ( $PV = f(P)$ ), pour les isothermes) met en évidence des écarts par rapport à la loi du gaz parfait ; il est courant d'en rendre compte à l'aide du facteur de compressibilité Z :

$$Z = \frac{PV}{NRT}$$

Ce facteur est disponible dans la littérature pour de nombreux gaz.

De nombreuses autres équations d'états existent pour les fluides réels. Pour classer celles-ci et aller à l'essentiel, nous adopterons ici, comme certains auteurs, une démarche par structure d'équation. On distingue essentiellement deux grandes classes de structure :

- les équations de type « viriel » ;
- les équations de type « Van der Waals ».

#### ► Équations d'état dérivées du développement du viriel

Fluide parfait et fluide réel se confondent à la limite d'une masse volumique nulle (dilution infinie), d'où :

$$Z = 1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \dots$$

avec B, C coefficients du viriel, fonctions de T.

**Remarque 1 :** un développement est possible, voire préférable en pression :

$$Z = 1 + B'P + C'P^2 + \dots$$

**Remarque 2 :** l'inconvénient de ces équations est l'écriture sous forme d'un développement en série infinie, d'où troncature, dont la plus connue est l'équation d'état de Benedict-Webb-Rubbin présentée ci-après.

L'équation de Benedict-Webb-Rubbin est généralement utilisée pour permettre le lissage ou l'interpolation de résultats expérimentaux (hydrocarbures, fluides frigorigènes). Elle peut être appliquée aux états vapeur et liquide.

Sa forme avec  $\rho$ , masse volumique est :

$$P = RT\rho + \left( B_0 RT - A_0 - \frac{C_0}{T^2} \right) + (BRT - A)\rho^3 + A\alpha\rho^6 + \frac{C\rho^3}{T^2} (1 + \gamma\rho^2) \exp(-\gamma\rho^2)$$

**Remarque :**

Les valeurs des huit paramètres d'ajustement sont spécifiques du composé et du domaine. Des formes en coordonnées réduites existent. Selon (Vidal J.), la



précision est supérieure à celle des équations dérivées de la théorie de Van der Waals ; mais il y a multiplicité de paramètres et absence de sens physique, d'où difficulté d'application aux mélanges.

► Équations d'état dérivées de la théorie de Van der Waals

Cette équation d'état, qui dépend de trois paramètres ( $a$ ,  $b$ ,  $R$ ) tient compte des contraintes au point critique :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = 0 = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_T \text{ en } T = T_k, P = P_k$$

Elle s'écrit en référence molaire :

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

**Remarque :** à  $P$ ,  $T$  données, cette équation permet le calcul de  $v$  par une équation de 3<sup>e</sup> degré ; toutefois le calcul de  $v$ , en phase liquide est fortement surestimé.

L'équation de Van der Waals possède une formulation réduite écrite par rapport aux coordonnées du point critique :

$$\pi = \frac{P}{P_k} ; \omega = \frac{V}{V_k} ; \theta = \frac{T}{T_k}$$

La connaissance des constantes critiques, associée à la loi des états correspondants, conduit à :

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}(3\omega - 1) = 8\theta\right)$$

avec

$$T_k = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb} ; V_k = 3b ; P_k = \frac{a}{27b^2}$$

ou

$$a = P_k V_k^2 ; b = \frac{V_k}{3} ; R = \frac{8 P_k V_k}{3 T_k}$$

L'équation d'état de Redlich-Kwong s'écrit :

$$P = \frac{RT}{v-l} - \frac{a}{\sqrt{T}v(v+b)}$$

avec

$$a = \Omega_a \frac{RT_k^{2,5}}{P_k} \quad b = \Omega_b \frac{\Omega T_k}{P_k}$$

$$\Omega_a = \frac{1}{9(2^{1/3} - 1)} \quad \Omega_b = \frac{2^{1/3} - 1}{3}$$

**Remarque :** selon Abbott, les équations d'état cubiques à deux paramètres ne peuvent pas représenter, avec une précision suffisante, le comportement volumétrique et les tensions de vapeur.

Soave a développé une méthode donnant priorité à la détermination des tensions de vapeur : a (T) (d'où valeurs par excès des volumes liquides).

L'équation d'état de Peng-Robinson s'écrit :

$$P = -\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2 - 2bv - b^2}$$

**Remarque 1 :** le calcul des valeurs de  $\Omega_a$  et  $\Omega_b$  diffère de l'équation précédente (Vidal J.)

**Remarque 2 :** Les équations de Soave-Redlich-Kwong et Peng-Robinson sont très utiles pour les calculs d'équilibre de mélanges, mais restent limitées dans la représentation de la région critique.

**Remarque 3 :** Les travaux de R. Solimando (Solimando R.) permettent une comparaison de diverses approches (précision relative dans la région supercritique).

### c) Conclusion sur les équations d'état

En l'état actuel, même pour un corps pur, il est difficile, pour ne pas dire impossible, d'avoir une expression analytique précise et surtout inversible (permettant l'expression de la variable choisie en fonction des autres) sur tout le domaine physique possible des transformations ; la zone la plus délicate reste le voisinage du point critique, surtout si on veut décrire les changements de phase. Souvent un passage numérique est obligé avec un compromis nécessaire entre précision et temps de calcul.

Pour un fluide, on retiendra que :

- le comportement des gaz décrit par l'équation du gaz parfait reste limité ;
- l'équation d'état de Van der Waals, sous sa forme originelle, rend compte des changements de phases fluides. Elle possède des formes améliorées intéressantes.
- l'équation générale proposée par W.C. Reynolds semble une des plus complètes, elle est éventuellement applicable sous sa forme généralisée pour tout corps pur.

Enfin, on indique ci-après quelques exemples d'équations d'état pour des systèmes thermodynamiques simples autres que les corps purs.

### ► Systèmes mécaniques

#### *Système mécanique monodimensionnel, 1D*

Il s'agit, par exemple, d'un fil soumis à une traction ou d'une pièce de structure assimilable à une poutre chargée selon son axe (traction ou compression).

Dans le domaine de déformation dite élastique, qui correspond à la zone de réversibilité de la sollicitation, la représentation la plus simple s'écrit sous la forme des équations :

$$u = C \cdot L_0 \cdot T$$

avec  $C$ , constante et  $L_0$ , longueur libre de la structure.

La linéarité de la tension avec la déformation, dans le domaine élastique ( $L_e$ , longueur à la limite élastique) peut s'écrire :

$$F_{\text{ext}} = KT \frac{L - L_0}{L_e - L_0}$$

$F_{\text{ext}}$ , intensité de la force extérieure appliquée à la structure

$K$ , constante

$L$ , longueur associée à  $F_{\text{ext}}$  ( $L_0 < L < L_e$ ).

**Remarque :** on peut montrer que ces deux équations sont en accord avec les conditions imposées par la thermodynamique. Certains matériaux possèdent une équation d'état différente, par exemple :

$$F_{\text{ext}} = KT \left[ \frac{L}{L_0} - \left( \frac{L_0}{L} \right)^2 \right]$$

#### *Système mécanique bidimensionnel, 2D*

Ces systèmes correspondent aux plaques et coques, mais aussi aux phénomènes interfaciaux, domaine d'étude très actuel.

Un exemple est l'importance de la mouillabilité dans la récupération assistée du pétrole.

De façon générale, la tension superficielle d'un film  $\gamma$  s'exprime comme une fonction linéaire de la température :

$$\gamma = aT + b$$

$a$ ,  $b$  constantes dépendant de la nature du film étudié.

### ► Systèmes électriques

On considère ici le point de vue du physicien qui caractérise des diélectriques solides ou liquides, représentés comme des milieux continus, supposés de surcroît homogènes isotropes. L'application d'un champ électrostatique extérieur  $\vec{E}$ , fait apparaître en tout point du milieu un vecteur induction électrique  $\vec{D}$  tel que :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

avec :

- $\epsilon_0$ , permittivité électrique du vide ;
- $\epsilon$ , permittivité électrique du diélectrique ;
- $\vec{P}$ , moment électrique associé au volume  $V$  :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi V \vec{E}$$

- $\chi$ , susceptibilité électrique du milieu.

Dans le cas général,  $\chi$  est une fonction de  $T$  :

$$\chi = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = a + \frac{b}{T}$$

$a, b$  les constantes.

**Remarque 1 :** pour certains diélectriques,  $a$  est très voisin de zéro.

**Remarque 2 :** On peut aussi définir des équations d'état pour des systèmes électriques macroscopiques, par exemple les piles, dont la pile à combustible pour laquelle les couplages thermoélectriques sont importants.

### ► Systèmes magnétiques

Il s'agit là aussi de la caractérisation magnétique d'un milieu matériel continu. Les matériaux sont susceptibles de présenter des propriétés variées : diamagnétisme, paramagnétisme, ferro et ferrimagnétisme.

Dans le cas du paramagnétisme, il existe une application, la désaimantation adiabatique, qui permet d'atteindre de très basses températures. Nous allons considérer ce cas ci-après, sans pour autant mésestimer les autres effets et leurs applications respectives.

L'équation d'état relie alors le module du moment magnétique  $M$  du système étudié au vecteur induction magnétique  $\vec{B}$ , sous la forme :

$$M = f\left(\frac{B}{T}\right)$$

Pour les faibles valeurs du rapport  $B/T$ , cette équation prend la forme de la loi de Curie :

$$M = c \frac{B}{T}$$

avec  $c$ , constante de Curie.

**Remarque :** les études de comportement magnétique et électrique évoquées peuvent être développées et approfondies à partir d'une approche thermodynamique statistique, qui n'est pas l'objet du présent ouvrage.

### ► Systèmes électromagnétiques

Parmi ces systèmes, on trouve le système radiatif ; le physicien utilise couramment un volume de contrôle enfermant une énergie électromagnétique, à la température  $T$ . Cette cavité renferme une assemblée de particules sans masse, les photons (point de vue quantique), ou comme une cavité résonnante pour les ondes électromagnétiques qu'elle contient (point de vue ondulatoire).

Les équations d'état correspondantes décrivant macroscopiquement la cavité sont :

$$U = V\sigma T^4$$

qui correspond à l'équation de Stefan-Boltzmann, avec  $\sigma = 7,56 \cdot 10^{-16} \text{ J / m}^3 \cdot \text{K}^4$ , constante de Stefan.

Puis 
$$P = \frac{U}{3V}$$

qui fournit la pression de radiation.

Cependant, ces deux équations d'état ne dépendent que des variables extensives  $U$  et  $V$ , à l'exclusion du nombre de particules  $N$  (ou de leur masse  $m$ ), il n'y a donc que deux variables indépendantes dans l'équation fondamentale caractérisant le système.

**Remarque :** L'étude de tout système thermodynamique suppose une connaissance précise de ses équations d'état. De la qualité de ces équations dépendent fortement les résultats qui seront obtenus par les méthodes thermodynamiques.

## 4.2.5 Transformation thermodynamique

### a) Transformation thermodynamique élémentaire

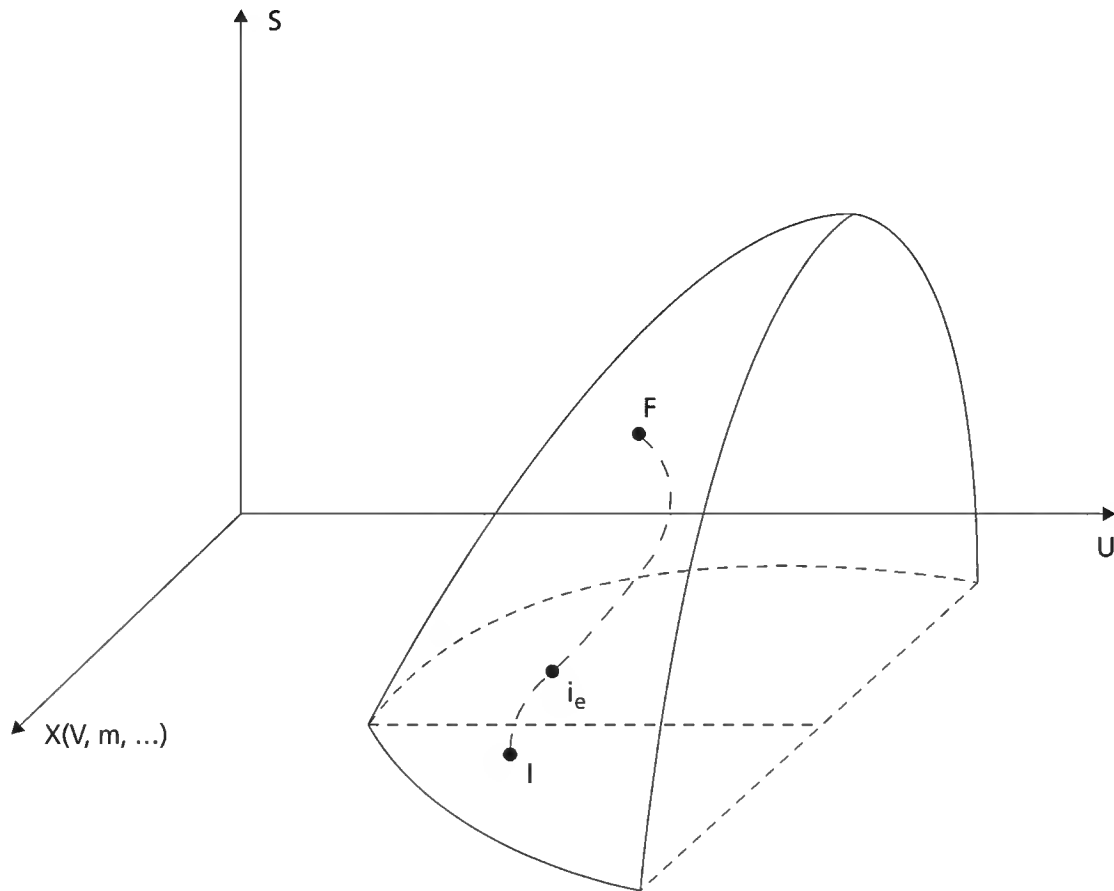
Une transformation thermodynamique élémentaire caractérise l'évolution du système entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$ ,  $\Delta t$  étant un intervalle de temps (une durée), qui pourra prendre une valeur quelconque ; si  $\Delta t$  est petit, la transformation pourra être étudiée en continu par passage à la limite (mathématiquement  $\Delta t$  tendant vers zéro : approche différentielle en temps). Si la transformation est finie, l'évolution du système sera caractérisée par l'instant initial  $t_i$  et l'instant final  $t_f$  et les états correspondants supposés quelconques (en particulier hors équilibre).

### ► Transformation quasi-statique

Une transformation quasi-statique est une transformation particulière constituée par une succession d'états d'équilibres rapprochés (voire à la limite continue). Ce concept est idéalisé.

Cette transformation, contrairement aux processus réels, ne fait pas apparaître la notion de temps (variable temps), donc les notions cinématiques et cinétiques associées (vitesse, accélération, flux).

Une transformation quasi-statique est décrite à partir des états thermodynamiques d'équilibre accessibles dans l'espace thermodynamique décrivant le système, souvent appelé espace de configuration (figure 4.3).



**Figure 4.3** Représentation schématisée d'un système fermé dans l'hyperespace de configuration thermodynamique

Aussi, un système fermé simple est décrit par  $U = U(S, V, m)$  ou par inversion  $S = S(U, V, m)$  qui représentent une surface dans l'espace de configuration. Cette surface est non quelconque, du point de vue thermodynamique, puisqu'elle représente les états d'équilibre du système et satisfait des conditions thermodynamiques (voir paragraphe 4.2.6 a).

En revanche, une transformation thermodynamique réelle est une succession dans le temps d'états d'équilibre et de non équilibre, générés par la relaxation de contraintes externes (interactions du système avec l'extérieur ou environnement). Aussi, dans le cas général, le système va de l'état d'équilibre initial I à l'état d'équilibre final F, par une succession d'états intermédiaires  $i$ , certains pouvant appartenir à la courbe en trait mixte, représentant un chemin quasi-statique pour aller de I en F (par exemple  $i_e$ , état intermédiaire d'équilibre).

**Remarque :** pour le système fermé, toute transformation réelle d'un état I à un état F fera apparaître une augmentation d'entropie, comme il sera précisé plus loin (transformation irréversible).



### ► Quasi-statisticité et relation au temps

Le passage de l'état I à l'état F, états d'équilibre, réalisé par relaxations successives de contraintes, suppose d'atteindre à chaque pas, le nouvel état intermédiaire d'équilibre, ou par passage à la limite d'avoir une cinétique (vitesse) de relaxation suffisamment lente, pour pouvoir atteindre les états d'équilibre intermédiaire (ou rester dans leur voisinage immédiat) : cela dépend du temps de relaxation du système  $\tau$  vis-à-vis de la contrainte considérée.

Ce temps  $\tau$  doit demeurer petit par rapport au temps de relaxation de la contrainte, pour que l'approximation quasi-statique ait un sens. Si ce n'est pas le cas, la transformation est irréversible et l'hypothèse d'équilibre globale (voire locale) n'est plus valable.

### *Exemple de la détente ou de la compression d'un gaz dans un cylindre*

Seuls les déplacements très lents (infiniment lents) du piston dans le cylindre peuvent conduire à des processus quasi-statiques (réversibles).

Si le mouvement du piston est rapide, les forces ou pressions externes varient rapidement, causant des inhomogénéités dans le cylindre par écoulement, turbulence, voire onde de pression (l'entropie augmente alors au cours des processus et du temps ; la transformation est irréversible et tout au plus adiabatique). Ce point a retenu de longue date l'attention de S. Petrescu.

En détente, il y a appauvrissement du gaz au voisinage du piston, alors qu'en compression, il y a excès de gaz dans ce même voisinage. L'homogénéisation du gaz se fait par écoulement jusqu'à l'équilibre de pression dans le cylindre ; l'onde de pression qui se déplace à la vitesse du son dans le gaz interagit de façon complexe avec les parois et se dissipe sous forme de chaleur. L'estimation la plus simple de l'ordre de grandeur du temps de relaxation de l'onde suppose une atténuation totale dès la première interaction avec la paroi. La longueur caractéristique du système est supposée  $L = V^{1/3}$ , de sorte que le temps de relaxation s'écrit :  $\tau \sim V^{1/3}/a$  avec  $a$ , vitesse du son dans le gaz (vitesse acoustique).

Si le temps de détente ou de compression est plus grand que le temps caractéristique  $\tau$ , alors l'approximation quasi-statique a un sens.

### b) Expression du travail élémentaire

De façon générale, dans une interaction du système avec son environnement, on observe un déplacement (généralisé : effet) sous l'action d'une force (généralisée : cause). Cette généralisation permet de définir le travail élémentaire comme le produit du vecteur force généralisée  $\vec{Y}$  par le déplacement engendré  $\vec{X}$  :

$$\delta W = \sum_i Y_i \cdot dX_i$$

**Remarque :** on rappelle ici la convention thermodynamique qui consiste à compter positivement tout travail reçu par le système.

► Diverses expressions du travail élémentaire

*Travail mécanique*

$$\text{Travail mécanique 1D} \quad \delta W = \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{L}$$

$$\text{Travail mécanique 2D} \quad \delta W = \gamma \cdot dA$$

$$\text{Travail mécanique 3D} \quad \delta W = P_{\text{ext}} \cdot dV$$

**Remarque :** L'identification de  $\delta w$  avec  $-PdV$  n'est recevable que pour les processus quasi-statiques pour lesquels  $P_{\text{ext}} = -P$

*Travail de charges électriques*

$$\delta W = \Delta V_{\text{ext}} \cdot dq$$

$\Delta V_{\text{ext}}$  différence de potentiel rencontrée lors du transfert de charge  $dq$  (quantité  $> 0$ ).

Si  $dq > 0$ , l'énergie électrique est reçue par le système (charge d'une pile, d'un condensateur) ; si  $dq < 0$ , l'énergie électrique est cédée.

**Travail électrique dans un diélectrique.** Dans le cas du travail électrique dans un milieu diélectrique, le milieu étant un milieu continu, on exprime plutôt une densité volumique de travail :

$$\frac{\delta W}{dV} = \vec{E} \cdot d\vec{D}$$

avec :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\vec{D}$ , vecteur induction électrique

**Remarque :** par analogie avec le travail magnétique, en milieu continu magnétique, il vient :

$$\frac{\delta W}{dV} = \vec{H} \cdot d\vec{B}$$

avec :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{m}$$

$\vec{B}$ , vecteur induction magnétique

$\vec{m}$ , densité volumique de moment magnétique telle que :

$$d\vec{M} = \vec{m} \cdot dV$$



Travail physico-chimique :

$$dW = \mu_m \cdot dm = \mu_N \cdot dN$$

c) *Expression générale de la quantité de chaleur élémentaire*

En reprenant les expressions relatives à l'énergie interne d'un système fermé vues au paragraphe 4.2.3, on voit que pour un système thermomécanique simple fermé :

$$\delta Q = dU - \delta W = T \cdot dS \quad (4.1)$$

Là encore, cette expression ne vaut que pour les transformations quasi-statiques.

► **Capacité calorifique, chaleur spécifique (rappel)**

Les conversions d'énergie aboutissant à une énergie calorifique (par exemple chimique-thermique : combustion ou oxydation) se manifestent couramment par des variations de température (chaleur sensible), d'où la mesure de ces quantités de chaleur par calorimétrie. Cette technique est supposée connue du lecteur ; on indiquera seulement que les bombes calorimétriques permettent une mesure d'une chaleur de réaction à volume constant, alors que d'autres calorimètres (par exemple de Junkers) fournissent des chaleurs de réaction sous pression constante, généralement la pression atmosphérique.

Dans les deux cas, l'équation calorimétrique possède la même forme :

$$\delta Q = C \cdot dT$$

C, capacité calorifique du système dans la transformation considérée. On note  $C_p$ , pour une transformation isobare,  $C_v$  pour une transformation isochore.

C est une grandeur extensive, fonction du système. Pour avoir une grandeur caractéristique du constituant, à savoir une chaleur spécifique molaire ou massique, l'équation ci-dessus est écrite sous la forme :

$$\delta Q = mc_m dT = Nc_N dT$$

On utilisera très souvent la chaleur spécifique massique qui sera notée  $c_p$  (à  $P = \text{cte}$ ),  $c_v$  (à  $V = \text{cte}$ ).

Les valeurs de ces propriétés sont accessibles dans la littérature courante (*Techniques de l'Ingénieur*), (CETIAT).

**Remarque 1 :** il est possible de définir de nombreuses autres chaleurs spécifiques selon les transformations thermodynamiques mises en jeu.

**Remarque 2 :**  $c_p$  est très voisin de  $c_v$  pour les solides et les liquides ; ils seront généralement confondus. Ce n'est pas vrai pour les gaz, comme il sera précisé plus loin.

### ► Flux de chaleur

La dissipation d'énergie sous forme de chaleur peut se traduire par une évolution transitoire liée à une variation de température (paragraphe précédent) ; mais cela est généralement connecté au transfert de la chaleur, selon trois mécanismes de base couplés ou non.

Avant de décrire succinctement ces trois modes de transfert, on donne la définition du flux de chaleur instantané :

$$\overset{\circ}{Q} = \frac{\delta Q}{dt}$$

Les lois de transfert introduites ci-après sont les bases thermocinétiques, qui complètent la thermostatique : ce sont des équations d'état liant les flux de chaleur aux écarts de température, rejoignant en cela l'approche de la TPI, thermodynamique des phénomènes irréversibles (linéaire ou non linéaire). Les lois phénoménologiques montrent bien l'apparition de nouvelles variables (flux, force ou gradient de variables). Elles seront très utiles dans le développement de la (véritable) thermodynamique des machines et procédés qui est proposée depuis quelques décennies et que nous suggérons d'appeler thermodynamique en dimensions finies (TDF), quelle que soit la dimension de temps, d'espace, voire d'énergie.

#### *Transfert conductif*

La loi de Fourier exprime le flux de chaleur conduit à travers l'élément de frontière  $dA$  du système :

$$\overset{\circ}{Q} = -\lambda dA \frac{dT}{dn}$$

$\frac{dT}{dn}$ , dérivée normale de la température sur la normale intérieure à l'élément  $dA$  ; on

voit que si  $\frac{dT}{dn} > 0$ , le flux est perdu par le système,

$\lambda$ , conductivité thermique (homogène isotrope) du milieu sur la frontière, propriété intrinsèque du milieu support nécessaire au transfert.

#### *Transfert convectif*

Le transfert convectif nécessite aussi un support matériel, mais fluide. C'est le mouvement du fluide qui permet le transfert des zones chaudes vers les zones froides.

La convection est dite naturelle lorsque le mouvement est lié aux variations des propriétés physiques du fluide ( $\rho$ ,  $C_p$ ,  $\gamma$ , viscosité) avec la température ; la convection sera dite forcée, lorsque ce mouvement sera produit par un dispositif mécanique supplémentaire (ventilateur, pompe) forçant la circulation du fluide dans l'installation.

La loi phénoménologique correspondante est donnée sous la forme linéaire suivante (attribuée souvent à Newton) :

$$\overset{\circ}{Q} = h \cdot dA \Delta T$$

$h$ , coefficient d'échange convectif par unité de surface ; ce coefficient est calculé à partir de corrélations proposées dans la littérature (Sacadura J.F.). Il est parfois supposé constant.

$\Delta T$  est l'écart de température fini entre le fluide en mouvement et l'élément de surface  $dA$ .

### Transfert radiatif

Le transfert radiatif entre deux surfaces séparées par un milieu transparent au rayonnement suit la loi de Stefan-Boltzmann, modifiée pour tenir compte des interactions mutuelles :

$$\overset{o}{Q} = \varepsilon_a \sigma dA (T^4 - T_A^4)$$

avec :

$\varepsilon_a$ , émissivité hémisphérique apparente dépendant de la géométrie et de la nature des surfaces échangeant de la chaleur ;

$T_A$ , température de l'élément  $dA$ , en K ;

$T$ , température de la surface échangeant avec  $dA$ , en K.

**Remarque :** les trois modes de transfert peuvent agir simultanément ; on parle alors de transferts couplés.

## 4.2.6 États d'équilibre d'un système

Il a été indiqué précédemment que l'état d'équilibre d'un système peut être envisagé localement ou globalement. C'est l'approche globale qui est privilégiée ici.

Tout système évolue naturellement vers un état final, compatible avec ses interactions à l'environnement, et indépendant du temps : cet état est un état d'équilibre.

### a) Postulat du maximum d'entropie : équilibre thermodynamique

Pour un système fermé simple les états d'équilibre, sont caractérisés complètement par la connaissance de  $U, V, m$ , les variables extensives (postulat 1).

Nous adopterons comme second postulat (postulat 2) la proposition d'un principe d'extremum. Le postulat suppose l'existence de la fonction entropie du système thermodynamique, exprimée en fonction des variables extensives et définie pour tous les états d'équilibre. La valeur du vecteur d'état des variables extensives en l'absence de toute contrainte est celle qui maximise l'entropie par rapport à l'ensemble des états d'équilibre contraints.

Cet état d'équilibre généralisé est le seul équilibre thermodynamique du système : cet état final correspond à une « mort » thermodynamique du système.

L'existence de l'extremum nécessite la satisfaction de conditions mathématiques pour la fonction  $S$ , qui doit être une fonction continue différentielle (différentielle totale : postulat 3), de sorte que les dérivées partielles existent.

**Remarque 1 :**  $\left(\frac{\delta S}{\delta U}\right)_{V,m} = \frac{1}{T} > 0$  ; ce qui est vérifié en physique courante, vu

le choix de l'échelle de température (d'autres conséquences confirmeront la pertinence des choix effectués, par rapport aux observations physiques) ; S est monotone croissante de U.

**Remarque 2 :**  $S = S(U, V, m)$  est inversable par rapport à l'énergie interne U, sous la forme  $U = U(S, V, m)$  qui est de ce fait une fonction continue, différentiable de S, V, m et monotone de S.

Ces deux équations sont deux formes alternatives de la relation thermodynamique fondamentale, contenant toutes les informations sur le système. On conçoit alors l'intérêt de l'analyse entropique et de son développement.

### b) Équilibre thermique-température

Pour étudier cet équilibre partiel associé à la forme d'énergie particulière calorifique, on considère une partition d'un système fermé simple en deux volumes  $V_1$  et  $V_2$  constants, la matière enfermée dans chaque volume restant aussi constante ( $m_1$  ;  $m_2$ ) ; la paroi indéformable séparant les deux volumes est étanche à la matière, mais diabatique. Le volume  $V_1 + V_2 = V_c$  est à frontière  $A_c$  adiabatique de sorte que :  $U = U_1 + U_2 = \text{cte}$ .

Le postulat 2 impose la condition d'extremum,  $dS = 0$ .

Sachant que  $S = S_1 + S_2$  (fonction extensive), il vient :

$$S(U_1, U_2) = S_1(U_1) + S_2(U_2)$$

d'où

$$dS = \left(\frac{\delta S_1}{\delta U_1}\right) dU_1 + \left(\frac{\delta S_2}{\delta U_2}\right) dU_2$$

Connaissant la définition de la température (paragraphe 4.2.3.b) il vient :

$$dS = \frac{dU_1}{T_1} + \frac{dU_2}{T_2}$$

avec :

$$dU = 0 = dU_1 + dU_2$$

Soit :

$$dS = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) dU_1$$

La condition d'équilibre étant vraie, quel que soit  $dU_1 \Rightarrow T_1 = T_2$

Cette condition, plus la constance de l'énergie permettent, dans le principe, de remonter à la connaissance de  $U_1$  et  $U_2$  à l'équilibre thermique (par l'intermédiaire de l'équation fondamentale si elle est disponible).

**Remarque 1 :** l'existence de l'extremum sous forme d'un maximum nécessite de plus  $d^2S < 0$  : condition de stabilité ; cela pourra être envisagé par la suite (Demirel Y.).

**Remarque 2 :** deux systèmes en équilibre thermique avec un troisième sont en équilibre entre eux.

**Remarque 3 :** le résultat des transferts thermiques est en accord avec l'observation courante vu que :

$$\Delta S \cong \left( \frac{1}{T_{1i}} - \frac{1}{T_{2i}} \right) \Delta U_1 > 0$$

Si  $T_{1i} > T_{2i}$ , il y correspond  $\Delta U_1 < 0$ , et réciproquement.

### ► Échelles de température

Il sera précisé par la suite comment accéder à la mesure du rapport de deux températures à l'aide de la machine de Carnot.

Le postulat 4 relatif à l'entropie est une extension par Planck, du postulat de Nernst (souvent qualifié de troisième principe de la thermodynamique). Il s'énonce :

L'entropie de tout système s'annule dans l'état pour lequel  $\left( \frac{\delta U}{\delta S} \right)_{V,m} = 0$

Soit pour une température thermodynamique tendant vers zéro, qui de ce fait est unique.

L'échelle de température absolue a pour unité le kelvin K, dont le rapport à l'énergie est la constante de Boltzmann,  $k = 1,380610 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  ; c'est l'échelle officielle du Système International.

À cette échelle correspond une échelle d'usage courant qui est l'échelle Celsius, avec pour unité le degré, °C. Cette échelle possède un zéro translaté par rapport à l'échelle K, conformément à :

$$t \text{ (°C)} = T \text{ (K)} - 273,15$$

Dans cette échelle, la température du point triple de l'eau est de 0,01 °C (273,16 K). Rien de plus ne sera ajouté, la thermométrie étant supposée connue.

**Remarque :** la température ou plus exactement son inverse est un facteur intégrant, de la forme différentielle  $\delta Q$ , pour la différentielle totale  $dS$ . Cette façon de définir la température absolue est aussi courante en physique.

### c) Autres équilibres partiels

On illustrera ici les équilibres mécanique, physique et chimique par le système simple fermé.

### ► Équilibre mécanique

En reprenant la même démarche qu'au paragraphe précédent, mais en supposant cette fois une interface entre les deux volumes qui, de plus, est mobile, on a :

$$U_1 + U_2 = U = cte$$

$$V_1 + V_2 = V_c = cte$$

La traduction mathématique de l'extremum d'entropie devient alors (condition nécessaire) :

$$dS = \left( \frac{\delta S_1}{\delta U_1} \right)_{V_1, m_1} dU_1 + \left( \frac{\delta S_1}{\delta V_1} \right)_{U_1, m_1} dV_1 + \left( \frac{\delta S_2}{\delta U_2} \right)_{V_2, m_2} dU_2 + \left( \frac{\delta S_2}{\delta V_2} \right)_{U_2, m_2} dV_2 = 0$$

Sachant que :

$$dU_1 + dU_2 = dU = 0$$

$$dV_1 + dV_2 = dV_c = 0$$

on trouve aisément :

$$dS = \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dU_1 + \left( \frac{P_1}{T_1} - \frac{P_2}{T_2} \right) dV_1 = 0$$

Cela étant vrai quels que soient  $dU_1$  et  $dV_1$ , il en résulte deux conditions d'équilibre, qui se traduisent par :

$$T_1 = T_2 = T \quad ; \quad P_1 = P_2 = P$$

Ainsi, l'équilibre associé est un équilibre thermomécanique, qui rappelle les développements d'une mécanique isotherme, telle que présentée couramment et initialement dans cet ouvrage.

**Remarque :** pour un système mécanique pur dans des conditions différentes de l'isothermie (par exemple interface adiabatique), il apparaît un couplage thermomécanique, qui conduit à un équilibre mécanique (donc des pressions) pour lequel les températures diffèrent dans chaque sous-système (du fait de l'amortissement visqueux, effet dissipatif). Un cas limite intéressant est relatif à une transformation où l'entropie serait stationnaire ( $S = cte$ ) : transformation isentropique ; alors la relation fournissant  $dS = 0$  (formule ci-dessus) fournit une relation entre  $U_1$  et  $V_1$  si les  $T_i$  et  $P_i$  sont connus en fonction des variables  $U_i$ ,  $V_i$ . Cela pourra être développé par la suite.

### ► Équilibre physique-chimique

Dans ce cas, l'interface entre les deux volumes est supposée fixe et diathermane, mais perméable au constituant du système de sorte que :

$$dU_1 + dU_2 = dU = 0$$

$$dm_1 + dm_2 = dm = 0$$

La maximisation de l'entropie conduit à la condition mathématique nécessaire suivante :

$$dS = \frac{1}{T_1} dU_1 - \frac{\mu_1}{T_1} dm_1 + \frac{1}{T_2} dU_2 - \frac{\mu_2}{T_2} dm_2$$

Soit

$$dS = \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dU_1 - \left( \frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2} \right) dm_1 = 0$$

D'où les deux conditions d'équilibre résultantes :

$$T_1 = T_2 = T \quad ; \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu$$

À nouveau, l'équilibre est un équilibre thermophysique, qui renvoie aux développements classiques de la physique isotherme.

**Remarque 1 :** dans le cas de la diffusion isotherme, le déséquilibre entre les deux sous-systèmes conduit, vu la positivité de  $dS$ , à un transfert de masse de la région de fort potentiel chimique  $\mu$  vers celle de faible potentiel. Cela sera précisé ultérieurement.

**Remarque 2 :** Le raisonnement précédent sera étendu ultérieurement aux changements de phase et aux réactions chimiques. D'où l'importance de la notion de potentiel chimique.

### 4.3 CONCLUSION

Ce chapitre consacré à la thermostatique (science générale des états d'équilibre) a introduit un vocabulaire précis faisant appel à de nombreuses notions fondamentales pour la suite : système, interface ou frontière, environnement, états et variables d'un système, équations d'état, transformations thermodynamiques, évolution spatiotemporelle. Il ne faut pas oublier par ailleurs la conservation de quantités, ni leur extrémisation. Ces deux derniers points feront l'objet plus particulier des deux chapitres à venir, avec quelques extensions.



## BIBLIOGRAPHIE

- BOREL M. *Les phénomènes d'ondes dans les moteurs*, Paris, Éditions Technip, 2000.
- CALLEN H. *Thermodynamics and an introduction to thermostatics*, Seconde Édition, John Wiley Éditeur, 1985.
- CETIAT, Propriétés physiques de quelques fluides utilisés dans les échangeurs de chaleur, Paris, diffusion Tec et Doc, 2006.
- DEMIREL Y. Review, stability of transport and rate processes, *Int. J. of Thermodynamics*, Vol. 8, n° 2, pp. 67-82, June 2005.
- FEIDT M., 1, *Thermodynamique et optimisation énergétique des systèmes et procédés*, Paris, TEC et DOC, 2<sup>e</sup> édition, p. 99, 1996.
- FEIDT M., 2, Note technique : les équations d'état thermodynamiques, rapport interne, février 2004.
- PETRESCU S., PETRESCU V. *Principe termodinamicii, Evolutie, fundamentarii, aplicatii*, Editura Tehnica, Bucuresti, 1983.
- REYNOLDS W.C. *Thermodynamic properties in SI, graphs, tables and computational equation for 40 substances*, Stanford University, Stanford, 1979.
- SACADURA J.F. *Initiation aux transferts thermiques*, Paris, Technique et Documentation, 1978. Seconde Édition, 1985.
- SOLIMANDO R. Équations d'état susceptibles de représenter les fluides pétroliers, thèse Université de Marseille, 1991.
- Techniques de l'Ingénieur*, Constantes physicochimiques, tome K, Paris (mise à jour constante)
- VIDAL J. *Thermodynamique, applications au génie chimique et à l'industrie pétrolière*, Paris, Éditions Technip, chapitre 4, 1997.



## Chapitre 5

# **À la rencontre de la mécanique des fluides et de la thermocinétique : le principe de conservation étendu**

### **5.1 INTRODUCTION : EXTENSION DE LA NOTION DE TRANSFORMATION THERMODYNAMIQUE**

Ce chapitre est consacré au principe de conservation (premier principe de la thermodynamique) pour un système quelconque (fermé ou ouvert) en interaction avec l'extérieur (environnement) : cette conservation prend plusieurs formes examinées successivement.

Cela nécessite une extension de la notion de transformation thermodynamique présentée au chapitre précédent. En effet, la thermostatique ne considère l'évolution d'un système que d'un état initial d'équilibre vers un état final d'équilibre, à travers une succession d'états d'équilibre ; cette transformation est approchée par une transformation quasi-statique (en temps long, par rapport aux temps caractéristiques du système étudié).

Or les transformations thermodynamiques réelles que nous aurons à étudier peuvent revêtir des formes très différentes et variées :

- Dans le cas d'une évolution ouverte, celle-ci peut se faire entre un état initial I et un état final F, mais en temps fini ( $\Delta t$ ), donc à travers une succession d'état hors équilibre ; il peut en être de même d'ailleurs des états initiaux et finaux qui peuvent être hors équilibre.
- Dans le cas d'une évolution cyclique, le système part d'un état initial quelconque (d'équilibre ou hors équilibre), pour repasser périodiquement par ce même état à

travers une succession d'états quelconques, avec une certaine fréquence. Là encore la transformation est donc en temps fini.

- Dans le cas d'une transformation en régime dynamique stationnaire (dit régime permanent en mécanique des fluides ou thermique), toute caractéristique du système devient cette fois indépendante du temps, que cette propriété soit intensive ou extensive, mais elle est une fonction d'espace (de la position dans le système).

Les états correspondants sont donc nécessairement des états hors équilibres. Cette propriété apparaîtra particulièrement pour les systèmes ouverts.

### 5.1.1 Notion de flux

Cette notion va être ici introduite de façon générale, pour une grandeur physique  $G$ , représentative du système thermodynamique lors d'une transformation élémentaire faisant passer le système de son état à l'instant  $t$ , à celui à l'instant  $t + dt$  :  $t \Rightarrow G$  ;  $t + dt \Rightarrow G + dG$ .

$dG$  est une différentielle totale, si la grandeur est une fonction de type potentiel (satisfaisant au théorème de l'état initial et de l'état final, par exemple  $U$ ,  $S$ )

$\delta G$  est une forme différentiable, si l'incrément dépend du chemin suivi (transformation hors équilibre).

Pour une transformation macroscopique entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , on notera :  $\Delta G = G_{i-f}$ .

Quel que soit le type de grandeur, on obtient alors par passage à la limite (mathématique des fonctions continues et dérivables par rapport à la variable temps) :

$$^o G = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dG}{dt} \quad (5.1)$$

$^o G(t)$  est dit le flux de la grandeur  $G$  à l'instant  $t$ .

**Remarque 1 :** en régime dynamique stationnaire,  $^o G$  ne peut être fonction que de  $P$ , la position dans le système.

**Remarque 2 :** pour différencier un flux d'un stockage, on notera toujours les flux sous la forme  $^o G$  ; les stockages font aussi intervenir une dérivée par rapport au temps ; mais le stock augmente ou diminue : tout effet capacitif est associé à un régime transitoire. On le notera donc  $\frac{dG}{dt}$  ; cette fonction dépend du temps par essence.

### 5.1.2 Conclusion

Pour conclure ce paragraphe, on notera que la description des transformations thermodynamiques réelles tant des systèmes fermés que des systèmes ouverts nécessite, pour se rapprocher de la thermostatique, un minimum de précaution : l'éloignement à l'équilibre ne doit pas être trop marqué, de telle sorte que la thermostatique

s'applique (l'hypothèse d'équilibre local doit être recevable tant dans l'échelle du temps, que dans l'échelle d'espace). En régime dynamique stationnaire qui constituera l'essentiel des développements, seule l'échelle d'espace intervient : il ne faut pas de variation forte des gradients, tout particulièrement des variables intensives. Ce cas est courant dans les machines et les procédés. Là encore, on rejoint l'hypothèse d'équilibre locale, mais uniquement à l'échelle d'espace.

## 5.2 CONSERVATION DE LA MATIÈRE

### 5.2.1 Conservation de la matière en système fermé

La matière est une grandeur scalaire. La conservation de la matière va d'abord être examinée dans un système fermé.

#### a) Mélange dans un système fermé

Jusqu'à présent, nous avons surtout considéré un système constitué d'un corps pur unique sans changements de phases.

Lorsque le volume de contrôle comporte  $r$  constituants, corps pur, à tout constituant  $i$ , correspond une masse  $m_i$ .

La masse totale contenue dans le volume de contrôle  $V_C$  est de ce fait connue :

$$m = \sum_{i=1}^r m_i \quad (5.2)$$

La caractérisation du mélange peut alors se faire par la connaissance des masses volumiques partielles (ou des volumes massiques partiels), mais plus couramment par un titre (ou fraction) massique :  $x_i = m_i / m$ .

En chimie, on utilise plus couramment le titre molaire. De même s'introduit couramment la notion de concentration volumique en masse (ou en mole) :

$$C_{im} = \frac{m_i}{V_C} ; C_{iM} = \frac{N_i}{V_C} \quad (5.3)$$

Il y a lieu de remarquer que cette grandeur, si elle est conservative avec une bonne approximation pour les solides et les liquides quels que soient  $P$  et  $T$ , ne l'est plus pour les gaz.

Par ailleurs, pour les gaz s'introduit la notion de pression partielle. À titre d'exemple, pour un mélange de gaz suivant l'équation du gaz parfait, la pression partielle du gaz  $i$  satisfait à :

$$P_i V_C = m_i r T = N_i R T \quad (5.4)$$

**Remarque :** la caractérisation d'un mélange de phases se fait de façon similaire. Dans le cas d'un corps pur, on sait qu'il n'existe que trois états physiques (au polymorphisme près) : solide,  $s$  ; liquide,  $l$  ; gazeux (vapeur),  $v$ .

On introduit de ce fait trois titres  $x_s, x_l, x_v$  qui satisfont à :  $x_s + x_l + x_v = 1$ .

Deux titres suffisent donc à caractériser un mélange des trois phases ; un seul est variable indépendante pour un mélange diphasique. Dans le cas d'un mélange liquide-vapeur, qui sera souvent rencontré dans les machines, l'habitude veut que le titre vapeur est la variable indépendante :  $x_v$ , dans ce cas sera noté  $x$ .

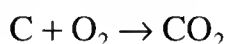
### b) Mélange réactif dans un système fermé

#### ► Réaction chimique simple

Une réaction chimique simple met en jeu  $r$  réactifs  $R$ , et  $p$  produits de réactions  $P$ , tels que selon le cas on passe au cours du temps des réactifs aux produits (réaction hors équilibre) ; ou bien il s'établit un équilibre entre les réactifs et les produits en fonction des conditions ( $P$ ,  $T$ ) de pression et température, ainsi que des quantités de réactifs mises en jeu :

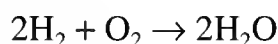


**Exemple :** combustion complète du carbone



Généralement, les réactions chimiques font apparaître des coefficients stoechiométriques  $v$ , destinés à « équilibrer » la réaction, c'est-à-dire à traduire la conservation des espèces (de la matière).

**Exemple :** combustion de l'hydrogène



Une réaction chimique simple s'écrit donc de façon générale sous la forme :



Il est d'usage courant de compter positivement les produits de réaction ( $v_p > 0$ ) car ils apparaissent, et négativement les réactifs ( $v_r < 0$ ) car ils disparaissent.

**Remarque :** en cas de réaction équilibrée, cette convention devient arbitraire.

### c) Transformation chimique

Une réaction chimique non équilibrée s'effectue en temps fini ; ainsi dans une transformation élémentaire de durée  $dt$ , à chaque constituant  $i$  correspond une variation de masse :

$$dm_i = M_i dN_i = v_i M_i d\xi \quad (5.7)$$

$M_i$ , masse molaire du constituant  $i$ .

$\xi$ , degré d'achèvement de la réaction ; il caractérise l'avancement de la réaction :

$\frac{d\xi}{dt}$  représente la cinétique (la vitesse de la réaction chimique). Elle est généralement finie et ne s'annule que pour un équilibre de la réaction, ou à l'épuisement des réactifs.

**Remarque 1 :** la conservation de la matière dans le réacteur fermé s'écrit :

$$dm = \sum_i dm_i = \left[ \sum_i v_i M_i \right] d\xi = 0 \quad (5.8)$$

Cela étant vrai, quel que soit  $d\xi$ , il en résulte l'équation stoechiométrique de la réaction :

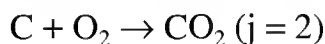
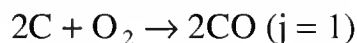
$$\sum_i v_i M_i = 0 \quad (5.9)$$

**Remarque 2 :** lors de l'extension à un nombre quelconque  $j$  de réactions chimiques, il vient :

$$dm_i = M_i \sum_j v_{ij} d\xi_j \quad \text{ou} \quad dN_i = \sum_j v_{ij} d\xi_j \quad (5.10)$$

avec  $v_{ij}$ , coefficient stoechiométrique du constituant  $i$ , dans la réaction chimique  $j$ .

**Exemple :** Combustion incomplète du carbone



$$dm_C = -2d\xi_1 - d\xi_2 \quad dm_{CO} = 2d\xi_1$$

$$dm_{O_2} = -d\xi_1 - d\xi_2 \quad dm_{CO_2} = d\xi_2$$

**Remarque 3 :** généralement les réactions chimiques ne s'effectuent pas à pression constante, dans les systèmes fermés indéformables (bombe calorimétrique) du fait de la non-conservation du nombre de moles entre produits initiaux et réactifs finaux. De même la température n'est pas constante du fait de la chaleur de la réaction (à l'exception d'un transfert de chaleur maintenant l'isothermie). On pourrait ainsi montrer la relation existante entre la chaleur de réaction isobare  $Q_p$  et la chaleur de réaction isochore  $Q_v$  :

$$Q_p - Q_v = (N_P - N_R) RT_O$$

$N_P$ ,  $N_R$  nombres de moles gazeuses respectivement dans les produits de réaction et les réactifs ;  $T_O$  température de référence (298 K). On reviendra par la suite sur ce point.

## 5.2.2 Conservation de la matière en système ouvert

### a) Notion de port

Un système ouvert communique avec l'extérieur par l'intermédiaire de ports ; le système peut être passif (par exemple un tube) ou actif (une pompe, une turbine). Dans le premier cas c'est un organe de transfert, dans le second cas c'est un organe de conversion d'énergie.

Dans toute transformation élémentaire de durée  $dt$ , il y a échange de matière avec l'extérieur à travers les ports  $k$ ,  $d_e m$  tel que pour un fluide quelconque :

$$d_e m = \sum_k d_e m_k \quad (5.11)$$

avec  $d_e m_k > 0$ , si la masse entre dans le système (convention thermodynamique).

### b) Conservation de la matière (approche systémique)

#### ► Système simple

Dans un système ouvert, soumis à une transformation thermodynamique élémentaire quelconque pendant la durée  $dt$  et en l'absence de réactions chimiques, le changement de masse globale  $dm$  (accumulation algébrique) correspond à l'ensemble des transferts à travers les ports :

$$dm = d_e m = \sum_k d_e m_k \quad (5.12)$$

$dm$  correspond au stockage matériel dans le système.

En rapportant à la limite d'une durée  $dt$  tendant vers zéro, il vient :

$$\frac{dm}{dt} = \sum_s \overset{o}{m}_k \quad (5.13)$$

**Remarque :** en singularisant les entrées  $e$  et les sorties  $s$  (convention de l'ingénieur), on retrouve la notion classique de bilan de matière :

$$\sum_e \overset{o}{m}_e = \sum_s \overset{o}{m}_s + \frac{dm}{dt} \quad (5.14)$$

En régime dynamique stationnaire, le terme d'accumulation disparaît. Il reste :

$$\sum_e \overset{o}{m}_e = \sum_s \overset{o}{m}_s$$

#### ► Système à plusieurs constituants susceptibles de réagir

Pour un système ouvert, susceptible de réagir (transformation thermodynamique quelconque de durée  $dt$ , mais comportant des réactions physiques ou chimiques), il y a lieu de considérer le changement de masse de chaque espèce  $i$  dans le réacteur :

$$dm_i = d_e m_i + d_i m_i \quad (5.15)$$

Soit, compte tenu du paragraphe 5.2.1.c

$$dm_i = \sum_k d_e m_{ik} + M_i \sum_j v_{ij} d\xi_j \quad (5.16)$$

Il vient respectivement par unité de temps :

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_k \overset{o}{m}_{ik} + M_i \sum_j v_{ij} \frac{d\xi_j}{dt} \quad (5.17)$$

**Remarque :** par sommation sur  $i$ , on restitue le bilan matière global du réacteur, qui s'écrit comme précédemment, compte tenu du fait que  $\sum_j M_i v_{ij} = 0$  :

$$\frac{dm}{dt} = \sum_k \dot{m}_k$$

### c) Conservation de la matière (approche filaire)

#### ► Expression intégrale du bilan

Le système considéré ici est un modèle à constituant unique avec mouvement de matière (voir annexe de mécanique pour rappel). Toute particule fluide appartenant au volume élémentaire  $dV_c$  (volume élémentaire représentatif, ou V.E.R.) est sujette à vitesse et accélération éventuelle. Ne sont pas examinés ici les mouvements locaux particuliers (diffusion, mouvement brownien, qui relèvent plus de la thermodynamique statistique). Seul le mouvement d'ensemble des particules sera considéré ; il correspond à la notion de vitesse barycentrique.

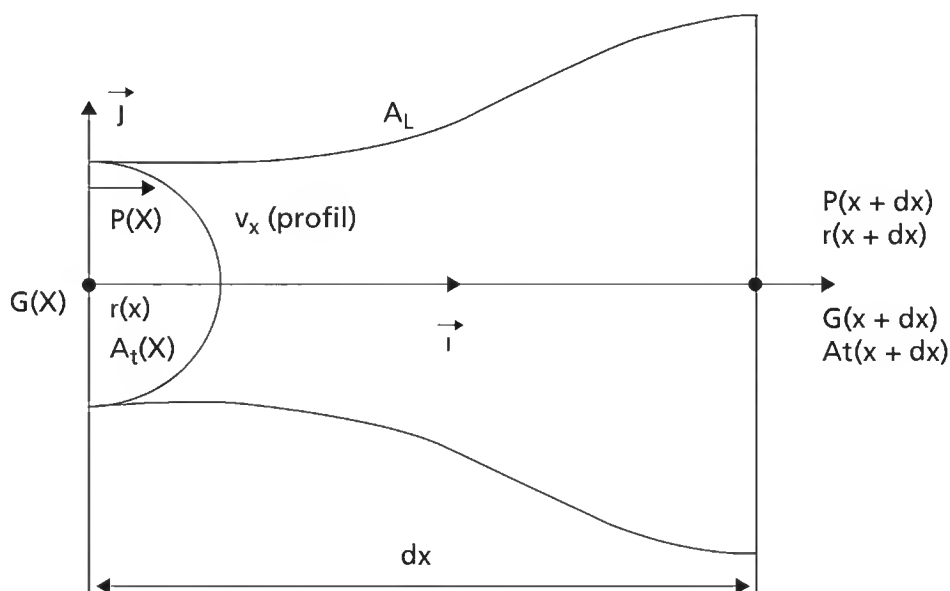


Figure 5.1 Volume de contrôle élémentaire du modèle filaire

La figure 5.1 représente en géométrie cartésienne, un volume élémentaire  $dV_c$ , d'un conduit de section variable, dont l'aire latérale  $A_L$  est indéformable et qui échange de la matière. La section transversale  $A_t$  est de forme quelconque, et l'axe des  $x$  est choisi de telle sorte qu'il porte les centres de masse (centre de gravité dans les cas courants) des sections. L'évolution de la section  $A_t$  selon  $x$  est décrite par une fonction continue et dérivable de  $x$ .

En utilisant la convention thermodynamique, l'expression intégrale du bilan matière sur  $dV_c$  s'écrit :



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV_c = \int_{A_c} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA_c \quad (5.18)$$

conformément à la relation (5.13).

**Remarque :** l'expression ci-dessus est générale, et permettrait le développement d'un modèle filaire en géométrie curviligne. Par souci de simplification pédagogique, on limite l'exposé à la géométrie cartésienne, comme montré sur la figure. Le lecteur curieux pourra trouver des éléments dans la référence (Corvisier P.).

#### ► Particularisation au modèle filaire cartésien

On insiste ici sur le fait que cette particularisation n'est pas triviale et suppose quelques hypothèses abordées ci-après. En effet, l'équation (5.18) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho A_t dx] = \int_{A_t(x)} \rho v_x dA_t(x) - \int_{A_t(x+dx)} \rho v_x dA_t(x+dx) \quad (5.19)$$

À la condition que  $\rho$  soit homogène sur la section quel que soit  $dx$  tendant vers zéro (hypothèse d'équilibre de section, supposée ici isobare, mais de surcroît isotherme). L'hypothèse de section transversale isobare est souvent recevable. Par contre le hors équilibre thermique peut être plus discutable ; il y a lieu d'être vigilant sur ce point. Sinon il faut rechercher une masse volumique moyenne équivalente pour l'écoulement.

**Remarque :**  $\rho$  n'est donc une fonction que de  $x$ , au même titre que  $P$  la pression et  $A_t$ .

$v_x$ , la composante selon  $x$  de la vitesse, est aussi une fonction de  $x$ , mais elle présente de surcroît un profil de vitesse dans le plan de la section  $A_t$  (voir figure 5.1) (avec valeur nulle à la paroi latérale : condition de non glissement).

On supposera ici négligeable l'effet des vitesses transversales. La simplification de (5.19) en résulte :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho A_t] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho(x) \int_{A_t(x)} v_x dA_t(x) - \rho(x+dx) \int_{A_t(x+dx)} v_x dA_t(x+dx) \right] \quad (5.20)$$

#### Notion de vitesse moyenne débitante

En posant :

$$\boxed{\bar{v}_x = v = \frac{1}{A_t} \int_{A_t} v_x dA_t} \quad (5.21)$$

On trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho A_t] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho v A_t] = 0 \quad (5.22)$$



### Cas particuliers importants

Cas du régime dynamique stationnaire :

$$\rho(x)v(x)A_t(x) = \dot{m} \quad (5.23)$$

$\dot{m}$  débit massique constant quel que soit  $x$ .

Cas du fluide incompressible (liquide en général ;  $\rho = \text{cte}$ ) :

$$v(x)A_t(x) = \dot{V} \quad (5.24)$$

$\dot{V}$  débit volumique constant quel que soit  $x$ .

### Notion de dérivée particulaire

L'expression (5.22) fait apparaître le produit particulier  $(\rho A_t)$ . On peut donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A_t) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A_t) \cdot v + (\rho A_t) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.25)$$

En notant que  $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ , il vient :

$$\frac{D}{Dt}(\rho A_t) + (\rho A_t) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (5.26)$$

avec :  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}$ , dérivée particulaire.

**Remarque 1 :** le même raisonnement peut être repris, selon une approche locale générale ( $dA_t$  élément d'aire cartésien). On obtiendrait :

$$\text{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} \quad (5.27)$$

Le résultat coïncide avec celui obtenu, si on suppose  $A_t$  constant.

**Remarque 2 :** en présence de réactions chimiques, il faut écrire les équations relatives à chaque constituant, avec le terme de disparition ou d'apparition de constituants (terme puits ou source).

**Remarque 3 :** le lecteur intéressé par les développements de l'approche milieux continus pourra se référer aux références suivantes (Corvisier P., Feidt M., Germain P.) pour la modélisation respective de tuyau ou les aspects généraux. La référence (Borel M.) quant à elle est ciblée sur la modélisation en présence d'ondes de pression et les applications dans le domaine des moteurs thermiques.

**Remarque 4 :** on laisse le soin au lecteur d'étendre le principe de conservation de la matière au principe de conservation des charges électriques ; cela

est fondamental pour les études des phénomènes et systèmes électriques, dont les études thermodynamiques des plasmas, dit quatrième état de la matière (fluide constitué de particules chargés).

#### d) Notions essentielles sur les transferts de matière en mélange

Les paragraphes précédents étaient centrés sur le mouvement d'ensemble de la matière (phénomènes convectifs). On examine ici succinctement la diffusion d'un élément  $i$  (supposé isotrope) par rapport à un repère coïncidant avec le centre de masse ; la densité surfacique de flux massique  $\dot{m}_i$ , s'exprime alors sous la forme de la première loi de Fick.

$$\dot{m}_i = \frac{dm_i}{dt dA_C} = -\rho D_{iM} \overrightarrow{\text{grad} x_i} \quad (5.27)$$

$\rho$ , masse volumique du mélange  $M$ .

$D_{iM}$  est diffusivité massique du constituant  $i$  dans  $M$  (ou coefficient de diffusion)

$\overrightarrow{\text{grad} x_i}$ , gradient de titre massique (dans le cas d'un modèle filaire,  $\frac{\partial x_i}{\partial x}$ ).

**Remarque :** si le mélange est homogène en masse totale ( $\rho = \text{cte}$ ), l'équation (5.27) devient :

$$\dot{m}_i = -D_{iM} \overrightarrow{\text{grad} \rho_i} \quad (5.28)$$

#### Lois de transfert de matière en mélange linéarisée

Pour un système macroscopique, dont la frontière  $A_C$  est homogène avec une concentration en élément  $i$   $x_{iA_C}$ , et le volume de contrôle homogène avec une concentration  $x_i$ , le flux de matière traversant  $A_C$  est linéarisé sous la forme :

$$\dot{m}_i = k_{iM} A_C (x_{iA_C} - x_i) \quad (5.29)$$

$k_{iM}$ , coefficient de transfert surfacique du constituant  $i$  dans le mélange  $M$

$\dot{m}_i$  est positif si  $x_{iA_C} > x_i$  ( $x_i$ , variable interne)

**Remarque 1 :** la relation (5.29) vaut aussi pour un transfert convectif de matière entre une frontière et un fluide en écoulement dont le titre au cœur d'écoulement est  $x_{i\infty}$ :

$$\dot{m}_i = k_{iM} (x_{iA_C} - x_{i\infty}) \quad (5.30)$$

**Remarque 2 :** l'analogie électrique est immédiate et conduit à la loi de Joule bien connue :

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta V}{R_{el}} = K_{el} \Delta V \quad (5.31)$$

avec  $K_{el}$ , conductance électrique inverse de la résistance  $R_{el}$

## 5.3 CONSERVATION DE QUANTITÉS MÉCANIQUES

La dynamique classique a pour objet l'étude du mouvement de corps solides dans l'espace. Ces corps peuvent être indéformables ou déformables. La dynamique classique s'intéresse en premier lieu au mouvement de corps indéformables. Ce cas est considéré dans ce qui suit. On notera de plus que les grandeurs mécaniques sont des grandeurs vectorielles (voir annexe 1).

### 5.3.1 Notion d'effort

L'étude du mouvement de système se fait à l'aide de la dynamique. Un mouvement se produit sous l'effet d'actions mécaniques appelées efforts.

La schématisation usuelle des efforts pour les mouvements de classe  $C^2$  se fait à partir d'un torseur.

Il y a lieu toutefois de distinguer :

- les efforts extérieurs à un système ( $S$ ) qui sont des efforts exercés sur le système ( $S$ ), par un système ( $S'$ ) disjoint de ( $S$ ) ;
- les efforts intérieurs à ( $S$ ) qui sont dus à des actions d'une partie de ( $S$ ), sur d'autres éléments de ( $S$ ).

Les efforts s'exerçant sur le système ( $S$ ) délimité par le domaine ( $D$ ) peuvent être représentés mathématiquement par un champ de vecteurs densité de forces  $\overrightarrow{f(M)}$ .

À ces efforts correspond le torseur  $\{F\}$  dont les éléments de réduction en  $A$  sont :

$$\vec{R} = \int_{(D)} \overrightarrow{f(M)} d(D)$$

la résultante des efforts

$$\overrightarrow{M(A)} = \int_{(D)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f(M)} d(D)$$

le moment résultant en un point  $A$ .

### 5.3.2 Principe fondamental de la dynamique

Nous avons vu que pour un système matériel ( $S$ ), le torseur des efforts extérieurs est représenté par le torseur des efforts exercés sur ( $S$ ) par son complément dans l'Univers.

- Nous admettons que ce torseur est indépendant des observateurs (1<sup>er</sup> principe).
- Le 2<sup>e</sup> principe ou principe fondamental de la dynamique s'énonce comme suit : il existe au moins un repère d'espace, ou repère absolu et une mesure du temps, ou mesure absolue du temps, tels que pour tout système matériel ( $S$ ), le torseur dynamique soit égal au torseur des efforts extérieurs appliqués à ( $S$ ).

### 5.3.3 Théorèmes généraux

Ces théorèmes sont des conséquences immédiates du principe fondamental.

#### a) Théorème de la résultante dynamique

Il définit le mouvement du centre d'inertie :

$$\overline{R_d[G/(R_a)]} = M(S) \cdot \overline{\Gamma[G/(R_a)]} = \vec{R}$$

$M(S)$ , masse du solide ;

$\overline{\Gamma(G)}$ , accélération du centre d'inertie.

Pour un milieu fluide, il est possible de donner une expression du modèle filaire associée à ce théorème :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho A_t \overline{V(G)} dx + \frac{\partial}{\partial x} \rho \overline{V(G)} \cdot V A_t = \vec{R}$$

**Remarque 1 :** le 1<sup>er</sup> théorème fondamental de la dynamique peut aussi s'exprimer à partir de la dérivée temporelle de la quantité de mouvement

$$\overline{M(S) \cdot V(G)}.$$

**Remarque 2 :** dans le cas du modèle filaire, la grandeur mécanique qui apparaît est  $\vec{G} = \rho \overline{V(G)} A_t$ .

#### b) Théorème du moment dynamique

Le deuxième théorème fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\overline{\delta[A, (S)/(R_a)]} = \overline{M(A)}$$

avec  $\vec{\delta}$ , moment dynamique par rapport au point A.

Des deux théorèmes précédents découle le théorème fondamental de la statique.

#### c) Théorème fondamental de la statique

Si un système ( $S$ ) est en équilibre par rapport à un repère absolu, le torseur des forces extérieures s'exerçant sur  $S$  est identiquement nul.

#### d) Théorème de l'action et de la réaction

Soient deux systèmes matériels disjoints ( $S_i$ ) et ( $S_j$ ). Quel que soit  $t$ , les actions mutuelles entre ces deux systèmes sont des torseurs opposés.

Si  $\{F\}_{ij}$  représente le torseur des efforts qu'exerce le système  $(S_i)$  sur le système  $(S_j)$  et  $\{F\}_{ji}$  le torseur des efforts qu'exerce le système  $(S_j)$  sur le système  $(S_i)$ , alors :

$$\{F\}_{ij} + \{F\}_{ji} = 0$$

Il est possible de générer ce résultat par récurrence. On trouve alors que les forces intérieures à un système  $(S)$  forment un torseur nul.

### 5.3.4 Expressions différentielle et intégrale

Les deux lois fondamentales de la dynamique permettent la modélisation générale du mouvement d'un corps indéformable sous forme d'une translation (quantité de mouvement) et de rotation (moment de quantité de mouvement).

On donne à titre d'exemple la forme intégrale relative au second théorème fondamental de la dynamique en projection sur l'axe  $z$  perpendiculaire au plan moyen de l'écoulement :

$$\sum \bar{M}_z(\overrightarrow{F_{ext}}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho (\vec{r} \wedge \vec{v})_z dV_c + \int_{A_c} (\vec{r} \wedge \vec{v})_z \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA_c$$

Cette relation s'applique particulièrement aux turbomachines de type pompes et turbines (chapitre 14).

Pour un corps complexe, par exemple non homogène ou à propriétés variables dans l'espace, il faudra passer par l'intégration.

Pour un fluide, on utilisera des formes locales : cela donne lieu aux équations de Navier-Stokes-Bernoulli (modèle filaire), Euler qui vont apparaître dans la suite du chapitre (paragraphe 5.4.2).

L'équation vectorielle de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible ( $\rho = \text{cte}$ ,  $\mu = \text{cte}$ ) s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \text{grad}P + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

$\frac{D}{Dt}$ , opérateur dérivée particulaire

$\nabla^2$ , opérateur laplacien (voir annexe mathématique).

### 5.3.5 Conclusion

Pour un solide libre, le positionnement dépendant de 6 paramètres, la connaissance du torseur des efforts extérieurs et des conditions initiales suffit pour rechercher les équations régissant le mouvement à partir de la loi fondamentale.

Dans le cas où le solide est soumis à des liaisons, par exemple des actions de contact de glissement, de roulement ou pivotement, il faut tenir compte des équations de liaisons qui schématisent les lois de frottement au niveau des contacts.

On notera toutefois que dans la majorité des traités, la mécanique rapportée est non dissipative. En présence de dissipation, le traitement du problème est plus complexe et nécessite des compléments qui seront abordés dans la suite de l'ouvrage. Un exemple : choc entre solides avec déformation.

## 5.4 CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

Historiquement, la conservation de l'énergie a d'abord été exprimée par le principe d'équivalence de la chaleur et du travail, suite à l'expérience bien connue de Joule qui a mis en évidence la conversion d'énergie mécanique d'agitation en chaleur (dissipation) dans un système fermé. La même expérience a été reconduite avec de l'énergie électrique, sous forme d'effet Joule, précisément.

La généralisation à toute forme d'énergie noble conduit à l'équivalence de ces énergies  $W$ , avec la chaleur  $Q$ , forme d'énergie dégradée. On rappelle que les énergies sont des scalaires.

### 5.4.1 Conservation de l'énergie dans un système fermé – approche systémique

#### a) Cycle thermostatique et conséquences

L'expérience de Joule nous suggère la mise en œuvre d'un cycle thermostatique dans lequel le système part d'un état d'équilibre initial déterminé, pour rejoindre cet état après la transformation thermodynamique : état final identique à l'état initial.

Pour le système thermomécanique, dans cette transformation quasi-statique (suite d'états d'équilibre), l'énergie mécanisable reçue s'écrit :

$$\Delta W = \oint \delta W$$

L'énergie calorifique reçue s'écrit :

$$\Delta Q = \oint \delta Q$$

L'énergie interne n'ayant pas varié, il en résulte :

$$\Delta W + \Delta Q = 0 \quad (5.32)$$

#### ► Théorème de l'état initial et de l'état final

Partant de l'état initial  $I$ , nous rejoignons par un chemin (a) un état d'équilibre intermédiaire du cycle, appelé état final  $F$ , conformément à :

$$\Delta W_{I \rightarrow F}^{(a)}; \Delta Q_{I \rightarrow F}^{(a)}$$

Puis utilisons un chemin le ramenant de  $F$  en  $I$  tel que :

$$\Delta W_{F \rightarrow I}^{(b)} = -\Delta W_{I \rightarrow F}^{(a)}; \Delta Q_{F \rightarrow I}^{(b)} = -\Delta Q_{I \rightarrow F}^{(a)}$$

Compte tenu de la relation (5.32), il vient alors :

$$\Delta U_{I \rightarrow F} = U_F - U_I = \Delta W_{I \rightarrow F} + \Delta Q_{I \rightarrow F}$$

et ce quel que soit le chemin suivi entre les états d'équilibre initial et final, dans la transformation dynamique finie.

➤ Généralisation du principe de conservation de l'énergie pour un système fermé

Le principe de conservation de l'énergie se généralise à toute forme d'énergie noble  $i$  de sorte que :

$$\Delta W_{I \rightarrow F} = \sum_i \Delta W_{iI \rightarrow F} \quad (5.33)$$

Il en résulte :

$$\Delta U_{I \rightarrow F} = \sum_i \Delta W_{iI \rightarrow F} + \Delta Q \quad (5.34)$$

Si le système fermé est en mouvement, il y a lieu de rajouter à l'énergie interne précédente  $U$  l'énergie cinétique  $E_C = \int_{V_i} \frac{1}{2} v^2 dm$ .

Si de plus le système est dans l'environnement d'un champ de pesanteur  $\vec{g}$ , de direction cartésienne  $z$ , on définit alors l'énergie interne spécifique massique totale  $u_t$ , conformément à :

$$u_t = u + \frac{v^2}{2} + gz \quad (5.35)$$

Le lecteur en déduira aisément  $U_t$ , l'extensité relative au système global.

**Remarque :**  $U$  est une fonction potentielle dont les variations sont accessibles à la mesure. Il reste à préciser sa valeur dans l'absolu. Pour un système au repos, l'énergie interne est liée aussi à la matière qui le constitue  $m_o$  ; l'énergie interne associée vaut :  $U_o = m_o c_o^2$  avec  $c_o$ , vitesse de la lumière dans le vide (constante universelle, de l'ordre de 300 000 km/s).

b) Transformation thermodynamique élémentaire quelconque d'un système fermé

Soit la transformation thermodynamique élémentaire de durée  $dt$ , satisfaisant à l'hypothèse d'équilibre local spatio-temporel, il vient alors de façon générale :

$$\frac{dU}{dt} = \overset{o}{W} + \overset{o}{Q} \quad (5.36)$$

$\frac{dU}{dt}$  traduit l'effet capacitif lié à la transformation instationnaire du système thermomécanique. En régime dynamique stationnaire ce terme s'annule.

### 5.4.2 Conservation de l'énergie dans un système ouvert

#### a) Transformation thermodynamique élémentaire quelconque d'un système ouvert

La même démarche que celle du paragraphe 5.4.1.b, avec les mêmes hypothèses, conduit à :

$$dU = \delta W + \delta W_t + \delta Q + \sum_i u_i dm_i \quad (5.37)$$

L'énergie interne spécifique  $u_i$  correspond à l'élément de masse  $dm_i$ , traversant le port  $i$ .

On remarquera de plus qu'à l'énergie mécanique transférée à travers les parois du système  $\delta W$ , il y a lieu d'ajouter  $\delta W_t$ , l'énergie correspondant au transfert de masse  $dm_i$  de l'extérieur dans le système ; le transfert de la masse  $dm_i$ , de volume spécifique  $v_i$  de l'extérieur à pression  $P_{ext}$  vers l'intérieur vaut :

$$\delta W_t = +P_{ext} v_i dm_i \quad (5.38)$$

(Par intégration du travail élémentaire  $\delta w = -PdV$ , entre l'état initial extérieur, puis final extérieur de l'élément de masse considéré).

Avec l'hypothèse d'équilibre local (5.38) devient :

$$\delta W_t = P_i v_i dm_i \quad (5.39)$$

D'où :

$$dU = \delta W + \delta Q + \sum_i h_i dm_i \quad (5.40)$$

En posant  $h_i = u_i + P_i v_i$ , enthalpie spécifique massique du fluide au port  $i$ .

**Remarque 1 :** en divisant par  $dt$  l'équation ci-dessus, on obtient l'équation caractéristique du comportement transitoire du système ouvert thermomécanique.

**Remarque 2 :** la fonction thermodynamique enthalpie introduite ici est caractéristique des systèmes ouverts. Sa définition, comme la transformée de Legendre, d'ordre 1, de la fonction  $U$  par les variables conjuguées  $P, V$  :

$$H = U + PV \quad (5.41)$$

conduit à l'expression différentielle :

$$dH = TdS + VdP \quad (5.42)$$

On voit alors que  $H$  est une fonction d'état caractéristique telle que :

$$H = H(S, P)$$

**Remarque 3 :** l'expression différentielle de  $h$ , particularisée à une transformation isobare, conduit à deux expressions de la chaleur spécifique massique isobare  $c_p$  :



$$c_p = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \quad (5.43)$$

*b) Transformations dynamiques stationnaires  
d'un système thermomécanique ouvert*

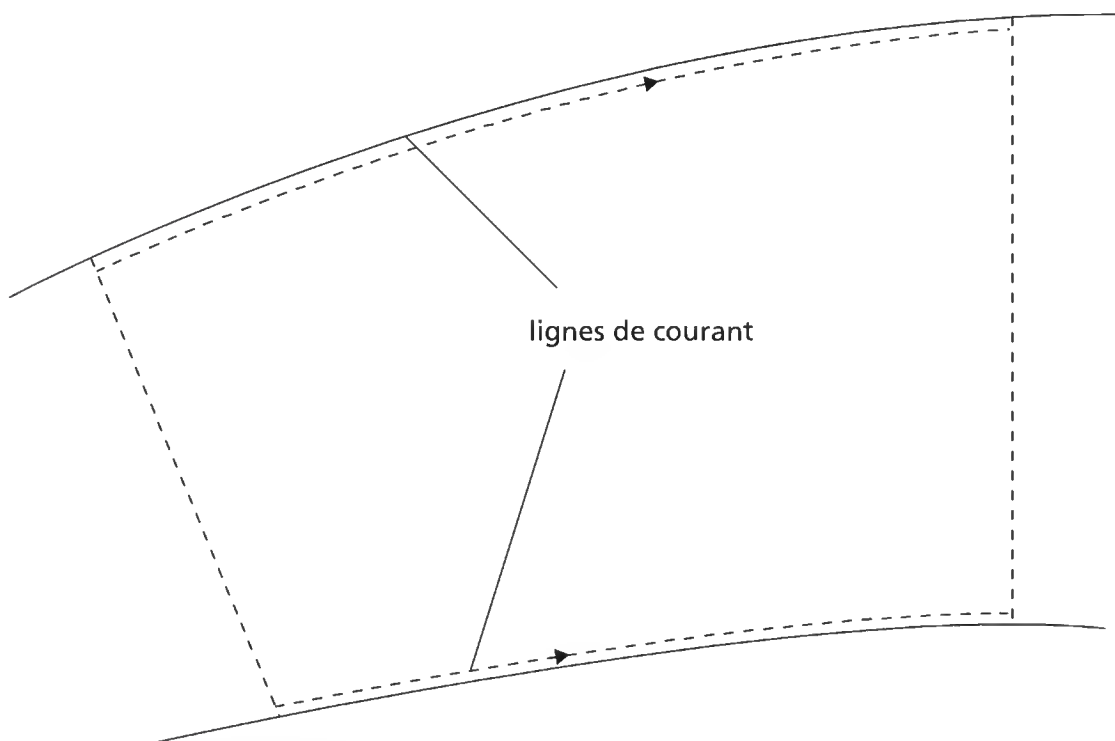
➤ Expression sous forme de bilan (convention de l'ingénieur)

Dans ce cas, on remplace la convention thermodynamique (normale interne) par le fait d'égaliser les entrées du système aux sorties (on compte positivement les énergies sortantes), soit pour un système thermomécanique :

$$\sum h_s \overset{o}{m}_s = \overset{o}{Q} + \overset{o}{W} + \sum h_e \overset{o}{m}_e \quad (5.44)$$

Pour de nombreuses machines industrielles, on ne rencontre par ailleurs qu'une entrée et une sortie, de sorte qu'en l'absence de fuites et de réactions chimiques

$$\overset{o}{m}_s = \overset{o}{m}_e = \overset{o}{m}.$$



**Figure 5.2** Motif élémentaire d'un fluide incompressible parfait en écoulement permanent entre deux lignes de courant (en pointillé, le volume de contrôle)

Il vient alors :

$$h_s - h_e = q + w \quad (5.45)$$

avec :

$$q = \frac{\overset{o}{Q}}{\overset{o}{m}}, \text{ chaleur spécifique massique échangée}$$

$$w = \frac{\overset{o}{W}}{\overset{o}{m}}, \text{ énergie mécanique spécifique massique échangée}$$

► Généralisation aux autres formes d'énergie mécanique

Les deux formes supplémentaires les plus courantes d'énergie mécanique, l'énergie potentielle gravifique et l'énergie cinétique de translation, permettent d'écrire à partir de (5.35, 5.41, 5.44) :

$$\sum_s \left( h_s + \frac{v_s^2}{2} + gz_s \right) \overset{o}{m}_s = \overset{o}{Q} + \overset{o}{W} + \sum_e \left( h_e + \frac{v_e^2}{2} + gz_e \right) \overset{o}{m}_e \quad (5.46)$$

On appelle :

$$\left( h + \frac{v^2}{2} \right), \text{ la dynalpie spécifique massique}$$

$$\left( h + \frac{v^2}{2} + gz \right), \text{ l'enthalpie totale spécifique massique}$$

*Équation de Bernoulli*

On considère alors un écoulement en conduite représenté sur la figure 5.2.

La particularisation de l'équation (5.46) à l'écoulement en régime dynamique stationnaire d'un fluide parfait (sans viscosité) incompressible (ou isovolume :

$\rho = \frac{1}{v} = \text{cte}$ ) dans une conduite indéformable conduit à :

$$u_s + \frac{P_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s = u_e + \frac{P_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e \quad (5.47)$$

en supposant :

$$\overset{o}{Q} = 0, \text{ conduite adiabatique}$$

$$\overset{o}{W} = 0, \text{ conduite passive (ne transmettant pas d'énergie mécanique au fluide).}$$

Si de plus,  $u_s = u_e = u = \text{cte}$  (il suffit pour cela que l'entropie soit constante :  $u(s, v)$  ; transformation réversible), on obtient l'équation de Bernoulli :

$$gz + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \text{cte} \quad (5.48)$$

**Remarque 1 :** ce résultat peut se retrouver par intégration de l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant (Feidt M.)

**Remarque 2 :** pour le fluide parfait incompressible, on peut montrer que la transformation adiabatique réversible coïncide aussi avec une transformation isotherme (mécanique du fluide parfait isotherme).

### Application à un système thermomécanique

Soit un système thermomécanique recevant une puissance mécanique totale  $\dot{W}_t$  donnée par la mesure. Cette puissance n'est pas intégralement transmise au fluide qui circule à travers lui à cause des frottements mécaniques solides  $\dot{W}_{fs}$ , et des frottements mécaniques fluides  $\dot{W}_{ff}$  (ou frottements visqueux  $\dot{W}_\mu$ ) :

$$\dot{W}_t = \dot{W} + \dot{W}_\mu + \dot{W}_{fs} \quad (5.49)$$

On ignorera ici  $\dot{W}_{fs}$ , puissance mécanique dissipée en dehors du volume de contrôle du fluide (hypothèse) ; on supposera par ailleurs la dissipation visqueuse négligée : fluide supposé parfait et isovolume.

Ce cas est représentatif d'une pompe ou d'un ventilateur (voir figure 5.3) qui par ailleurs est supposée adiabatique.

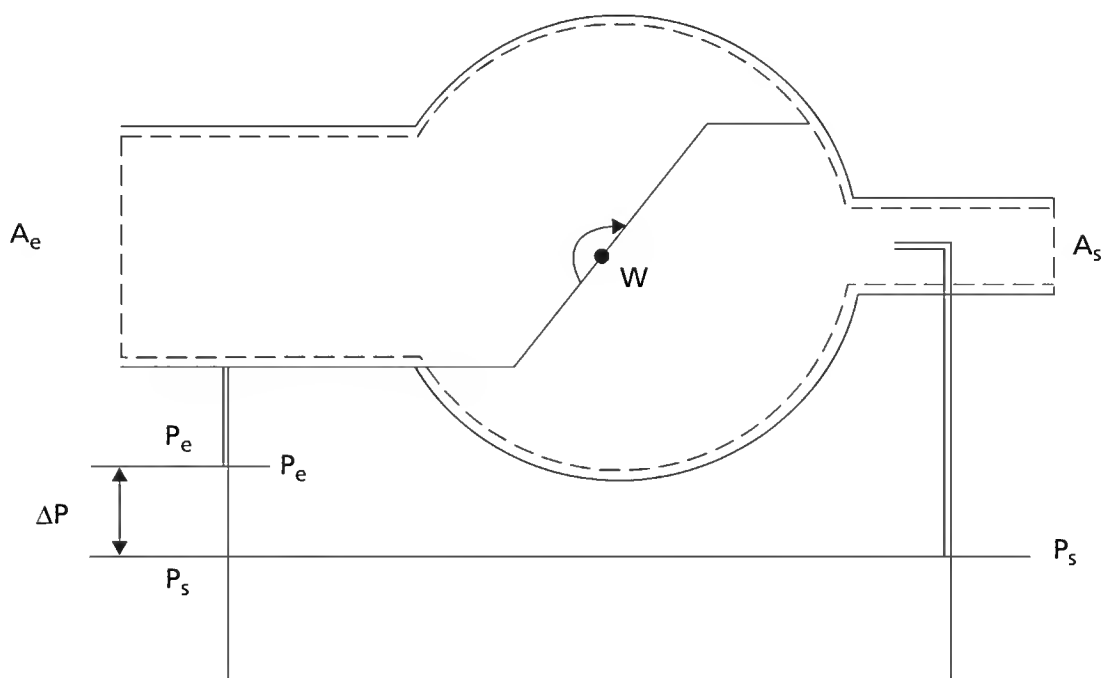


Figure 5.3 Représentation schématique d'une pompe ou d'un ventilateur

L'application de la relation (5.49) dans les conditions de réversibilité ( $s = \text{cte}$ ), avec (5.36) ou  $z_o = z_e$ , conduit à :

$${}^o_w = \left[ \frac{P_s - P_e}{\rho} + \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} \right] {}^o_m \quad (5.50)$$

En définissant la pression d'arrêt par  $P_a = P + \rho \frac{v^2}{2}$ , on voit alors que la mesure de la pression d'arrêt en sortie  $P_{as}$  et de la pression statique en entrée  $P_e$  fournit la vitesse moyenne débitante en entrée  $v_e$  par :

$${}^o_w = \left[ \frac{P_{as} - P_e}{\rho} - \frac{v_e^2}{2} \right] \rho v_e A_e \quad (5.51)$$

On en déduit aisément  ${}^o_m$ .

## 5.5 CONCLUSION

Ce chapitre a mis l'accent sur le premier principe de la thermodynamique, à travers la conservation de la matière, des charges électriques, des quantités mécaniques liées aux premier et deuxième théorèmes fondamentaux de la dynamique. L'illustration qui en a été faite porte surtout sur l'approche systémique et plus particulièrement appliquée aux systèmes thermomécaniques.

La méthodologie proposée est issue de la thermostatique, mais étendue moyennant des précautions précisées (hypothèses d'équilibre locale et temporelle) aux transformations thermodynamiques stationnaires et transitoires abordées.

À partir de là, de nombreuses généralisations sont possibles sous forme :

- d'approche intégrale ;
- d'approche différentielle ;
- de généralisation de l'équation de bilan pour une grandeur physique  $G$  satisfaisant au principe de conservation.

À titre complémentaire, on indique ci-après l'équation différentielle courante de conservation de l'énergie pour un milieu continu quelconque incompressible et à viscosité constante (cas du fluide newtonien) (Feidt M.) :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\text{div} \left( -\lambda \overline{\text{grad} T} \right) + {}^o_q''' + \phi \quad (5.52)$$

$\lambda$ , conductivité thermique du milieu

${}^o_q'''$ , densité volumique de chaleur (source ou puits)

$\phi$ , fonction de dissipation définie positive

Lorsque l'énergie interne peut s'exprimer en fonction de la chaleur spécifique massique à volume constant, et en négligeant les dissipations visqueuses, il vient :

$$\rho \frac{D}{Dt} (c_v T) = -\text{div} \left( -\lambda \overrightarrow{\text{grad} T} \right) + \dot{q}''' \quad (5.53)$$

Il est possible d'en déduire de nombreux cas classiques, qui sont laissés à la sagacité du lecteur.

## BIBLIOGRAPHIE

- BOREL M. *Les phénomènes d'ondes dans les moteurs*, Paris, Éditions Technip, 2000.
- CORVISIER P. *Récapitulatif formel des équations du modèle tuyau*, Rapport Interne, Nancy, juillet 2004.
- FEIDT M. *Thermodynamique et optimisation énergétique des systèmes et procédés*, Paris, Tec et Doc, 1996.
- FEIDT M. *Thermodynamique et optimisation énergétique des systèmes et procédés*, Paris, Tec et Doc, pp. 60-61, 1996.
- GERMAIN P. *Cours de mécanique des milieux continus*, Paris, Masson, 1973.

## Chapitre 6

# Données thermophysiques

### 6.1 RETOUR SUR LA THERMODYNAMIQUE ANALYTIQUE

Les relations thermodynamiques introduites ici sont très utiles d'un point de vue fondamental parce qu'elles établissent des liens entre diverses quantités physiques dont certaines sont accessibles à l'expérience, en particulier les variables intensives.

#### 6.1.1 Les fonctions d'état caractéristiques

##### a) La fonction énergie interne, $U$

Cette fonction dont les variables naturelles sont l'entropie  $S$  et le volume  $V$  caractérise particulièrement les systèmes fermés. C'est un potentiel thermodynamique tel qu'à l'équilibre thermomécanique :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T ; \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -P$$

Le théorème de Schwarz appliqué à ce potentiel conduit à la première relation de Maxwell :

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S}\right)_{S,V} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \quad (6.1)$$

##### b) La fonction enthalpie, $H$

Pour un système ouvert, la fonction d'état caractéristique est l'enthalpie, dont les variables naturelles sont l'entropie  $S$  et la pression  $P$  telles que :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T ; \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = V$$

Le théorème de Schwarz appliqué à ce potentiel conduit à la deuxième relation de Maxwell :

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial P \partial S}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial S \partial P}\right)_{P,S} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \quad (6.2)$$

c) *La fonction énergie libre, F*

Cette fonction thermodynamique caractéristique est déduite de la fonction  $U$ , par la transformée de Legendre d'ordre 1 et les variables conjuguées  $T, S$  :

$$F = U - T.S \quad (6.3)$$

On a déduit à l'aide du premier principe de la thermodynamique l'expression différentielle correspondante :

$$dF = -SdT - PdV \quad (6.4)$$

La fonction  $F$ , encore appelée fonction de Helmholtz, dépend des variables naturelles  $V$  et  $T$ .

On en déduit une troisième relation de Maxwell :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad (6.5)$$

d) *La fonction enthalpie libre, G*

Cette fonction thermodynamique caractéristique est déduite de la fonction  $H$ , par la transformée de Legendre d'ordre 1, et les variables conjuguées  $T, S$  :

$$G = H - T.S \quad (6.6)$$

On en déduit l'expression différentielle correspondante :

$$dG = -SdT + VdP$$

Cette fonction, encore appelée fonction de Gibbs ou enthalpie libre, dépend des variables naturelles  $P, T$  ; cela est remarquable puisque les deux variables sont intensives. On en déduit une quatrième relation de Maxwell pour les systèmes thermomécaniques :

$$\left(-\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad (6.7)$$

**Remarque :** Cette fonction pourra jouer un rôle privilégié, dans l'étude des changements de phase, mais aussi dans l'étude des systèmes physicochimiques.

e) *Fonctions caractéristiques généralisées*

Les fonctions caractéristiques généralisées sont introduites lorsque le système étudié fait intervenir une forme supplémentaire d'énergie échangée avec l'extérieur telle que  $\delta W = XdY$  ( $X$ , variable intensive ;  $Y$ , variable extensive). Il vient alors :

$$dU = TdS - PdV + XdY \quad (6.8)$$

On en déduit aisément :

$$dF = -SdT - PdV + XdY$$

L'enthalpie et l'enthalpie libre généralisée s'en déduisent par :

$$H = U + PV - XY ; G = H - TS$$

Il en résulte des relations de Maxwell généralisées :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_{T,P} = \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_{P,X} ; \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)_{T,P} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial P}\right)_{T,X}$$

### 6.1.2 Intérêt des fonctions caractéristiques

La connaissance des fonctions caractéristiques est fondamentale, car elle permet de calculer une quelconque grandeur du système thermodynamique associé.

En supposant par exemple que  $g(P, T)$ , l'enthalpie libre spécifique du système, soit connue, c'est une fonction qui dépend des deux variables intensives  $P, T$  facilement accessibles à l'expérience.

Cette fonction par ailleurs joue un rôle fondamental lors des changements d'état d'un corps pur, comme il sera précisé dans la suite de l'ouvrage.

On se contente de montrer ici que la connaissance de la fonction caractéristique  $g(P, T)$  permet de rechercher les expressions des autres fonctions thermodynamiques en fonction des mêmes variables, mais aussi les expressions des coefficients thermo-élastiques et calorimétriques.

L'enchaînement des calculs dans ce cas se fait selon le schéma suivant :

$$v(P, T) = \left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_T$$

$$f(P, T) = g(P, T) - P\left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_T$$

$$\alpha = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial P}\right)_{P,T} / \left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_T$$

$$s(P, T) = -\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_P$$

$$h(P, T) = g(P, T) - T\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_P$$

$$u(P, T) = g(P, T) - T\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_P - P\left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_T$$

$$c_p(P, T) = -T\left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2}\right)_{PP}$$



$c_v$  se calcule alors à l'aide de la relation de Mayer généralisée, puis les autres coefficients calorimétriques (4) de façon analogue.

Il est à remarquer ici que nous n'avons pratiqué que par dérivation, la fonction caractéristique étant supposée connue.

**Remarque :** il est possible d'étendre ces relations à plus de deux formes d'énergie ; dans la majorité des applications, la relation (6.8) suffit, à condition que la forme d'énergie rajoutée représente l'énergie physicochimique liée à la matière (potentiel physicochimique généralisé).

## 6.2 FONCTIONS D'ÉTAT DES FLUIDES RÉELS

### 6.2.1 Coefficients calorimétriques

#### a) Définition générale de la chaleur spécifique

La chaleur spécifique massique (ou molaire) d'un système dans une transformation thermodynamique donnée (à deux variables indépendantes ou plus) peut s'écrire :

$$\delta q = c dT \quad (6.9)$$

Elle suppose toutes les variables indépendantes constantes, sauf la température. Les deux cas les plus courants sont ceux du système thermomécanique isochore ( $c_v$ ) ou isobare ( $c_p$ ).

#### b) Coefficients calorimétriques du système thermomécanique

Dans une transformation thermodynamique quelconque d'un système thermomécanique (deux variables indépendantes), l'échange de chaleur élémentaire peut prendre l'une des trois formes suivantes :

$$\delta q = c_v dT + l_T dv$$

$$\delta q = c_p dT + h_T dP$$

$$\delta q = \lambda_v dP + \mu_p dv$$

Les six coefficients spécifiques massiques introduits sont caractéristiques du système. Ils ne sont pas indépendants, du fait de l'existence des différentielles totales pour  $U$ ,  $H$ ,  $S$ . On en déduit en particulier les relations de Clapeyron (voir (6.5) et (6.7)) :

$$l_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v ; \quad h_T = -T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Une autre relation importante est la relation de Mayer généralisée :

$$c_p - c_v = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (6.10)$$

**Remarque :** la connaissance de l'équation d'état d'un corps pur n'est pas suffisante pour connaître les six coefficients calorimétriques ; la connais-

sance expérimentale d'un coefficient ( $c_p$ , ou  $c_v$  ; ou du rapport  $\gamma = c_p / c_v$ ) est nécessaire.

### 6.2.2 Coefficients thermoélastiques

Les coefficients thermoélastiques courants fournissent la variation de volume  $V$ , voire la pression  $P$  (variables liées), en fonction d'une variable indépendante, une seconde variable étant maintenue constante. Ainsi, pour le système thermomécanique, on définit quatre coefficients :

- le coefficient de dilatation volumique  $\alpha$  (système 3D) :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (6.11)$$

Il est possible de définir aussi un coefficient de dilatation surfacique ou linéique ; ce dernier est aussi très utile, et est relié à  $\alpha$  pour un corps homogène isotrope.

- le coefficient d'augmentation de pression  $\beta$  :

$$\beta = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad (6.12)$$

**Remarque :** les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  accessibles à la mesure permettent par (6.5) et (6.7) de remonter à la connaissance de l'entropie.

- le coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$  :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (6.13)$$

- le coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$  :

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \quad (6.14)$$

**Remarque :**  $\chi_T$  et  $\chi_S$  sont reliés par la relation de Reech,  $\chi_T = \chi_S$  ; cette relation est à l'origine de la mesure de  $\gamma$  par la méthode de Clément-Desormes (la mesure de la vitesse de propagation d'une onde acoustique en gaz parfait permet aussi de remonter à la connaissance de  $\gamma$ ).

### 6.2.3 Fonctions d'état des fluides réels

L'expression de ces fonctions sous forme différentielle est une conséquence immédiate des paragraphes (6.2.1) et (6.2.2) définissant les coefficients calorimétriques et thermoélastiques.

## a) Entropie d'un fluide réel

La connaissance des troisième et quatrième relations de Maxwell conduit aux expressions de l'entropie en fonction des variables  $T$  et  $V$  ou  $T$  et  $P$  :

$$dS = \frac{C_v dT}{T} + \beta P dV \quad (6.15)$$

$$dS = \frac{C_p dT}{T} - \alpha V dP \quad (6.16)$$

**Remarque :** la combinaison des relations (6.15) et (6.16) conduit de façon simple à la relation de Mayer généralisée.

## b) Énergie interne d'un fluide réel

Là encore, la combinaison de la définition de l'énergie interne avec celles des paragraphes (6.2.1) et (6.2.2) conduit pour le système thermoélastique à l'expression différentielle de l'énergie interne en fonction des variables  $V$  et  $T$  :

$$dU = C_v dT - P(1 - \beta T) dV \quad (6.17)$$

## ► Particularisation au gaz parfait

Selon la première loi de Joule, l'énergie interne du gaz parfait ne dépend pas de  $V$ , mais uniquement de  $T$  ; l'équation d'état permet de trouver que  $\beta = 1/T$ . Il en résulte bien :

$$dU = C_v dT \quad (6.18)$$

**Remarque 1 :** le lecteur vérifiera aisément que pour le gaz parfait

$$\left( \frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = 0 ; \text{ cette remarque est la base des expériences de Joule.}$$

**Remarque 2 :** un gaz est dit semi-parfait si  $C_v$  est uniquement fonction de la température.

**Remarque 3 :** selon la thermodynamique statistique, au voisinage de l'ambiante,  $C_v$  vaut 12,56 J/(mole.K) pour un gaz monoatomique, 20,93 J/(mole.K) pour un gaz diatomique.

Il est facile d'en déduire les valeurs correspondantes de  $C_p$ , si on particularise la relation de Mayer au gaz parfait (en référence molaire) :

$$C_p - C_v = R \quad (6.19)$$

avec  $R = 8,3145 \text{ J/(mole.K)}$

### c) Enthalpie d'un fluide réel

Une démarche analogue à celle utilisée dans le paragraphe précédent permet d'aboutir à l'expression différentielle de l'enthalpie d'un système thermomécanique, en fonction des variables  $P$  et  $T$  :

$$dH = C_p dT + V(1 - \alpha T) dP \quad (6.20)$$

#### ► Particularisation au cas du gaz parfait

Selon la deuxième loi de Joule, l'enthalpie du gaz parfait ne dépend pas de  $P$ , mais uniquement de  $T$  ; l'équation d'état permet de trouver que  $\alpha = 1/T$ . Il en résulte bien :

$$dH = C_p dT \quad (6.21)$$

**Remarque 1 :** le lecteur vérifiera aisément que pour le gaz parfait

$$\left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = 0.$$

**Remarque 2 :** pour un gaz semi-parfait,  $C_p$  est uniquement fonction de la température.

**Remarque 3 :** l'ensemble des résultats établis dans le paragraphe 6.2.3 est très utile dans la pratique courante ; le lecteur est maintenant à même de les ré-établir simplement en fonction des besoins.

## 6.3 LES DONNÉES THERMODYNAMIQUES

### 6.3.1 Insuffisance de la thermodynamique analytique

La thermodynamique analytique permet de montrer que les notions introduites de chaleur spécifique sont des quantités positives. L'expérience a montré par ailleurs que ces quantités étaient faiblement fonction de la température, dans un voisinage raisonnable de la température ambiante. De plus, les chaleurs spécifiques des corps purs tendent vers une valeur nulle lorsque la température absolue tend vers zéro ; il en est de même des coefficients de dilatation. Il apparaît alors une incompatibilité avec la notion de gaz parfait ou permanent (et la nécessité de changements de phases).

#### a) Entropie du gaz parfait

La même remarque vaut pour l'entropie du gaz parfait : la variation d'entropie entre un état final  $(P_f, T_f)$  et un état initial  $(P_i, T_i)$  s'écrit compte tenu de (6.16) pour une mole (référence molaire) :

$$S_f - S_i = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_p}{T} dT - R \ln \frac{P_f}{P_i}$$

Si  $T_i \rightarrow 0$  Kelvin, le terme intégrale de la relation ci-dessus diverge, quelles que soient les autres variables : en conséquence, le modèle de gaz parfait n'est pas compatible en dessous d'un certain seuil de température (une autre équation d'état s'impose, voire une autre physique : thermodynamique quantique).

### b) Entropie d'un fluide réel

Pour un fluide réel, la variation d'entropie entre l'état final  $(P_f, T_f)$  et l'état initial  $(P_i, T_i)$  s'écrit :

$$S(P_f, T_f) - S(P_i, T_i) = \int_{P_i, T_i}^{P_f, T_f} \frac{C_p dT}{T} - \int_{P_i, T_i}^{P_f, T_f} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP \quad (6.22)$$

Cette relation montre que si on choisit l'état initial comme état de référence  $(P_o, T_o)$ , le calcul de l'entropie dans ces conditions quelconques  $(S, T)$  se fait à une constante près,  $S(P_o, T_o)$ .

**Remarque :** le calcul de l'entropie à une constante près n'est pas gênant, si on cherche une variation ( $\Delta S$ ) ; mais il y a difficulté pour la détermination d'une énergie libre, ou d'une enthalpie libre.

### 6.3.2 Postulat de Nernst (troisième principe)

L'état de référence choisi correspond à la température limite de 0 Kelvin, et ce quelle que soit la pression.

La relation (6.22) permet alors d'écrire :

$$S(P, T) - S_o(P_o, T_o) = \int_{P_o, T_o}^{P, T} \frac{C_p dT}{T} - \int_{P_o, T_o}^{P, T} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP \quad (6.23)$$

La succession d'états d'équilibre choisie s'appuie sur une première transformation isobare à  $P_o$  suivie d'une transformation isotherme à  $T$ .

#### a) Énoncé du postulat

L'entropie de tous les corps chimiquement purs tend vers une valeur limite finie  $S_o$ , lorsque la température tend vers 0 Kelvin ; cette valeur limite ne dépend pas de la pression  $P_o$  (ni de l'état allotropique du corps).

#### ► Convention de Planck

La valeur finie de l'entropie de tous les corps lorsque la température tend vers 0 K est supposée de limite nulle.

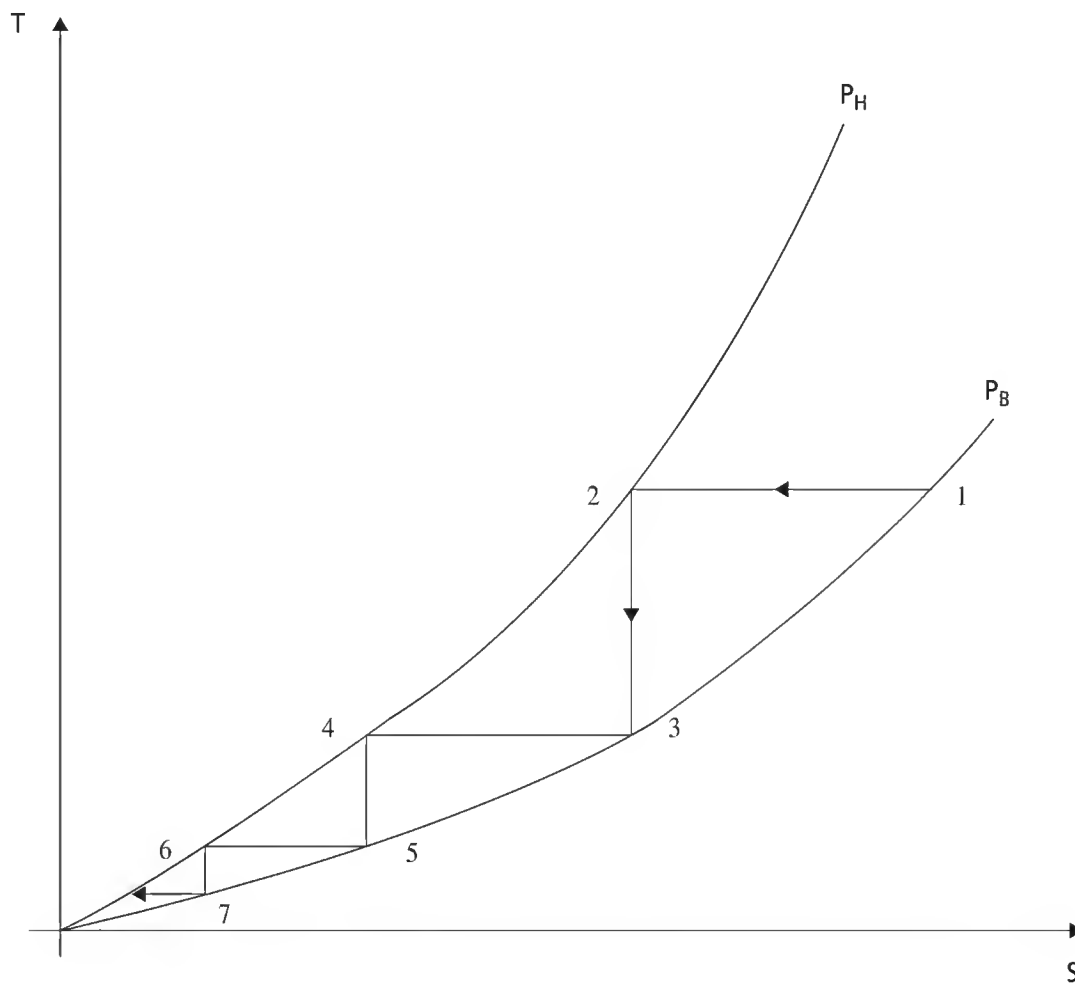
**Remarque :** l'entropie d'un composé est égale à la somme des entropies des composants, lorsque la température tend vers 0 Kelvin.

### b) Impossibilité d'atteindre la température de 0 Kelvin

Le postulat précédent permet d'envisager la connaissance absolue de l'entropie, mais aucune confirmation physique n'est possible, vu l'impossibilité expérimentale d'atteindre le 0 Kelvin (même si de très basses températures sont atteignables dont des conditions très spécifiques en laboratoire (Feidt M.)).

La figure 6.1 représente dans le diagramme entropique, pour un fluide satisfaisant au postulat de Nernst, une succession de compressions isothermes et de détente isentropiques entre les pressions haute  $P_H$  et basse  $P_B$ .

On voit qu'il est impossible d'atteindre le 0 Kelvin en un nombre fini de transformations alternées.



**Figure 6.1** Diagramme entropique représentant la suite des transformations alternées (isotherme, isentropique) en vue d'atteindre 0 Kelvin

**Remarque :** la conclusion reste inchangée, si les transformations sont réelles (irréversibles), ou si la référence entropique  $S_0$  diffère de 0 à 0 Kelvin.

### 6.3.3 Les données thermophysiques des corps purs

Le paragraphe 6.3.1 a montré que contrairement au développement réalisé en 6.1.2, la caractérisation des propriétés thermodynamiques d'un corps pur n'est pas aussi immédiate que le laisse paraître la définition des fonctions caractéristiques, qui ne sont pas disponibles *a priori*.

Aussi, on procède généralement à partir de mesures de propriétés thermodynamiques non quelconques introduites plus particulièrement aux paragraphes 6.2.1 et 6.2.2. ; l'inconvénient est qu'il apparaît des intégrations (et non des dérivations comme en 6.1.2). De plus, pour des raisons d'accessibilité à la mesure, les fonctions thermodynamiques recherchées ne sont plus caractéristiques.

#### a) Méthodologie courante

Dans le cas général, le calcul des propriétés thermodynamiques d'un corps pur compressible est accessible à partir :

- de l'équation liant  $P, v, T$  (ou  $P, \rho, T$  ; on rappelle ici que  $\rho v = 1$ ) : équation d'état du corps pur ;
- d'une équation pour la chaleur spécifique à faible masse volumique (limite du gaz parfait), souvent notée  $C_v^o(T)$ .

**Remarque 1 :** deux informations initiales sont donc nécessaires à la thermodynamique des corps purs.

**Remarque 2 :** on remarquera que couramment, pour les substances réelles, la littérature fournit un ajustement des données  $(P, \rho, T)$  sous forme d'une équation ou d'un ensemble d'équations sur des domaines connexes ; l'histoire de la thermodynamique veut que le gaz parfait (limite d'un gaz réel lorsque la masse volumique est faible :  $\rho \rightarrow 0$ ) satisfait l'équation  $P = \rho r T$ , conformément aux lois de Mariotte (1676 :  $T = \text{cte}$ ), Charles (1787 :  $V = \text{cte}$ ), Gay-Lussac (1802 :  $P = \text{cte}$ ). Pour un fluide réel, on aura :

$$P = \rho r T + f(\rho, T) \quad (6.24)$$

$r = R / M$ , constante du gaz parfait en référence massique

$f(\rho, T)$ , fonction corrective tendant vers zéro avec  $\rho \rightarrow 0 \forall T$

La forme adéquate de l'énergie interne est exprimée en fonction des variables  $(T, v)$  :

$$du = c_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv \quad (6.25)$$

En se rappelant que :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - P \quad (6.26)$$

et (6.25) en intégrant d'un état de référence à  $T_{ref}$ , associé à  $u_{ref}$ , il vient :

$$u = \int_{T_{ref}}^T C_v^o(T) dT + \int_o^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \left[ P - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho} \right] d\rho + u_{ref} \quad (6.27)$$

**Remarque 1 :** le passage de la variable  $v$  à la variable  $\rho$  ( $dv = -d\rho / \rho^2$ ) rend compte par une borne finie ( $\rho = o$ ), de la limite correspondant au gaz parfait.

**Remarque 2 :** le choix de l'état de référence est fait très souvent de sorte qu'il correspond à l'état liquide saturé, à une certaine valeur de la température et, en conséquence, de la pression ; pour cet état, l'enthalpie et l'entropie spécifiques sont choisies nulles.

L'entropie se détermine à partir de :

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{P}{T} dv \quad (6.28)$$

Par combinaison avec (6.25) et (6.26), il vient :

$$ds = \frac{C_v dT}{T} - \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho} d\rho \quad (6.29)$$

Soit, par le même mode d'intégration que pour  $u$  :

$$s = \int_{T_{ref}}^T \frac{C_v^o(T)}{T} dT - r \ln \rho + \int_o^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \left[ \rho r - \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho} \right] d\rho + s_{ref} \quad (6.30)$$

**Remarque 1 :** la forme choisie pour l'intégrale restitue bien le résultat attendu pour le gaz parfait si  $\rho \rightarrow o$ .

Connaissant les valeurs de  $P$ ,  $u$ ,  $s$  à  $T$  et  $\rho$  donnés, il est alors facile d'en déduire  $h$ ,  $f$ ,  $g$ .

**Remarque 2 :** les points d'équilibre de phases sont ceux pour lesquels à même valeur de ( $T$  et  $P$ ), correspondent des valeurs identiques du potentiel physicochimique  $\mu$  ; l'obtention de ces résultats étant un peu longue, on préfère généralement disposer des caractéristiques du changement de phase sous forme d'une équation reliant la pression à la température (voir ci-après) soit sous forme analytique, soit sous forme ajustée ; on y rajoute la masse volumique de la phase dense à saturation.

### b) Changements de phases d'un corps pur

L'équation d'état reliant  $P$ ,  $v$ ,  $T$  pour un corps pur se présente sous forme d'une surface caractéristique des états d'équilibre du corps considéré dans l'espace à trois dimensions associé. Cette surface rend compte des trois formes physiques diffé-



rentes (solide, liquide, vapeur) du corps, si on ne considère pas la possibilité de polymorphisme.

La surface caractéristique présente des domaines cylindriques (surfaces réglées), sous forme de segments isothermes et isobares parallèles à l'axe des volumes et s'appuyant sur des courbes remarquables ; les surfaces enfermées par ces courbes sont diphasiques (biphasiques). Ces courbes sont appelées courbes de saturation.

Les diagrammes de la figure 6.2 représentent respectivement la projection dans le plan  $P, v$  (Figure 6.2.a), puis dans le plan  $T, v$  (Figure 6.2.b) des courbes de saturation pour le changement de phase liquide-vapeur d'un corps pur.

L'aire enfermée sous les courbes de saturation liquide et vapeur et la ligne triple représentent l'ensemble des états où on rencontre simultanément liquide et vapeur (domaine dit de la vapeur saturée).

Au-dessous de la ligne triple, se trouvent les domaines de changement de phase solide-liquide, solide-vapeur. Au-dessus du point  $K$  (isotherme critique  $T_K$ , ou isobare critique  $P_K$ ), il n'y a plus de changement de phase ; le fluide est dit supercritique.

Les mêmes phénomènes peuvent être visualisés en projection dans le plan des variables intensives  $P, T$  (Figure 6.3.).

Les divers domaines solide  $S$ , liquide  $L$ , vapeur  $V$  sont représentés sur la figure ; ils sont séparés par trois courbes d'équilibre  $s, l, v$ , rendant compte respectivement des trois changements de phase fondamentaux :

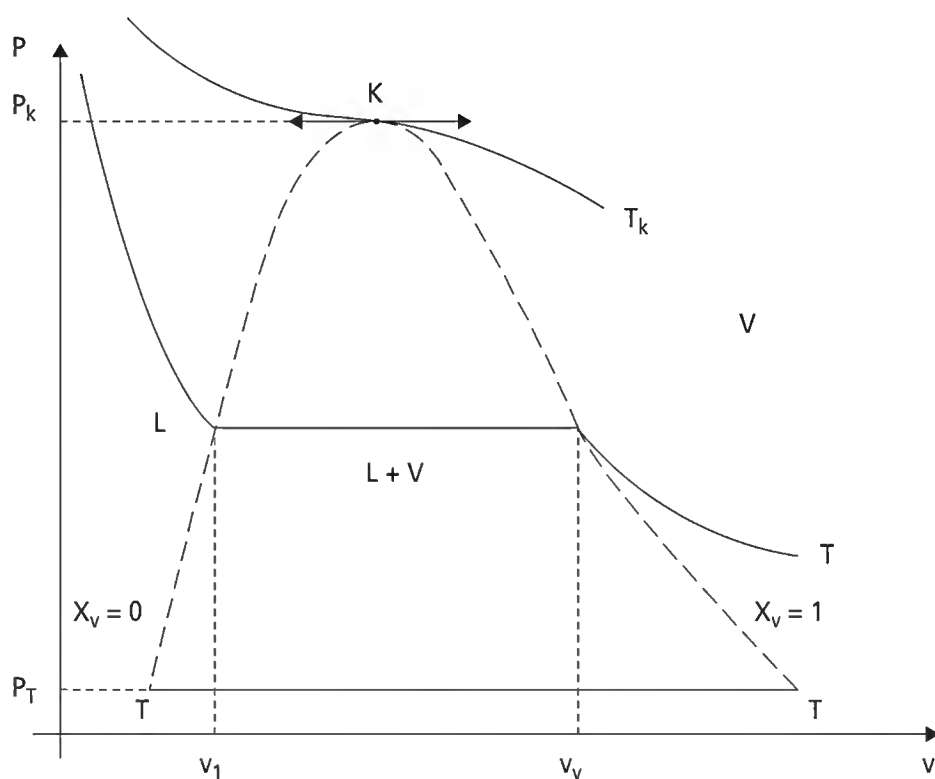
- $l$ , solidification ou fusion ;
- $v$ , vaporisation ou liquéfaction (condensation) ;
- $s$ , sublimation ou sublimation inverse.

Seule la courbe  $v$  est limitée par les points  $T$  et  $K$  ; le point  $T$  ou triple est commun aux trois courbes de changement d'état. On peut montrer à l'aide de la règle des phases qu'il représente un état d'équilibre invariant, avec présence simultanée des trois phases : le point  $(P_T, T_T)$  est une caractéristique intrinsèque d'un corps pur.

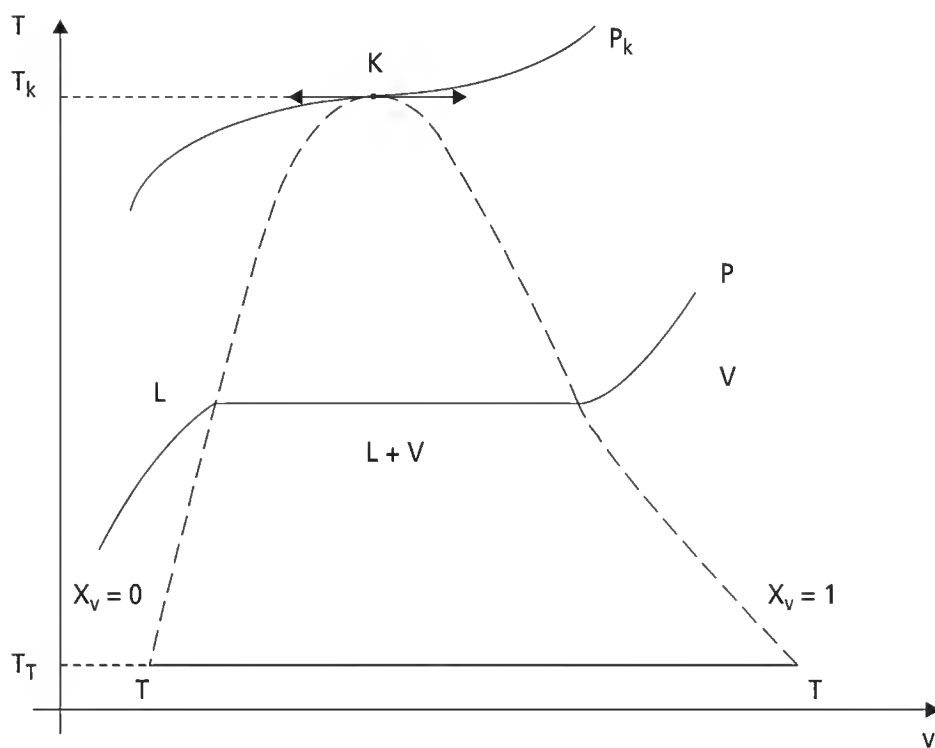
**Remarque 1 :** dans la représentation en diagramme  $P, T$ , à chaque point d'une courbe d'un changement de phases, correspond une infinité d'états diphasiques ; ceux-ci apparaissent clairement sur les figures 6.2.

**Remarque 2 :** les trois courbes de changement de phase ont en général une pente positive dans le diagramme  $(P, T)$ , la pente de la courbe de sublimation étant supérieure à celle de vaporisation au point triple. Parmi les corps purs ayant une pente négative pour la courbe de fusion, on note l'eau dont le point triple  $T$  a pour coordonnées (273,16 K ou 0,01 °C et 4,58 mm de Hg) et le point critique  $K$  (374 °C, 221 atmosphères).

**Remarque 3 :** les courbes de solidification  $l$  et sublimation  $s$  sont prolongées respectivement vers les hautes (basses) pressions et basse température en pointillé, vu l'impossibilité de confirmation expérimentale.



a)



b)

**Figure 6.2** Changement de phases liquide-vapeur d'un corps pur :  
 a) projection dans le plan  $P, v$ ; b) projection dans le plan  $T, v$

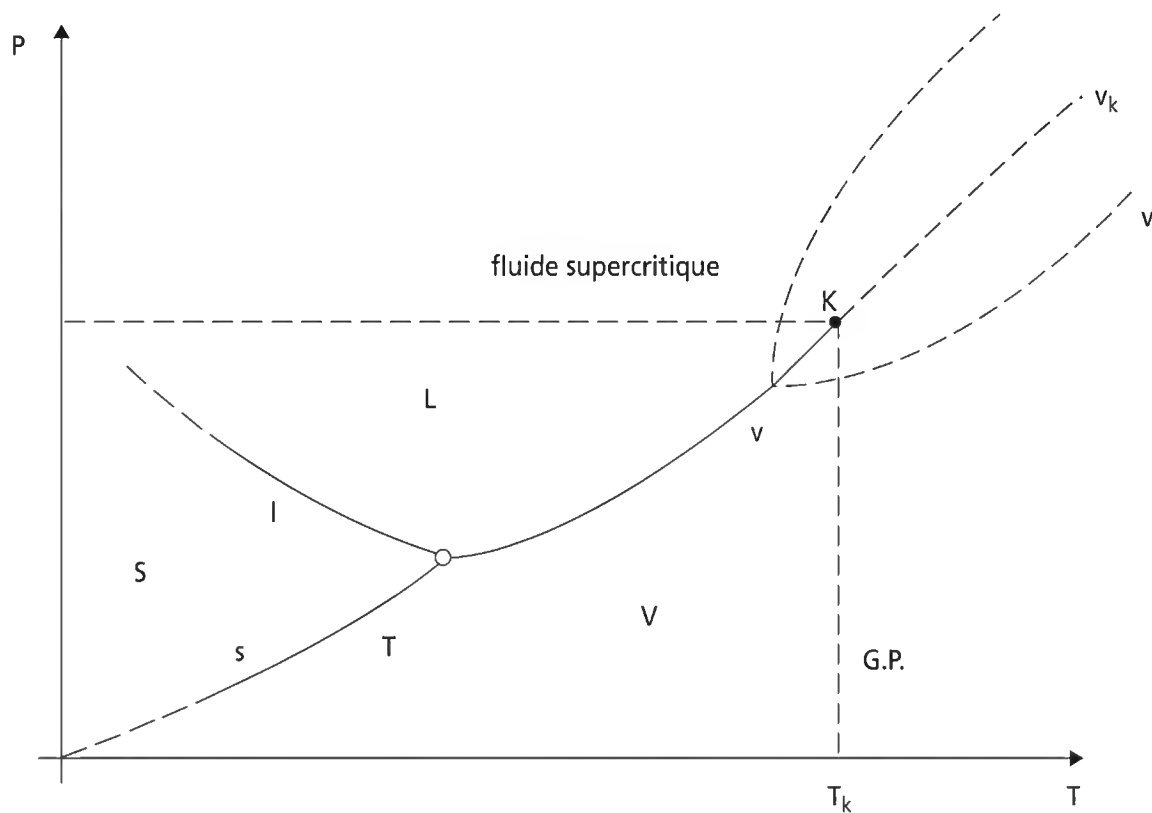


Figure 6.3 Changements de phases d'un corps pur dans le diagramme pression température

### ➤ Règle des phases

Lorsque plusieurs corps sont présents dans un certain nombre de phases, et que les variables intensives satisfont aux conditions d'équilibre physique et chimique, il existe un ensemble d'états d'équilibre possibles.

La variance  $v$ , dans l'ensemble des états d'équilibre possibles, désigne le nombre de paramètres intensifs pouvant varier arbitrairement tout en conservant l'état du système : à savoir le nombre de phases en présence, le nombre de constituants et les conditions d'équilibre physique et chimique.

La règle des phases ou règle de Gibbs, permet de déterminer la variance d'un système en exprimant la différence entre le nombre total des paramètres intensifs fixant l'état de chacune des phases et le nombre de relations existant entre ces paramètres du fait des conditions d'équilibre entre les phases.

Les paramètres qui définissent l'équilibre sont  $(n + c.\phi)$  :

- $n$  facteurs physiques ; en général  $n = 2$  ( $P, T$ ) ;
- $c.\phi$  fractions molaires (ou toutes quantités équivalentes) des  $C$  constituants, dans les  $\phi$  phases, qui définissent la composition de chaque phase.

Les relations existant entre ces paramètres sont :

- $\phi$  équations exprimant que dans chaque phase, la somme des fractions molaires vaut l'unité ;

–  $c \cdot (\phi - 1)$  équations, exprimant que pour chacun des  $C$  constituants, le potentiel chimique est identique dans les  $\phi$  phases en équilibre ;

–  $r$  relations tenant compte des équilibres chimiques entre les constituants.

La variance en résulte sous la forme :

$$v = (C - r) + n - \phi \quad (6.31)$$

Cette règle établie dans le cas d'un mélange réactifs à  $(C - r)$  constituants indépendants, reste vraie pour les équilibres physiques en discussion ci-dessus ( $r = 0$ ), et aussi pour le corps pur  $C = 1$  ; elle justifie pourquoi dans le domaine diphasique, la variance est unitaire pour le corps (une variable indépendante).

**Remarque :** une application importante de la règle des phases sera illustrée pour les systèmes binaires (deux composants), voire ternaire (trois composants) ; cela est capital pour les systèmes physicochimiques (absorption ; adsorption), et aussi en physique des matériaux (métallurgie), que nous aborderons plus loin.

### ► Changements d'états de première espèce

#### *Transitions de phase de première espèce et d'ordre supérieur*

La règle des phases correspond au critère associé aux transitions de phases de première espèce pour les systèmes multicomposants. Elle va être ici utilisée pour le corps pur (composant unique), mais en considérant une transition d'ordre quelconque.

#### *Transition de phases du premier ordre*

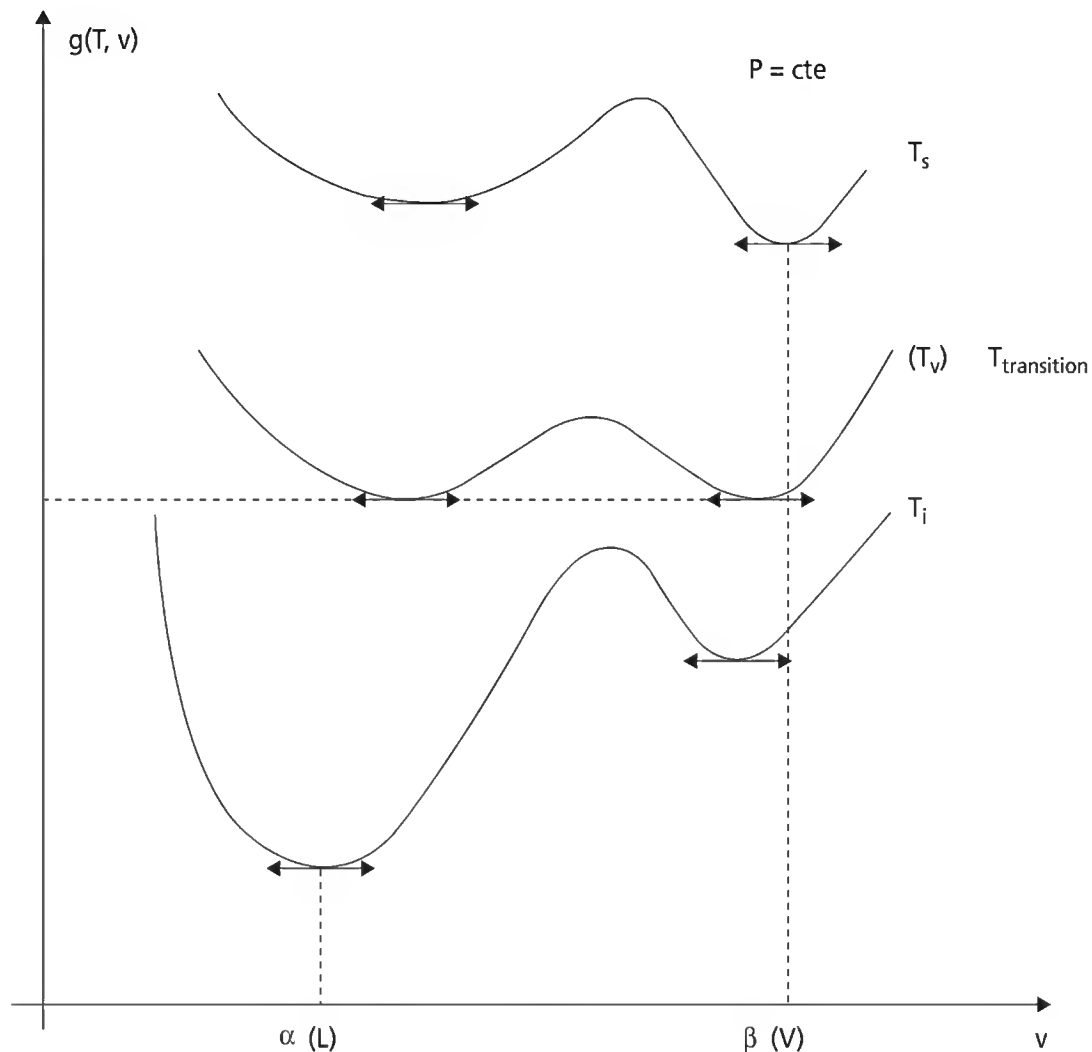
La figure 6.4 représente l'évolution pour un corps pur de la fonction enthalpie libre spécifique  $g(T, v)$  pour diverses valeurs croissantes de la température, à une pression  $P$  donnée.

Il apparaît sur cette figure deux minima sur la même isotherme pour une valeur imposée de la pression ; le minimum minimorum de  $g$  correspond à l'état physique stable du système (état  $\alpha$  pour  $T_i$  ; état  $\beta$  pour  $T_s$ ). La transition de phases se produit à la température de transition ( $T_v$ ) où les deux phases sont en équilibre monovariant :  $T$  transition ( $P$ ).

La transition de phase de première espèce se produit en des points différents de l'espace thermodynamique : discontinuité des volumes et de l'entropie ou des dérivées premières de la fonction d'état (ici  $g$  à  $T$  ou  $P$  imposés) ; il en est de même pour les fonctions d'état  $u, h, f$ .

#### *Transitions de phase d'ordre 2 ou supérieur*

Dans ce cas, l'équilibre est toujours monovariant, mais  $g(T, P)$  et ses dérivées premières  $v(T, P)$ ,  $s(T, P)$  sont aussi continues ; la discontinuité n'apparaît que sur les dérivées secondes et d'ordre supérieur à 2.



**Figure 6.4** Variation de  $g$ , enthalpie libre spécifique d'un corps pur, paramétrée en température  $T$  et pour une valeur de la pression imposée

Les changements d'états de seconde espèce ne seront pas ou peu abordés dans les développements qui suivent, mais ils jouent un rôle fondamental dans :

- les transformations ordre-désordre dans les alliages métalliques binaires ;
- les transitions magnétiques : passage de l'état ferromagnétique à l'état paramagnétique (point et température de Curie) ; passage de l'état antiferromagnétique ou ferrimagnétique à l'état paramagnétique (point de Neel) ;
- passage d'un métal de l'état supraconducteur à l'état conducteur en l'absence de champ magnétique ;
- les transformations de l'hélium liquide : propriétés étranges de l'hélium liquide II.

Le lecteur intéressé pourra consulter sur ce sujet le livre de Papon P. et Leblond J. (Papon P., Leblond J.) ; il y trouvera aussi une introduction sur la nucléation, phénomène important dans la connaissance des irréversibilités de transition, mais qui sort du champ de cet ouvrage.

### ► Chaleur latente de changement de phases

Le changement de phases s'effectue de façon idéale, dans les conditions d'équilibre et par conséquent réversiblement pour les conditions de température  $T$  et pression  $P$  correspondantes ; la variation d'enthalpie associée à la transformation de la phase  $\alpha$  vers la phase  $\beta$  est alors la chaleur latente de changement de phase  $l_{\alpha\beta}$  :

$$l_{\alpha\beta}(T \text{ ou } P) = \Delta h_{\alpha\beta} \quad (6.32)$$

La transformation s'effectuant à pression et température imposées, on accède aussi à la variation d'entropie du changement de phase :

$$s_{\beta} - s_{\alpha} = \Delta s_{\alpha\beta} = \frac{\Delta h_{\alpha\beta}}{T} \quad (6.33)$$

**Remarque :** la relation (6.33) ne permet d'accéder qu'à un accroissement de l'entropie ; il y a donc lieu de préciser un état de référence, pour obtenir une entropie : généralement l'état de référence est l'état liquide saturé.

### ► Équation de Clapeyron

Conformément à la figure 6.3, il existe une relation liant  $P$ ,  $T$  le long des courbes d'équilibre (monovariant) pour les changements de phase de première espèce.

En supposant toujours la réversibilité du changement de phases (les phénomènes de hors équilibre sont ignorés : pas de surchauffe, sous-refroidissement, surfusion... ; il n'est pas toujours possible d'ignorer ces phénomènes, par exemple dans le processus de trempage en métallurgie), l'égalité des potentiels physico-chimiques  $g_{\alpha}(T, p) = g_{\beta}(T, p)$  conduit le long de la courbe d'équilibre correspondante à :

$$dg_{\alpha}(dT, dP) = dg_{\beta}(dT, dP) \quad (6.34)$$

Il vient alors :

$$-s_{\alpha}dT + v_{\alpha}dP = -s_{\beta}dT + v_{\beta}dP \quad (6.35)$$

En combinant les relations (6.32), (6.33), (6.35), il vient :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l_{\alpha\beta}}{T(v_{\beta} - v_{\alpha})} \quad (6.36)$$

La relation (6.36) est l'expression générale de l'équation de Clapeyron. Elle est préconisée pour les changements de phases fusion et solidification.

Dans les cas de la vaporisation et de la sublimation (et les transformations réciproques), cette équation se simplifie, vu que le volume de la phase vapeur  $v_v$  est très grand, par rapport à ceux de la phase liquide ou solide :

$$\frac{dP}{dT} \approx \frac{l_{\alpha v}}{Tv_v} \quad (6.37)$$

Si de plus la vapeur est considérée comme un gaz parfait ( $Pv = rT$ ) de volume spécifique  $v_v = v$ , il vient :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l_{\alpha v}}{rT^2} \quad (6.38)$$

Dans l'hypothèse où  $l_{\alpha\beta}$  est supposée indépendante de  $T$  (par exemple domaine restreint de température ou loin du point critique  $K$ ), l'intégration fournit :

$$\ln \frac{P}{P_{ref}} = -\frac{l_{\alpha v}}{r} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \quad (6.39)$$

On retrouve ici la forme des courbes d'équilibre due à Rankine :

$$\ln P = A - \frac{B}{T} \quad (6.40)$$

### c) Mélange de corps purs sans réaction chimique

Tous les mélanges étudiés ci-après sont supposés homogènes.

#### ► Mélange de gaz parfaits

On rappelle ici que le modèle du gaz parfait suppose un ensemble de molécules (sphères) rigides et sans interactions.

Aussi, l'énergie interne d'une assemblée (mélange) de  $i$  espèces de gaz parfaits satisfait à l'additivité des extensivités. Sur la base massique, il vient :

$$U = \sum_i m_i u_i(T) = m_i u_{i,ref} + m_i \int_{T_{ref}}^T c_{v_i}(T) dT$$

Sachant que la masse totale du mélange  $m = \sum_i m_i$ , on en déduit l'énergie interne spécifique massique  $u$  du mélange :

$$u = \sum_i x_i \left[ u_{i,ref} + \int_{T_{ref}}^T c_{v_i}(T) dT \right] \quad (6.41)$$

L'entropie du mélange  $S$  se détermine par la même méthode, à partir de l'entropie d'une espèce  $i$  :

$$S_i = m_i \left[ s_{i,ref} + \int_{T_{ref}}^T \frac{c_{v_i}(T)}{T} dT + r \ln \left( \frac{V}{m_i} \cdot \frac{m_{ref}}{V_{ref}} \right) \right]$$

D'où :

$$S = \sum_i m_i \left[ s_{i,ref} + \int_{T_{ref}}^T \frac{c_{v_i}(T)}{T} dT - r \ln \frac{m_i}{m_{ref}} \right] + mr \ln \frac{V}{V_{ref}}$$



En posant :

$$S_{ref} = \sum_i m_i s_{iref} = m s_{ref}$$

$c_v(T) = \sum_i x_i \cdot c_{v_i}(T)$ , chaleur spécifique massique du mélange.

Il vient pour l'entropie spécifique massique  $s$  en choisissant  $m_{ref} = m$  :

$$s = s_{ref} + \int_{T_{ref}}^T \frac{c_v(T)}{T} dT + r \ln \frac{V}{V_{ref}} - r \sum_i x_i \ln x_i \quad (6.42)$$

Le dernier terme de l'équation (6.42) représente l'entropie de mélange de l'ensemble des gaz parfaits ; il correspond à l'irréversibilité associée au processus de mélangeage.

Les fonctions d'état dépendent par les  $x_i$  de la composition du mélange.

#### ► Mélange de corps purs réels, sans réaction chimique

Si les constituants du mélange sont des corps réels, même en l'absence de réaction chimique, les constituants peuvent interagir entre eux (liaisons physiques).

Il apparaît alors des valeurs de mélange pour les fonctions thermodynamiques, telles que  $u$ ,  $h$ ,  $s$ ,  $f$ ,  $g$  ; ainsi dans le cas de l'entropie, en plus de l'entropie de mélangeage, il y a lieu d'ajouter l'entropie de mélange :

$$\Delta S_{mel} = \sum_i m_i \Delta s_{imel} = m \Delta s_{mel}$$

**Remarque :** ce cas s'applique aux variétés isotropiques par exemple. Se référer pour plus de compléments à (Sedille M.).

### 6.3.4 Mélanges de corps purs avec réaction chimique

Ne sont pas reprises ici les notions relatives à la conservation de la matière dans les réactions chimiques (voir paragraphe 5.2.1.b). On propose de compléter par la considération de l'aspect énergétique des réactions chimiques ; deux notions essentielles vont alors être introduites :

- la chaleur de réaction, essentielle en thermochimie, mais aussi en combustion ;
- l'énergie de formation d'un corps composé (par opposition au corps simple).

On considérera dans le développement qui suit que les réactions s'effectuent en phase homogène, et plus généralement en phase gazeuse (cas très usuel).

#### a) Chaleur de réaction

Une réaction chimique est une transformation thermodynamique particulière qui, sauf cas particulier des réactions équilibrées, fait intervenir des produits initiaux ou réactifs  $R$ , pour aboutir à des produits finaux  $P$  (voir paragraphe 5.2.1.b).



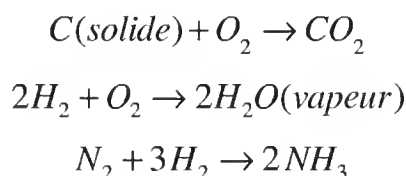
Selon les habitudes de la thermochimie et sur une base molaire, on a vu que la variation élémentaire du nombre de moles  $N_i$  d'un constituant  $i$  ( $R$  ou  $P$ ) pendant  $dt$  était reliée au degré d'avancement de la réaction :

$$\frac{dN_i}{\nu_i} = d\zeta \quad (6.43)$$

avec  $N = \sum_i N_i$ , nombre total de moles qui peut être constant ou variable, ce qui aura des conséquences examinées ci-après.

**Remarque :**  $m = \sum_i N_i M_i$ , la masse totale est par contre une constante.

Exemple :



Dans les exemples ci-dessus, on note que les réactions se font essentiellement en phase gazeuse ; la première réaction conserve le nombre de moles de la phase gaz ; la seconde diminue ce nombre, comme la troisième.

Les transformations thermodynamiques accompagnant une réaction chimique peuvent être variées. Mais, en pratique, elles prennent deux formes essentielles :

- soit d'une réaction isobare (variables  $P, T, \zeta$ ) : système réactif ouvert ;
- soit d'une réaction isochore (variables  $V, T, \zeta$ ) : système réactif fermé.

Dans ces deux configurations, la réaction s'accompagne d'une chaleur de réaction  $Q_r$  (respectivement  $Q_{rp}$ ,  $Q_{rv}$ ). Le plus souvent, la convention thermochimique rejoint la convention thermodynamique ; la chaleur de réaction est négative pour une réaction exothermique et positive pour une réaction endothermique, avec un avancement  $\zeta$  égal à 1 dans les conditions de la réaction ( $T, P$  ou  $V$ ) complète.

#### ► Chaleur de réaction isobare $Q_{rp}$

Cette chaleur est accessible à partir de l'expression de la chaleur élémentaire :

$$\delta Q = C_p dT + h_T dP + Q_r d\zeta \quad (6.44)$$

La transformation étant supposée isotherme et isobare,  $Q_{rp}$  représente la chaleur que reçoit le système à l'instant  $t$ , pour maintenir la température constante à  $P$  donné,  $Q_{rp}(P, T, \zeta)$ . Si on admet que  $Q_{rp}$  est indépendant du degré d'avancement de la réaction, sa valeur moyenne se confond avec la valeur instantanée  $Q_{rp}(P, T)$ . Il vient alors en référence molaire :

$$Q_{rp} = \Delta H_r = \sum_i \nu_i h_i \quad (6.45)$$

$$\Delta H_r = H_p - H_R$$

avec :

$$h_i(P, T) = h_{i,ref}(T) + \Delta h_{imel}$$

$$h_{i,ref}(T) = h_i^o(T) + \Delta h_i(P, T)$$

$$h_i^o(T) = h_{fi}^o(T_o) + \int_{T_o}^T C_{p,i}^o dT$$

$$\Delta h_i(P, T) = h_{i,ref}(P, T) - h_i(P, T)_{G.P.}$$

L'état  $^o$  représente l'état standard à la pression atmosphérique ( $P_o = 101325 \text{ Pa}$ ),  $\Delta h_i(P, T)$  l'écart enthalpique du composant  $i$  dans l'état de référence  $P, T$  par rapport au gaz parfait G.P.

$h_{fi}^o(T_o)$ , l'enthalpie de formation du composant  $i$  dans l'état standard  $P_o, T_o = 298,15 \text{ K}$ .

$C_{p,i}^o$ , chaleur spécifique molaire du gaz parfait  $i$  dans l'état standard ;

L'expression (6.45) peut s'écrire :

$$\Delta H_r = \Delta H^o(T) + \sum_i \nu_i \Delta h_i(P, T) + \sum_i \nu_i \Delta h_{imel} \quad (6.46)$$

Dans cette expression, le premier terme rend compte de la réaction chimique par l'état standard de la réaction à  $P_o, T$  ; le second terme représente l'écart enthalpique dans les conditions de réaction par rapport à un mélange de gaz parfaits dans ces mêmes conditions ; le troisième terme rend compte des enthalpies de mélange.

**Remarque :** le regroupement des deux premiers termes de la relation (6.46) conduit à la variation d'enthalpie de la réaction stoechiométrique complète des produits et réactifs purs (sans interaction), dans l'état de référence de ces mêmes corps purs à  $P, T$  :  $\Delta H_{ref}(P, T)$ .

Souvent, les enthalpies de mélange sont négligées, sauf si on utilise des données issues de l'expérimentation (voir tableau 6.1). Alors :

$$\Delta H_{ref}(P, T) = \Delta H^o(T) + \sum_i \nu_i \Delta h_i(P, T) \quad (6.47)$$

Ainsi, si une combustion fait intervenir un combustible liquide, l'écart enthalpique de (6.47) pour les composants liquides fait apparaître la variation d'enthalpie associée à la condensation (chaleur latente de condensation) ; un raisonnement similaire vaut pour les solides.

**TABEAU 6.1** ENTHALPIE DE FORMATION EN FONCTION DE LA TEMPÉRATURE  $H_f^\circ(T)$   
POUR DIVERS COMPOSÉS (KJ/MOLE) : VALEURS EXPÉRIMENTALES

Composé	Température K				
Organique	298	400	600	800	1 000
Méthane CH <sub>4</sub>	- 74,89	- 77,99	- 83,30	- 87,15	- 89,58
Propane C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	- 103,90	- 110,34	- 119,87	- 126,04	- 129,31
Butane C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	- 126,21	- 133,91	- 145,38	- 152,41	- 155,93
Méthanol CH <sub>3</sub> OH	- 201,26	- 204,90	- 210,72	- 214,78	- 217,38
Éthanol C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	- 234,92	- 239,94	- 247,43	- 252,29	- 250,05
Minéral					
Oxyde de carbone CO	- 110,59	- 110,18	- 110,22	- 111,01	- 112,06
Anhydride carbonique CO <sub>2</sub>	- 393,69	- 393,77	- 393,99	- 394,40	- 394,32
Oxyde d'azote NO	90,42	90,46	90,50	90,54	90,58
Peroxyde d'azote NO <sub>2</sub>	33,86	33,28	32,78	32,78	33,03
Oxyde d'azote N <sub>2</sub> O	81,59	81,25	81,38	82,00	82,84
Eau H <sub>2</sub> O	- 241,95	- 242,96	- 244,88	- 246,60	- 247,98
Ammoniac NH <sub>3</sub>	- 45,71	- 47,85	- 53,71	- 53,45	- 54,88

Il y a lieu de toujours bien choisir et préciser les états de référence pour chaque composant.

Une chaleur de réaction  $q_r$  nécessite de même de préciser l'état de référence du combustible (liquide, gazeux, voire solide), ainsi que l'état de l'eau produite par la combustion ; la chaleur de réaction est couramment référencée à l'unité du combustible (molaire ou massique : kJ/mole, kJ/kg). Parfois cette chaleur (appelée aussi pouvoir calorifique) est rapportée au volume ; cela ne porte pas à conséquence pour les liquides, mais, par contre, pour les gaz, il est d'usage de rapporter aux normaux mètres cube ( $Nm^3$ ) (volume dans les conditions normales de température et de pression).

$$q_r = \frac{Q_r}{N_c} = \frac{\Delta H_r}{N_c}$$

De façon générale, dans un réacteur ouvert en régime dynamique stationnaire, si on néglige les pertes de pression, il s'agit de la chaleur de la réaction isobare  $q_{rp}$ .

**Remarque 1 :** le calcul peut se prolonger par la caractérisation de l'équilibre chimique (ou des équilibres chimiques) ; on retrouve alors la loi d'action de masse (et les constantes d'équilibre correspondantes  $K^\circ, K_{ref}$ ).

**Remarque 2 :** la modification des conditions d'équilibre ( $P, T$  composition du mélange réactif) conduit aux lois de déplacement de l'équilibre : lois de Le Chatelier et influence de la température sur la constante d'équilibre.

► Chaleur de réaction isochore

De façon similaire à la chaleur de réaction isobare, cette chaleur est accessible à partir de l'expression de la chaleur élémentaire suivante :

$$\delta Q = C_v dT + l_T dV + Q_r d\zeta \quad (6.48)$$

Tous calculs faits, on trouve de façon similaire au paragraphe précédent :

$$Q_{rv} = \Delta U_{ref}(V, T) + \sum_i v_i \Delta U_{inel} \quad (6.49)$$

avec :

$$\Delta U_{ref} = \Delta U^o(T) + \sum_i v_i \Delta U_i(V, T) \quad (6.50)$$

La chaleur de réaction spécifique molaire en résulte, en référence au combustible  $c$  :

$$q_{rv} = \frac{Q_{rv}}{N_c} = \frac{\Delta U_r}{N_c}$$

La réaction à  $V = \text{cte}$ , s'effectue en bombe calorimétrique, système fermé, qui généralement ne conserve pas  $T$  constante ( $Q$ , fonction des variables  $V, T, \zeta$ ) ; mais la réaction étant supposée complète et stoechiométrique, elle ne dépend par  $U$  que des états initiaux et finaux des produits et réactifs et non du chemin suivi.

Ainsi, partant d'un état initial  $(V, T_o)$ , on pourra après la réaction isochore aboutissant aux produits de réactions à  $T$  donné, effectuer un refroidissement de ces produits de  $T$  à  $T_o$ .

Pour illustrer cela, on a représenté sur la figure 6.5 deux chemins conduisant de l'état initial (standard) des réactifs à l'état final (standard) des produits. On voit sur cette figure que le passage direct de l'état standard des réactifs à l'état standard des produits de réaction est tel que :

$$Q_{rv}(V, T_o) = \Delta U_r(V, T_o) = U_p(V, T_o) - U_R(V, T_o)$$

Ce même état peut être obtenu en passant par l'intermédiaire des états  $U_R(V, T)$  puis  $U_p(V, T)$  ; entre ces deux états intermédiaires, il apparaît que :

$$Q_{rv}(V, T) = \Delta U_r(V, T) = U_p(V, T) - U_R(V, T)$$

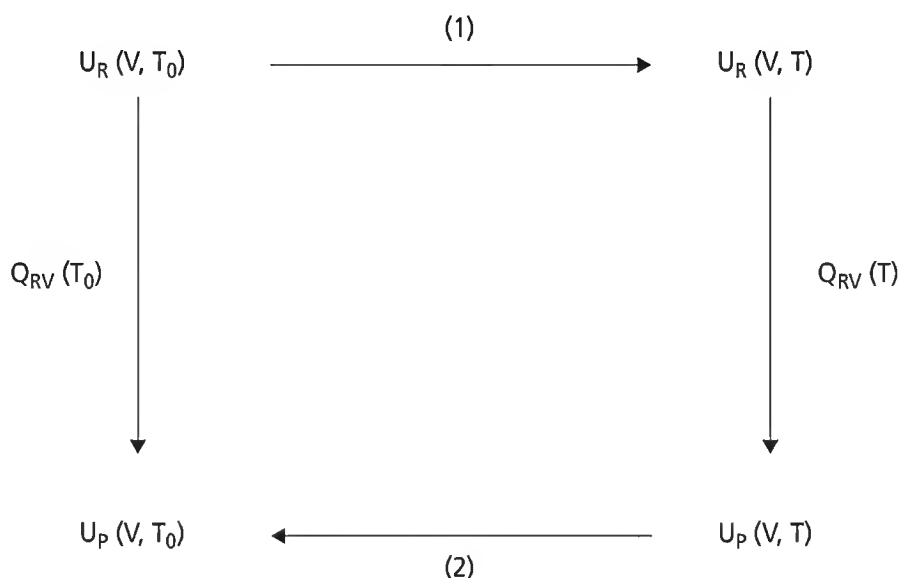
Il apparaît sur la figure que les transformations (1) et (2) correspondent à des chaleurs sensibles sur les réactifs, respectivement les produits tels que :

$$Q_{rv}(T_o) = \int_{T_o}^T C_{v_R} dT + Q_{rv}(T) + \int_T^{T_o} C_{v_P} dT \quad (6.51)$$

avec :

$$C_{v_R}, \text{ capacité calorifique des réactifs : } C_{v_R} = \sum_R N_i c_{v_i}$$

$$C_{v_P}, \text{ capacité calorifique des produits : } C_{v_P} = \sum_P N_i c_{v_i}$$



**Figure 6.5** Deux chemins conduisant de l'état standard des réactifs à l'état standard des produits de réaction

De façon générale  $C_{v_R}$ ,  $C_{v_P}$  sont fonctions de  $T$ , mais on peut écrire (6.51) sous la forme :

$$Q_{rv}(T) = Q_{rv}(T_0) + \int_{T_0}^T \Delta C_v dT \quad (6.52)$$

avec :

$$\Delta C_v = C_{v_P} - C_{v_R} = \sum_i N_i C_{v_i}$$

**Remarque :**  $C_{v_R}$ ,  $C_{v_P}$ ,  $\Delta C_v$  ont été définis de façon générale à travers  $(N_i)$ , de sorte que certains réactifs peuvent ne pas être en proportions stoechiométriques (ou la réaction incomplète) ; il peut même y avoir des corps inertes (ne participant pas aux réactions), mais qui modifient néanmoins la chaleur de réaction par la variation de leur énergie interne et action sur  $P$  et  $T$ .

Pour des réactions stoechiométriques, il viendrait ainsi  $\Delta C_v = \sum_i \nu_i C_{v_i}$  (réaction isochore). Il existe une relation similaire pour une réaction isobare. La dérivation par rapport à  $T$  de (6.52) montre que la connaissance de  $\Delta C_v$  permet de remonter à la connaissance de  $Q_{rv}$ , mais à une constante près.

On comprend l'intérêt de la connaissance des chaleurs spécifiques et de leur dépendance à la température.

► Relation entre  $Q_{rv}$  et  $Q_{rp}$

Dans une réaction isobare, le travail échangé avec l'intérieur vaut :

$$\Delta W_r = -P\Delta V = -P(V_p - V_R)$$

avec  $V_p$ , recherché dans les conditions de références initiales ( $P, T$ ).

Le bilan selon le premier principe permet aussi d'écrire :

$$Q_{rp} = U_p(P, T) - U_R(P, T) + P(V_p - V_R)$$

En introduisant  $U_p(P_f, T)$  correspondant à l'énergie interne dans l'état final de la réaction à volume constant, il vient :

$$Q_{rp} = U_p(P_f, T) - U_R(P, T) + P(V_p - V_R) + U_p(P, T) - U_p(P_f, T)$$

où :

$$Q_{rp} = Q_{rv} + P(V_p - V_R) + [U_p(P, T) - U_p(P_f, T)] \quad (6.53)$$

Le dernier terme est généralement petit devant la variation de volume à pression constante ; de plus, cette variation n'est significative que pour la phase gazeuse : dans le cas de gaz parfaits en référence molaire, il vient :

$$Q_{rp} = Q_{rv} + (N_p - N_R)RT \quad (6.54)$$

**Remarque :** le fait que  $dH$  et  $dU$  soient différentielles totales pour les variables  $P, T, \zeta$  puis  $V, T, \zeta$  permet d'exprimer par les dérivées croisées les relations de Kirchhoff qui montrent que pour des gaz parfaits  $Q_{rp}$  ne dépend pas de  $P$  (respectivement  $Q_{rv}$  ne dépend pas de  $V$ ). On en déduit aussi d'autres formes de la relation entre  $Q_{rp}$  et  $Q_{rv}$ , dont :

$$Q_{rp} - Q_{rv} = -l_T \left( \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right)_{P, T} \quad (6.55)$$

Le lecteur vérifiera facilement que (6.55) se réduit à (6.54) pour le gaz parfait.

b) Énergies de formation

Les énergies de formation de nombreux corps ont été déterminées dans l'état du standard. Celui-ci correspond au corps pur à l'état de gaz parfait, à une pression correspondant à la pression atmosphérique  $P_o = 101\,325\text{ Pa}$  ; la température associée à cet état standard est couramment de 298,15 K (25 °C).

**Remarque :** pour les corps purs simples, l'état standard est la forme moléculaire stable ( $H_2, O_2, N_2, \dots$ ) ; leurs enthalpies standard de formation sont choisies nulles.

Certains corps simples ont un état standard différent de l'état gazeux : C, carbone graphite amorphe par exemple.

Les données standards les plus courantes sont :

- les enthalpies standards de formation  $h_f^o$  ;
- les entropies standards de formation  $s_f^o$  ;
- les capacités calorifiques standards  $C_p^o$ .

Le tableau 6.1 est un exemple des données disponibles dans la littérature, mais dans un état standard à  $T$  différent de  $T_o$ .

On notera que, pour les corps composés, l'enthalpie standard de formation est égale à la variation d'enthalpie qui accompagne la formation du composé à partir des éléments pris à l'état standard dans les mêmes conditions de température.

Contrairement à l'enthalpie, l'entropie standard est nulle pour tout corps pur à l'état solide au zéro absolu, conformément au troisième principe de thermodynamique. De ce fait, les corps simples ont une entropie standard différente de zéro (voir le tableau 6.2 fournissant les données principales pour les corps simples les plus courants) ; cela permet de déterminer l'entropie standard de formation des corps composés.

TABLEAU 6.2 PRINCIPALES CONSTANTES PHYSIQUES

	C graphite	H <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>
M g/mole	12	2	32	28
$h_f^o$ J/mole	0	0	0	0
$s^o$ J/mole.K	5,69	130,6	205	191,5
$C_p^o$ J/mole.K	8,64	28,8	29,3	29,10
$T_{\text{fusion}}$ à $P_o$ , K			54,4	63,10
$L_{\text{fusion}}$ à $P_o$ , J/mole			444	720
$T_{\text{vaporisation}}$ à $P_o$ , J/mole			90,2	77,4
$L_{\text{vaporisation}}$ à $P_o$ , J/mole			6 825	5 543
$\rho_L$ à $P_o$ , kg/m <sup>3</sup>			1142	808

L'enthalpie standard de formation et l'entropie standard de formation conduisent naturellement à l'enthalpie libre standard de formation :

$$g_f^o = h_f^o - T_o s_f^o$$

L'extension dans l'état standard à  $T \neq T_o$  est laissée au lecteur, de même que la recherche de l'énergie interne standard à  $T_o$ , puis à  $T$  (on tient compte de la variation de capacité calorifique, lors de la réaction et avec  $T$ ).



## 6.4 DISPONIBILITÉS DES DONNÉES THERMOPHYSIQUES

### 6.4.1 Considérations générales sur les données

Les données thermophysiques sont exprimées dans des unités physiques appropriées. Il ne sera pas rapporté ici des facteurs de conversion liés aux divers systèmes d'unités disponibles ; sauf mention contraire, on travaillera dans le système d'unités international S.I. (voir annexe chapitre 1).

On note par ailleurs la différence essentielle entre la notion de constante physique universelle et les données thermophysiques relatives à un système matériel ; des données assez nombreuses existent, en particulier sur les corps purs (cela va être développé) ; mais la disponibilité devient plus problématique pour les mélanges, surtout lorsqu'on augmente le nombre de constituants. Des exemples apparaîtront rapidement en troisième partie de l'ouvrage.

Le tableau 6.3 rappelle les principales constantes physiques d'usage courant dans l'ouvrage ; d'autres pourront apparaître si besoin est.

TABLEAU 6.3 CONSTANTES CRITIQUES DE QUELQUES CORPS.

Constantes thermodynamiques	
Nombre d'Avogadro $N$	$6,022169 \cdot 10^{23}$ molécules/mole
Constante du gaz parfait $R$	$8,31434$ joules/mole.K
Constante de Boltzmann $k$	$1,380622 \cdot 10^{-23}$ joules/molécule.K
Constante de Stefan Boltzmann $\sigma$	$5,66961 \cdot 10^{-8}$ watts/m <sup>2</sup> .K <sup>4</sup>
Constante de Planck $h$	$6,626196 \cdot 10^{-34}$ joules.s

Constantes électromagnétiques	
Constante de Faraday $\mathcal{F}$	$9,648670 \cdot 10^4$ coulombs/mole d'électrons
Charge élémentaire $e$	$1,602 \cdot 10^{-19}$ coulombs
Électron-volt eV	$1,6021917 \cdot 10^{-19}$ joules/ev
Permittivité électrique du vide $\epsilon_0$	$1/36\pi \cdot 10^{-9}$ s <sup>2</sup> henrys
Perméabilité magnétique du vide $\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
Vitesse de la lumière dans le vide $C_0$	$2,997925 \cdot 10^8$ m/s

### 6.4.2 Principales formes accessibles pour les données

#### a) Livres et fascicules de données

La connaissance des propriétés thermophysiques des corps purs ou composés est plus ou moins complète selon l'intérêt pratique (usage) et l'abondance de ceux-ci. Les explications qui suivent sont centrées sur les documents en langue française.

Un des documents les plus généraux et complets se trouve dans le tome K des *Techniques de l'Ingénieur* (Techniques de l'Ingénieur) ; il concerne toutes les données : données générales, atomistique et chimie minérale, chimie organique et constantes spectrométriques, données thermiques, données mécaniques, électriques, électrochimiques.



Les livres donnent accès à des résultats obtenus :

- soit sous forme expérimentale (auquel cas l'incertitude doit être indiquée ; ce qui n'est pas toujours le cas et nécessite précaution) ;
- soit sous forme de modèles sous-tendus par des supports théoriques dépendant d'hypothèses qui restreignent l'usage des modèles ; là encore des précautions doivent être prises. Cette deuxième approche ne sera pas abordée ici. Elle relève le plus souvent de la thermodynamique statistique, et permet de retrouver et expliquer des propriétés macroscopiques (par exemple de transfert) à partir du comportement microscopique d'assemblées de particules élémentaires (Balian R.).

### ► Expressions analytiques

Les modèles fournissent des relations analytiques qui peuvent être valorisées si on connaît tous les paramètres associés ; d'où l'importance des constantes physiques.

Une autre possibilité consiste à réaliser des ajustements numériques à partir de résultats expérimentaux. À titre d'exemple, on donne ci-après la dépendance de la chaleur spécifique massique de l'ammoniac liquide, en fonction de la température exprimée en °C :

$$c_{p(\text{kJ/kg}, ^\circ\text{C})} = 11,626 + 086.10^{-2}t + 1,26810^{-4}t^2$$

Cette relation suppose l'indépendance de la pression.

### ► Tableaux de valeurs

Le tableau 6.4 est un exemple de fichier relatif aux propriétés à saturation de l'eau, lors du changement de phase à l'équilibre thermodynamique entre liquide et vapeur ; la variable est la pression absolue de saturation  $P_{sat}$ . Les données associées sont les températures de saturation  $t_{sat}$  (en °C), puis les masses volumiques liquides  $\rho_l$  et vapeur  $\rho_v$ , les enthalpies à saturation, et la chaleur de vaporisation correspondante. On remarquera que pour les enthalpies l'état de référence est l'état liquide à la pression atmosphérique et la température de 0,01 °C.

TABLEAU 6.4 PROPRIÉTÉS À SATURATION DE L'EAU LIQUIDE ET VAPEUR

Pression absolue (bars)	Température (°C)	Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )		Enthalpie (kJ/kg)		Chaleur de vaporisation (kJ/kg)
		Liquide	Vapeur	Liquide	Vapeur	
1	99,63	958	0,590	417,5	2 675	2 258
2	120,23	943	1,129	504,7	2 706	2 201
3	133,54	931	1,651	561,4	2 725	2 163
4	143,62	923	2,163	604,7	2 738	2 133
5	151,84	915	2,669	640,1	2 747	2 107
6	158,84	908	3,170	670,4	2 755,5	2 085
7	164,96	902	3,667	697,1	2 762	2 065
8	170,40	897	4,162	721	2 767,5	2 046

► **TABLEAU 6.4** PROPRIÉTÉS À SATURATION DE L'EAU LIQUIDE ET VAPEUR

9	175,36	892	4,655	742,6	2 772	2 029
10	179,88	887	5,147	762,6	2 776	2 013
12	187,96	878	6,127	798,5	2 782,5	1 984
14	195,04	870	7,106	830,1	2 788	1 958
16	201,37	863	8,085	858,6	2 791,7	1 933
18	207,11	856	9,065	884,6	2 795	1 910
20	217,37	850	10,05	908,6	2 797	1 888
25	223,94	835	12,51	962	2 801	1 839
30	233,84	822	15,01	1 008	2 802	1 794
35	242,54	810	17,54	1 050	2 802	1 752
40	250,33	799	20,10	1 087	2 800	1 713
45	257,41	788	22,71	1 122	2 798	1 675
50	263,91	778	25,36	1 154	2 794	1 640
60	275,55	758	30,83	1 214	2 785	1 571
70	285,79	740	36,53	1 267	2 773	1 506
80	294,97	722	42,51	1 317	2 760	1 443
100	310,96	688	55,43	1 408	2 728	1 320

### ► Courbes et graphiques

La figure 6.6 est un exemple graphique qui prolonge le tableau précédent ; ce graphique comporte un ensemble de courbes de saturation pour divers corps purs simples ou composés.

Ces représentations sont très utiles en particulier pour comparaison de divers corps ; on les retrouvera en physique du vide par exemple.

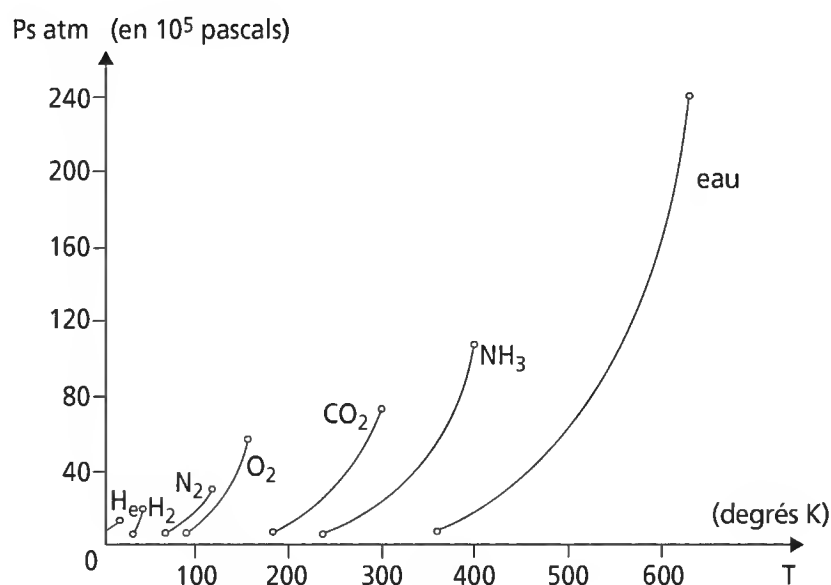
### b) Diagrammes thermodynamiques

Les diagrammes thermodynamiques sont une extension du concept abordé, à l'occasion de la figure 6.6. Cette figure ne comportait que la courbe relative aux changements de phases liquide-vapeur. Si on y adjoint l'ensemble des changements de phase pour l'eau, on aboutit au diagramme de Clapeyron rapporté figure 6.7.

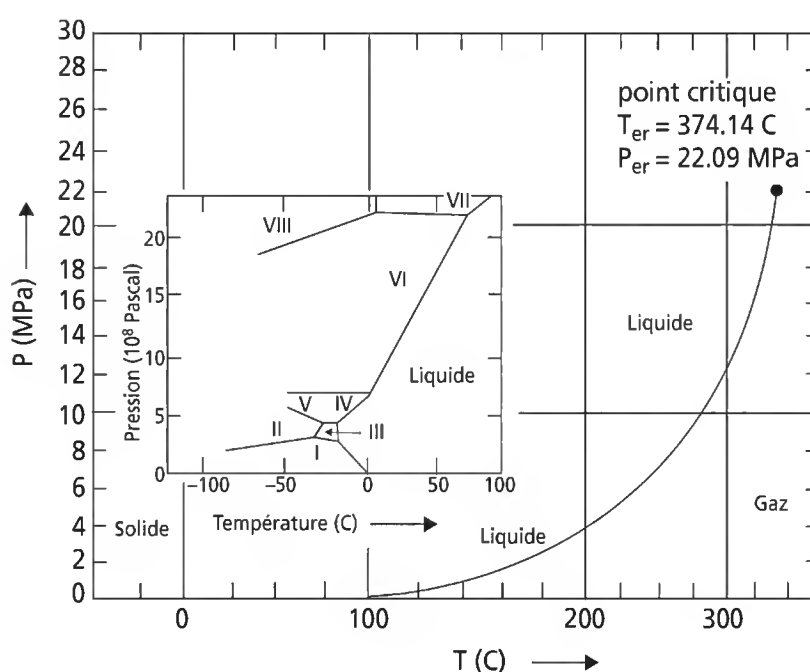
**Remarque :** l'existence de deux autres diagrammes de Clapeyron a déjà été mentionnée : diagrammes  $(P, V)$  et  $(T, V)$  ; ces diagrammes font apparaître les discontinuités des changements d'états de première espèce (voir paragraphe 6.3.3.b). Mais ils sont peu utilisés.

Les diagrammes thermodynamiques sont des outils utiles :

– pour le chercheur (de nouveaux diagrammes s'établissent pour des applications particulières, par exemple pour les matériaux) ;



**Figure 6.6** Courbes de saturation liquide-vapeur dans le diagramme de Clapeyron ( $P, T$ )



**Figure 6.7** Diagramme de Clapeyron ( $P, T$ ) pour l'eau pure ; l'incrustation présente les différentes phases cristallines de l'eau à haute pression

– pour l'ingénieur (les diagrammes classiques permettent d'obtenir rapidement des résultats (tendances) au niveau d'avant-projets ou pour des diagnostics sur site).

La majorité des diagrammes utilisés représentent les zones liquide et vapeur de corps purs ou de mélanges, car seuls les liquides et les vapeurs (ou gaz) sont facilement cyclables dans les machines ou procédés.

La figure 6.8 présente un diagramme utilisé par les frigoristes. Ce diagramme est en coordonnées  $(\ln P, h)$  pour le corps pur présenté (il existe aussi pour des mélanges) ; son utilisation détaillée sera vue dans le chapitre « Machines à froid » de la troisième partie de l'ouvrage.

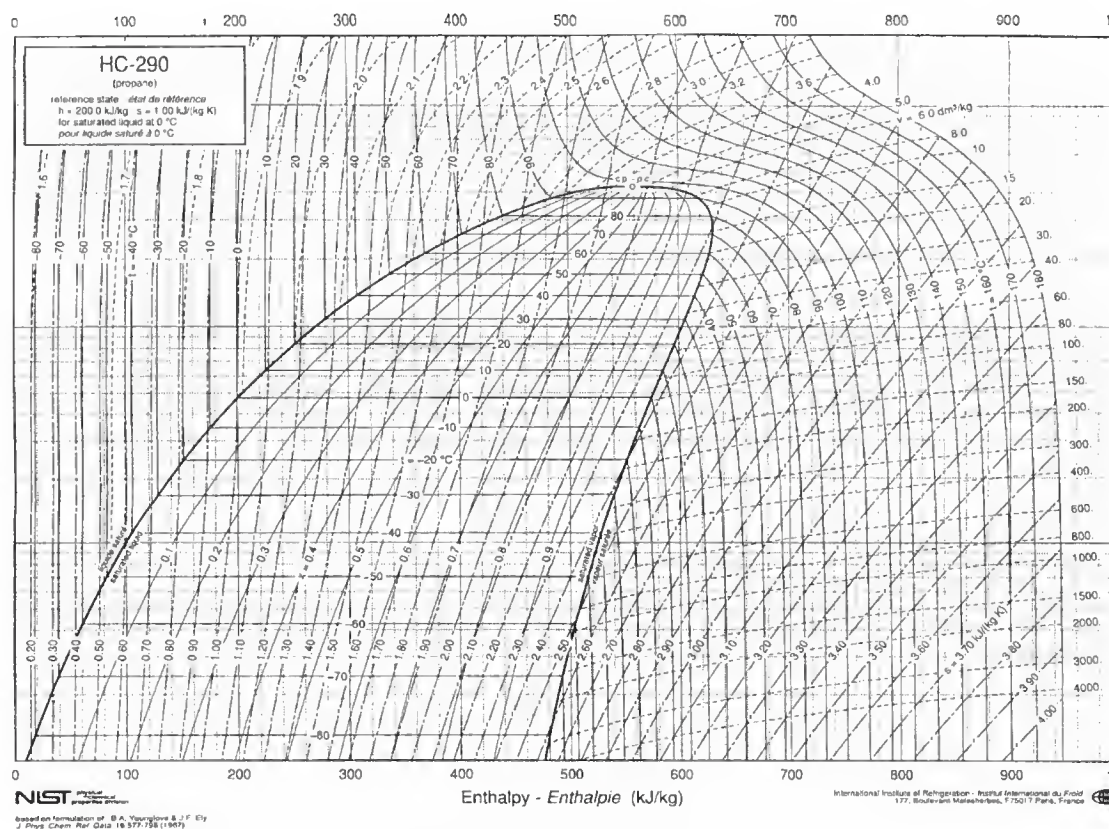


Figure 6.8 Diagramme  $(\ln P, h)$  pour le propane  
(avec l'aimable autorisation de l'IIF-IIR)

On se contente ici de noter que les principales transformations thermodynamiques apparaissent sur le diagramme (isobare, isotherme, isentrope, isenthalpique, isochore, isotitre), ce qui est très utile dans les études de machines et procédés.

On notera aussi l'existence d'un cartouche précisant l'état de référence : dans ce cas, l'état liquide saturé à 0 °C, avec toutefois des valeurs d'enthalpie et d'entropie spécifiques massiques différentes de zéro.

**Remarque :** À partir de ce type de diagramme, il est possible de reconstruire d'autres informations thermodynamiques, par exemple des chaleurs spécifiques, conformément aux relations thermodynamiques exposées dans ce qui précède.

Le lecteur pourra trouver des tables et diagrammes complémentaires pour l'industrie du froid auprès de l'Institut international du froid (adresse : 177 boulevard Malesherbes, 75017 Paris, France, site : [www.iifir.org](http://www.iifir.org)). Par ailleurs, la référence (Raznjevic K.) plus ancienne comporte de nombreuses données sur les solides, liquides, gaz, ainsi que de nombreuses tables et diagrammes.

► Diagramme entropique  $T, s$

La figure 6.9 représente les diverses courbes correspondant aux transformations thermodynamiques élémentaires. On trouvera un exemple de diagramme  $(T, s)$  pour un fluide dans l'annexe sur les diagrammes en fin d'ouvrage.

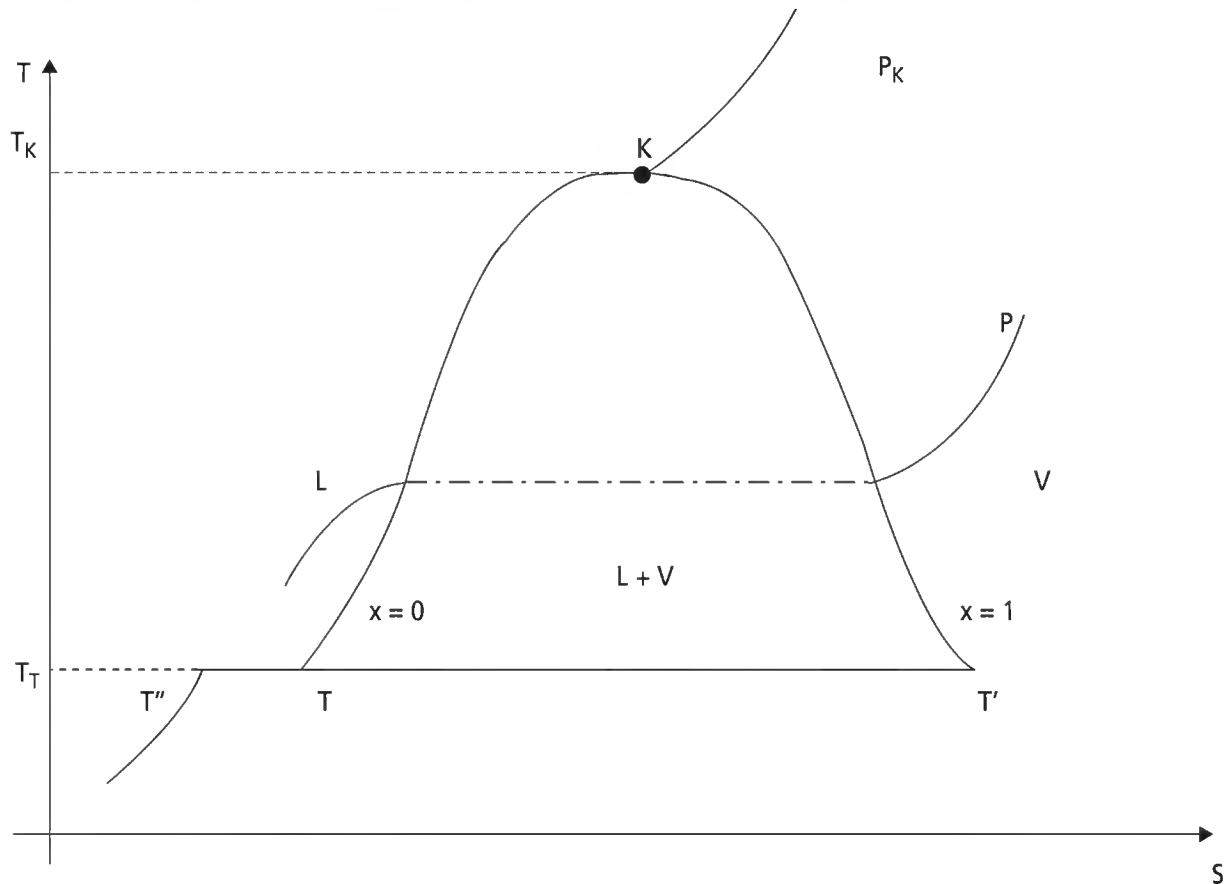


Figure 6.9 Diagramme entropique  $(T, s)$

Pour les liquides peu compressibles tels que  $H_2O$ ,  $NH_3$ , les courbes isobares en phase liquide sont confondues avec la courbe de saturation liquide  $x = 0$  (contrairement à la représentation sur la figure).

Parmi les courbes figurant sur le diagramme, on voit que la courbe de saturation, en particulier du côté liquide ( $x = 0$ ), est importante : la connaissance de la chaleur spécifique  $c_{l\text{sat}}$ , le long de la courbe de saturation permet de déterminer  $s_l$ , puis  $s_v$ , les entropies spécifiques à saturation, conformément à :

$$s_l = \int_{273}^T \frac{c_{l\text{sat}} dT}{T}$$

$$s_v = s_l + \frac{L_{lv}(T)}{T}$$

► Diagramme enthalpique  $h, s$

Ce diagramme, souvent appelé diagramme de Mollier est représenté sur la figure 6.10 ; c'est le diagramme le plus courant pour l'eau (et son utilisation dans les turbines à vapeur).

Il permet par mesure directe d'un segment, d'accéder à une variation d'enthalpie qui peut représenter soit un travail mécanique, soit un échange de chaleur pour un fluide isobare.

Comme pour le diagramme précédent, une approximation courante des isobares en phase liquide est la courbe de saturation correspondante ( $x = 0$ ).

**Remarque :** ce diagramme ( $h, s$ ) se déduit du précédent par une transformation géométrique résultant des relations thermodynamiques.

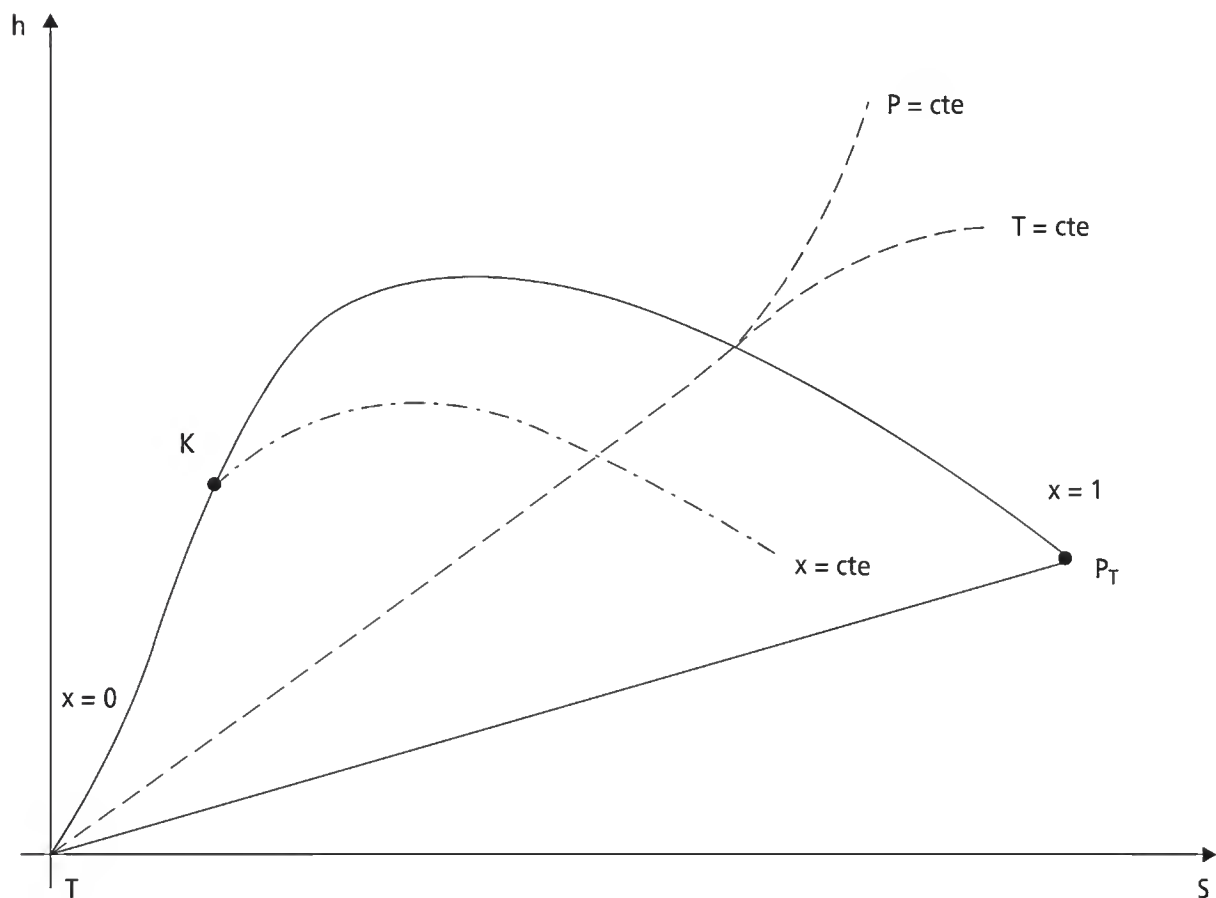


Figure 6.10 Diagramme ( $h, s$ ) ou de Mollier

Dans le domaine des vapeurs saturées ( $L + V$ ), les isobares ont une inclinaison qui est une fonction croissante de  $P$ , vu que :

$$\left( \frac{\partial h}{\partial s} \right)_p = T$$



Les courbes isotitres sont obtenues selon la *règle des segments proportionnels*, sachant que les isobares dans le domaine ( $L + V$ ) sont des droites et que :

$$s(x) = xs_l + (1-x)s_v$$

où :

$$h(x) = xh_l + (1-x)h_v$$

### ► Autres diagrammes

De nombreux autres diagrammes existent. On se contentera ici de faire référence à trois autres types de diagrammes qui seront utilisés :

- Les diagrammes de l'air humide : ils seront exposés et exploités dans le chapitre sur l'air humide de la troisième partie applications (voir annexe « Diagrammes ») ;
- Les diagrammes de combustion (Borghini R.) : ils permettent, à partir de l'analyse des fumées et d'une représentation graphique, de déterminer les propriétés caractéristiques du mélange soumis à prélèvement ;
- Les diagrammes binaires : ces diagrammes sont relatifs à des mélanges dont les interactions entre constituants sont significatives et utilisées (propriétés de sorption par exemple). Le cas du mélange ammoniac-eau est illustré en annexe des diagrammes ; il sera développé dans le chapitre sur les machines à froid déjà cité.

### c) Logiciels et bases de données informatisées

L'avènement de l'informatique a permis la dématérialisation des bases de données et des diagrammes, ce qui permet de retrouver l'ensemble des éléments présentés dans les paragraphes précédents a et b, soit sous forme de fichiers numérisés pour les bases de données, soit sous forme de logiciels (ou de progiciels, selon l'importance) pour les diagrammes utilisables de façon interactive le plus souvent.

Sans exhaustivité aucune, on citera deux logiciels récents proposés par Prosim ([www.prosim.net](http://www.prosim.net)) :

- Simulis Thermodynamics® : ce programme est un programme de calcul de propriétés thermodynamiques (propriétés de transfert : chaleur spécifique, viscosité... ; propriétés thermodynamiques (enthalpie, facteur de compressibilité...)) ;
- Prosim Ternary Diagram : outil simple pour le tracé de diagrammes ternaires (utilitaire gratuit téléchargeable sur le site indiqué).

Il en existe aussi dans les *Techniques de l'Ingénieur* ; de plus, le logiciel AHH2004 SAVE est relatif au diagramme interactif de l'air humide ; c'est un produit dédié disponible auprès des Éditions Parisiennes ([www.librairietechnique.com](http://www.librairietechnique.com)).

Certains fournisseurs disposent, par ailleurs, de leur propre logiciel : l'auteur mentionne l'existence du logiciel Forane à l'initiative de Elf Atochem. Ce logiciel permet de connaître et utiliser les principales propriétés des fluides frigorigènes.

## 6.5 QUELQUES EXEMPLES DE DONNÉES POUR LES CORPS COURANTS

Conformément aux usages, il est apparu dans ce chapitre trois états privilégiés pour la matière : gazeux, liquide, solide ; quelques ordres de grandeur des propriétés principales correspondantes vont être donnés dans les paragraphes suivants.

### 6.5.1 Les gaz

#### a) Données générales

L'étude de l'état gazeux des corps purs a montré l'importance du point critique ; l'adimensionnement des propriétés, au moins pour l'équation d'état, fait souvent référence à ce point. Le tableau 6.5 rend compte de ces grandeurs critiques : il permet le calcul du facteur de compressibilité critique  $z_k$ . On voit que l'usage des variables réduites  $P/P_k$ ,  $v/v_k$  permet d'envisager au moins qualitativement une forme universelle connue sous le nom de loi des états correspondants.

TABLEAU 6.5 GRANDEURS CRITIQUES DE CORPS PURS GAZEUX

Corps	Masse molaire g	$T_k$ K	$P_k$ $10^6$ Pa	$v_k$ $10^{-3}$ m <sup>3</sup> /mole	$z_k$
H <sub>2</sub>	2	33,3	1,30	0,065	0,30
He	4	5,3	0,23	0,058	0,30
CH <sub>4</sub>	16	191,1	4,64	0,099	0,29
NH <sub>3</sub>	17	405,5	11,28	0,072	0,24
H <sub>2</sub> O	18	647,3	22,09	0,057	0,23
N <sub>2</sub>	28	126,2	3,39	0,090	0,29
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	30	305,5	4,88	0,148	0,28
O <sub>2</sub>	32	154,8	5,08	0,078	0,31
C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	44	370	4,26	0,200	0,28
C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> OH	46	516	6,38	0,167	0,25

De nombreuses données peuvent être trouvés dans l'*Encyclopédie de l'Air Liquide* (l'Air Liquide). Pour les relations des données aux modèles, on pourra utilement se référer au livre de Reid et Sherwood (Reid et Sherwood), en langue anglaise.

La figure 6.11 montre l'évolution du facteur de compressibilité  $z$  en fonction de la pression réduite (figure 6.11.a), puis du volume réduit (figure 6.11.b), pour diverses valeurs de la température réduite, et conformément à la forme universelle de l'équation réduite.

Comme on l'a vu durant ce chapitre, la connaissance d'un coefficient calorimétrique ou (et) d'un coefficient thermoélastique est fondamentale dans la connais-



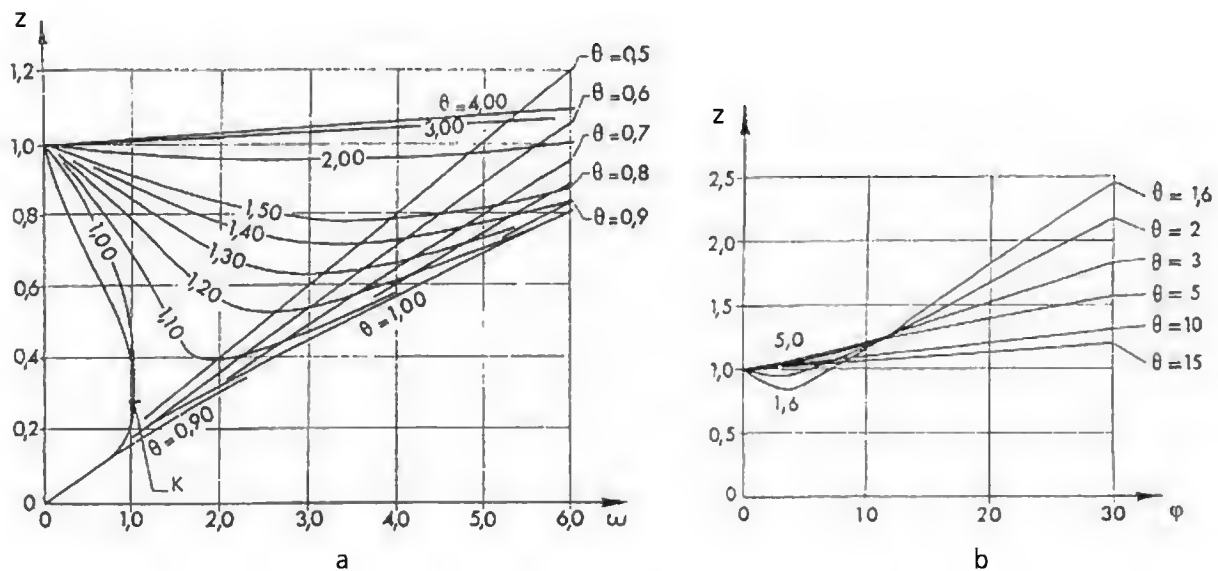


Figure 6.11 Facteur  $z$  en fonction de la pression réduite  $\omega$  (a), du volume réduit  $\phi$  (b)

sance complète du comportement d'un corps ; le tableau 6.6 rend compte d'ajustements de données sur les chaleurs spécifiques molaires de quelques gaz à la pression atmosphérique (ou normale).

### b) L'air

De nombreuses données sur l'air figurent dans l'encyclopédie des gaz de l'Air Liquide déjà citée (l'Air Liquide).

#### ► L'air sec

Dans un premier temps, on considère l'air sec, pour lequel l'équation d'état peut s'exprimer sous la forme :

$$\rho \text{ kg/m}^3 = \frac{348.29}{101325} \cdot \frac{P}{T} \cdot \frac{1}{Z} \quad (6.56)$$

$P$  en Pa ;  $T$  en K ;  $z$ , facteur de compressibilité ajusté analytiquement sous la forme :

$$Z = 1 - 10^{-12} P (T - 350)^2 \text{ si } 180 < T \leq 350 \text{ K}$$

**Remarque :** si la température varie de 350 K à 1 350 K, on peut considérer l'air comme un gaz parfait ( $Z = 1$ ).

La caractérisation des transferts pour l'air sec passe par la connaissance de la chaleur spécifique isobare  $c_p$ , la conductivité thermique  $\lambda$ , et la viscosité dynamique  $\mu$  : ces grandeurs interviennent dans de nombreux nombres adimensionnels.

On donne ci-après des ajustements analytiques de ces trois grandeurs, en fonction de la température absolue  $T$ , et pour la pression atmosphérique  $P_o$  (pression

TABLEAU 6.6 CHALEUR SPÉCIFIQUE MOLAIRE À LA PRESSION ATMOSPHÉRIQUE (OU NORMALE)

Valeurs des coefficients de la formule empirique $C_p = \alpha + \beta T + \gamma T^{-1/2} + \delta T^2$ donnant pour $p = 1 \text{ atm}$ la chaleur molaire à pression constante (cal/mole.degré) de quelques gaz usuels						
Gaz	Formules	$\alpha$	$10^3 \beta$	$10^{-7} \gamma$	$\delta$	Domaine de validité °K
Hydrogène	H <sub>2</sub>	5,76	1,04	0	15	$300 \leq T \leq 2000$
Azote	N <sub>2</sub>	6,449	1,413	-0,807	0	$300 \leq T \leq 1500$
Oxyde de carbone	CO	7,74	0,74	0	-20	$300 \leq T \leq 2000$
Gaz carbonique	CO <sub>2</sub>	17,67	0,20	0	-156	$T > 300$
Vapeur d'eau	H <sub>2</sub> O	7,187	2,373	2,084	0	$300 \leq T \leq 1500$
Méthane	CH <sub>4</sub>	3,381	18,044	43	0	$300 \leq T \leq 1500$
Propane	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	2,258	57,636	-176	0	$300 \leq T \leq 1500$
Butane	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	4,357	72,552	-221	0	$300 \leq T \leq 1500$
Octane	C <sub>8</sub> H <sub>18</sub>	10,381	137,054	-425	0	$300 \leq T \leq 1500$

normale). Pour chaque grandeur  $G$ , les résultats sont exprimés dans le système international d'unités S.I., sous la forme polynomiale :

$$G = A + B.T + C.T^2 + D.T^3 \quad (6.57)$$

Les coefficients figurent dans le tableau 6.7 ; les corrélations sont valables dans l'intervalle de température [180 K, 450 K].

TABLEAU 6.7 COEFFICIENTS DES AJUSTEMENTS POLYNOMIAUX POUR LES PROPRIÉTÉS DE L'AIR SEC D'APRÈS (CETIAT), À  $P_o = 101\,325 \text{ Pa}$ 

G	Unité	A	B	C	D
$C_p$		1,169	-0,146	$0,41810^{-5}$	$-0,39010^{-8}$
$\lambda$	w/m.K	$1,308 \cdot 10^{-4}$	$9,814 \cdot 10^{-5}$	$-3,381 \cdot 10^{-8}$	0
$\mu$		$1,20 \cdot 10^{-6}$	$6,605 \cdot 10^{-8}$	$-2,858 \cdot 10^{-11}$	0

### ► L'air dans l'atmosphère terrestre

La masse molaire équivalente de l'air vaut  $M_a = 28,9644 \text{ g/mole}$ , comme il sera précisé à nouveau dans le chapitre sur l'air humide (troisième partie).

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la référence de pression prise au niveau moyen de la mer, avec une accélération de la pesanteur correspondant  $g_o = 9,80665 \text{ m/s}^2$  ( $1.0 \text{ atm} = 1 \text{ bar} = 101\,325 \text{ Pa}$ ), la référence de température reste elle variée ; on a vu que pour la thermochimie, la température était de  $25^\circ\text{C}$ . La définition des conditions

normales de température et de pression (CNTP) fait par contre référence à 0 °C. L'atmosphère de référence quant à elle adopte la température de 15 °C (288,15 K). Il en résulte des précautions à prendre, selon la précision désirée.

**Remarque :** l'accélération de la pesanteur  $g$  varie selon le lieu, mais aussi et surtout avec l'altitude.

Le tableau 6.8 donne pour l'atmosphère terrestre l'évolution de la température et de la pression avec l'altitude ; cela n'est pas sans conséquence pour les moteurs d'avion et de fusée, voire pour les moteurs automobiles de compétition et les moteurs de groupe électrogène.

TABLEAU 6.8 CARACTÉRISTIQUES DE L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE

Altitude $z$ km	Température $T$ K	Pression $P$ Pa
0	288,15	101325
11	216,65	22600
20	216,65	5470
32	228,65	868
47	270,65	111
52	270,65	59
61	252,65	18,2
79	180,65	1,0
88,7	180,65	0,16
90	184,53	0,13

On ajoutera que si on considère l'atmosphère comme un gaz parfait, on a :

$$d\rho = -\rho g dz$$

$$z, \text{ altitude ; } \rho = \frac{M_a P}{RT}$$

$\rho$  , au niveau de la mer, vaut 1,2550 kg/m<sup>3</sup>

$\gamma$  vaut 1,40 et la vitesse du son  $a$ , 340,3 m/s

#### ➤ L'air humide

Ce point sera développé dans le chapitre sur l'air humide et ses applications, compte tenu de l'importance pratique de celles-ci. On renvoie le lecteur vers la référence (Cétiat) pour les données, ou vers la synthèse réalisée dans le groupe de recherche de l'auteur (Philippi I.).

### 6.5.2 Les liquides – les solides

On trouvera les principales données ( $\rho, c_p, \mu$ ) pour les liquides de la même façon que pour les gaz. Aussi, il ne sera pas fait de traitement particulier pour le cas des liquides caloporteurs ou frigoporteurs ; on notera que souvent ceux-ci sont des mélanges.

La référence (Cetiat) donne quelques exemples ; il en existe aussi dans les *Techniques de l'Ingénieur*.

L'importance de ce paragraphe n'en est pas moins grande, vu l'apparition de nouveaux fluides hybrides : les coulis. Les coulis les plus courants actuellement sont les coulis de glace. Ils font intervenir le changement de phase solide-liquide. De nombreuses études sont en cours pour caractériser les écoulements et transferts de ces coulis ; d'autres coulis que ceux de glace sont à l'étude (par exemple les paraffines, mais cela suppose une encapsulation).

#### a) L'eau

L'eau est le liquide par excellence. Cela provient de ses propriétés dans le voisinage des conditions ambiantes de référence ( $P_o = 101\,325\text{ Pa}$  ;  $T_o = 298,15\text{ K}$ ) : à la pression atmosphérique, l'eau est liquide entre 0 °C et 100 °C (voir tableau 6.9).

TABLEAU 6.9 PRESSION DE SATURATION DE L'EAU EN FONCTION DE  $T$ , LA TEMPÉRATURE

t en °C	P × 10 <sup>5</sup> Pa
0,01	0,006 (point triple)
8	0,019
30	0,042
45	0,093
100	1,013
180	10,22
223	25
250	40,5
350	168
374,2	221,2 (point critique)

Ce tableau permet de confirmer que la vapeur d'eau, même si elle reste présente en faible proportion (faible pression partielle) dans l'air humide ambiant reste un élément perturbateur fécond (au moins en météorologie).

L'un des ajustements disponibles dans la littérature pour la courbe de saturation entre le point triple et le voisinage du point critique (300 °C) est le suivant :

$$\ln P_{sat} = \frac{at_{sat}}{b + t_{sat}} + c \quad (6.58)$$

Cette relation n'est pas sans rappeler la relation d'Antoine. Sa précision est de l'ordre de 1 % sur l'intervalle de température considéré.  $P_{sat}$  est en Pa,  $t_{sat}$  en °C, avec  $a = 16,827$  ;  $b = 228,737$  ;  $c = 6,407$ .

On indique que la masse molaire de l'eau,  $H_2O$  est 18 g/mole. Les points remarquables de changements de phase sont donnés dans le tableau 6.10.

TABLEAU 6.10 PRINCIPAUX POINTS DE CHANGEMENTS DE PHASE DE L'EAU

	T K	P Pa
Point triple T	273,16	611
Point normal de fusion	273,13	101 325
Point normal de vaporisation	373,15	101 325
Point critique K	647,20	221,2 10 <sup>5</sup> Pa

### L'eau liquide

On donne ci-après les ajustements analytiques des principales propriétés de l'eau liquide, conformément à (6.57) avec  $t$  en °C. Seule la chaleur spécifique massique est exprimée en unités S.I., en fonction des variables  $P$  et  $t$  (°C), pour  $P$  comprise entre la pression atmosphérique et 3 Mpa (précision relative : 1 %).

$$c_{pl} = (1,5 \cdot 10^{-12} P + 1,1 \cdot 10^{-5})(t - 1,5 \cdot 10^{-6} P - 50)^2 - 5 \cdot 10^{-19} P + 4,185 \quad (6.59)$$

Les variations avec la température de  $\mu$  viscosité dynamique et  $\lambda$  conductivité thermique sont représentés sur la figure (6.12).

TABLEAU 6.11 COEFFICIENTS DES AJUSTEMENTS POLYNOMIAUX  
POUR LES PROPRIÉTÉS DE L'EAU LIQUIDE À  $P_0$  (101 325 Pa) D'APRÈS (CETIAT)

G	Unité	A	B	C	D
$\rho_l$	kg/m <sup>3</sup>	1000	$-0,515 \cdot 10^{-1}$	$-0,383 \cdot 10^{-2}$	0
$\lambda_l$	W/m °C	0,569	$1,888 \cdot 10^{-3}$	$-7,857 \cdot 10^{-6}$	0
$\ln \mu_l$	μPa.s	3,25	$-1,419 \cdot 10^{-2}$	$0,960 \cdot 10^{-4}$	$-0,346 \cdot 10^{-6}$

$\mu$  diminue lorsque  $t$  augmente,  $\lambda$  varie assez peu en fonction de  $t$ .

### L'eau vapeur

La démarche identique à celle menée pour l'eau liquide conduit pour la vapeur surchauffée au tableau 6.12 des coefficients d'ajustements polynomiaux pour les

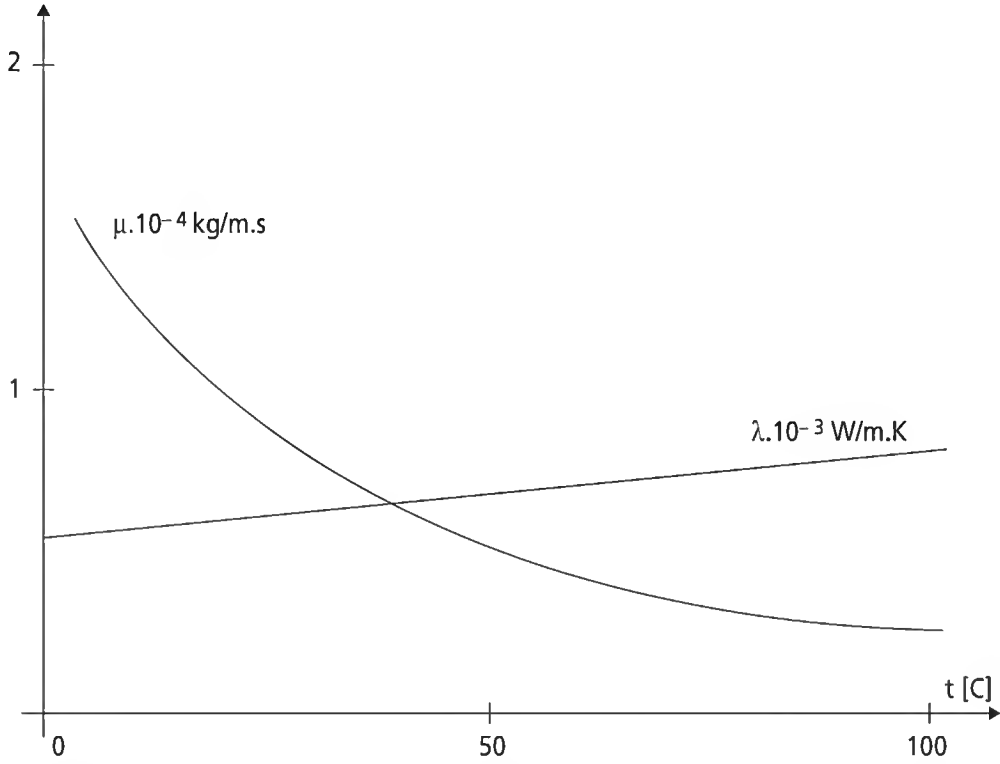


Figure 6.12 Viscosité et conductivité de l'eau à la pression atmosphérique en fonction de la température  $t$

propriétés de la vapeur indiquées dans le tableau, et ce toujours à pression atmosphérique (précision 1 %).

TABLEAU 6.12 COEFFICIENTS DES AJUSTEMENTS POLYNOMIAUX POUR LES PROPRIÉTÉS DE L'EAU VAPEUR À  $P_o(101\ 325\ Pa)$  D'APRÈS (CETIAT)

G	Unité	A	B	C	D
$c_{p_v}$		2,288	$-0,392\ 10^{-2}$	$0,151\ 10^{-4}$	$-0,171\ 10^{-7}$
$\lambda_v$		$17,41\ 10^{-3}$	$6,49\ 10^{-5}$	$0,712\ 10^{-7}$	0
$\mu_v$	Pa.s	$7,95\ 10^{-6}$	$4,13\ 10^{-8}$	0	0

Aussi  $\rho_v$  s'exprime sous la forme :

$$\rho_v = a + \frac{b}{T} \tag{6.60}$$

avec  $T$  en K ;  $a = -1,20\ 10^{-2}$  ;  $b = 224,48$

**Remarque :** on voit dans les tableaux 6.11 et 6.12 la différence de comportement visqueux entre un liquide et un gaz : pour un liquide la viscosité diminue généralement avec la température, alors que pour un gaz la viscosité augmente avec T.

### Propriétés de l'eau à saturation

Celles-ci ont un rôle important comme il a été vu. Elles sont disponibles dans la littérature sous forme de tables ou de diagrammes (Raznjevic K.) : nous les utiliserons sous forme de diagramme dans la troisième partie de l'ouvrage ; elles existent aussi sous forme d'ajustement (Cetiat).

### c) L'ammoniac ( $\text{NH}_3$ )

Ce corps composé illustrera la catégorie des fluides cryogéniques et réfrigérants vu leur importance dans les domaines du froid, du conditionnement d'air et des pompes à chaleur (voir chapitre 15 de la troisième partie). De surcroît, c'est un fluide dit naturel, donc assez neutre vis-à-vis de l'environnement contrairement à la famille des composés fluorocarbonés.

L'ammoniac est un corps composé de masse molaire 17 g, qui dans les CNTP a une masse volumique de  $0,771 \text{ kg/m}^3$ .

Les principaux points caractéristiques de changement de phase sont donnés dans le tableau 6.13.

TABLEAU 6.13 PRINCIPAUX POINTS DE CHANGEMENTS DE PHASE DE L'AMMONIAC

Point	T K	P Pa
Point triple T	195,4	6 080 Pa
Point normal de vaporisation (Po)	239,7	101 325 Pa
Point critique K	405,5	$114,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$

### Propriétés à saturation

Dans le domaine de température compris entre 220 K et 380 K, l'ensemble des propriétés de saturation peut être représenté sous forme polynomiale de degré 5 en fonction de la température absolue avec une précision de 0,5 %.

$$G = A + BT + CT^2 + DT^3 + ET^4 + FT^5 \quad (6.61)$$

Les coefficients de  $P_{sat}$ ,  $\rho_{lsat}$ ,  $h_{lsat}$ ,  $h_{vsat}$  sur la courbe de saturation sont rassemblés dans le tableau 6.14.

**TABLEAU 6.14** COEFFICIENTS DES AJUSTEMENTS POLYNOMIAUX  
POUR LES PROPRIÉTÉS À SATURATION DE  $NH_3$ , D'APRÈS (CETIAT)

G	Unité	A	B	C	D	E	F
$P_{sat}$	Pa	$57,134 \cdot 10^{-5}$	$1,256 \cdot 10^{-5}$	$1,057 \cdot 10^3$	-4,104	$6,675 \cdot 10^{-3}$	$-2,199 \cdot 10^{-6}$
$\rho_{sat}$		1 416,10	-6,483	$2,103 \cdot 10^{-2}$	$-2,827 \cdot 10^{-5}$	0	0
$h_{sat}$	kJ/kg	53,250	1,957	0,495	0	0	0
$h_{vsat}$	hJ/kg	3160,10	-14,79	$6,595 \cdot 10^{-2}$	$-8,915 \cdot 10^{-5}$	0	0
$\lambda_v$	w/m.K	$-0,210 \cdot 10^{-1}$	$0,378 \cdot 10^{-3}$	$-0,156 \cdot 10^{-5}$	$0,345 \cdot 10^{-8}$	$-0,250 \cdot 10^{-4}$	0
$\mu_v$	Pa.s.	$-3,525 \cdot 10^{-7}$	$3,562 \cdot 10^{-8}$	0	0	0	0

### Propriétés en phase vapeur

Sous la pression atmosphérique  $P_o$ , l'équation d'état peut s'exprimer sous la forme :

$$\rho_v = \frac{204,85}{101\,325} \cdot \frac{P}{T} \cdot \frac{1}{Z} \quad (6.62)$$

dans le domaine de température  $300\text{ K} < T < 550\text{ K}$  avec :

$$Z = 0,950 + 1,94610^{-4}T - 1,91710^{-7}T^2$$

La conductivité thermique et la viscosité de la vapeur s'ajustent alors sous la forme (6.61) ; les coefficients d'ajustement sont donnés dans le tableau 6.14.

Des compléments sur l'ammoniac sont disponibles dans l'encyclopédie des gaz (Air Liquide), ainsi que dans le fascicule de l'Institut International du Froid (Institut International du Froid) dédié à  $NH_3$  ; d'autres fascicules existent pour différents fluides frigorigènes (par exemple R744 ; R404A ; R410A).

### 6.5.3 Compléments sur les réactions chimiques

Nous avons vu (paragraphe 6.3.4) comment caractériser une réaction chimique complète à partir des chaleurs de réaction et des énergies de formation : les réactions correspondantes étaient intrinsèquement irréversibles.

Toutefois, la notion d'équilibre chimique a permis d'introduire la notion de constante d'équilibre  $K$ , généralement fonction de la température  $T$ .

Cela est fondamental pour pouvoir juger des espèces présentes lors de réactions et permet de tenir compte de la réaction inverse quand elle intervient de façon significative ; cette démarche est essentielle lorsqu'on souhaite promouvoir certaines dissociations (production d'hydrogène à haute température).

Le tableau 6.15 illustre les constantes d'équilibre de réactions en phase gazeuse ; il donne un aperçu des niveaux de température où la dissociation devient significative.



TABLEAU 6.15 CONSTANTES D'ÉQUILIBRE DE DIVERSES RÉACTIONS EN PHASE GAZEUSE

$K_{\text{atm}}$	$H_2 \leftrightarrow 2H$ $\frac{P^2_{H_2}}{P_{H_2}}$	$O_2 \leftrightarrow 2O$ $\frac{P^2_O}{P_{O_2}}$	$\leftrightarrow 2N$ $\frac{P^2_N}{P_{N_2}}$	$N_2 + O_2 \leftrightarrow 2NO$ $\frac{P^2_{NO}}{P_{N_2} P_{O_2}}$	$2CO_2 \leftrightarrow 2CO + O_2$ $\frac{P^2_{CO} P_{O_2}}{P^2_{CO_2}}$	$2H_2O \leftrightarrow 2H_2 + O_2$ $\frac{P^2_{H_2} P_{O_2}}{P^2_{H_2O}}$	$2H_2O \leftrightarrow 2OH + H_2$ $\frac{P^2_{OH} P_{H_2}}{P^2_{H_2O}}$
1 000	5,12.10 <sup>-18</sup>	3,63.10 <sup>-20</sup>	8,2.10 <sup>-20</sup>	7,3.10 <sup>-9</sup>	4,00.10 <sup>-21</sup>	7,5.10 <sup>-21</sup>	1,3.10 <sup>-23</sup>
1 200	3,88.10 <sup>-14</sup>	8,6.10 <sup>-18</sup>	1,67.10 <sup>-26</sup>	2,77.10 <sup>-7</sup>	3,28.10 <sup>-16</sup>	1,59.10 <sup>-16</sup>	1,4.10 <sup>-18</sup>
1 400	2,36.10 <sup>-11</sup>	1,17.10 <sup>-12</sup>	5,5.10 <sup>-21</sup>	3,68.10 <sup>-6</sup>	1,00.10 <sup>-12</sup>	2,02.10 <sup>-13</sup>	6.10 <sup>-15</sup>
1 600	2,96.10 <sup>-9</sup>	2,66.10 <sup>-10</sup>	1,36.10 <sup>-17</sup>	2,58.10 <sup>-5</sup>	4,26.10 <sup>-10</sup>	4,35.10 <sup>-11</sup>	3,0.10 <sup>-12</sup>
1 800	1,27.10 <sup>-7</sup>	1,82.10 <sup>-8</sup>	6,0.10 <sup>-15</sup>	1,17.10 <sup>-4</sup>	4,5.10 <sup>-8</sup>	2,8.10 <sup>-9</sup>	4,0.10 <sup>-10</sup>
2 000	2,63.10 <sup>-6</sup>	5,38.10 <sup>-7</sup>	7,8.10 <sup>-13</sup>	3,93.10 <sup>-4</sup>	1,9.10 <sup>-6</sup>	8,2.10 <sup>-8</sup>	1,9.10 <sup>-8</sup>
2 200	3,16.10 <sup>-5</sup>	8,7.10 <sup>-6</sup>	4,26.10 <sup>-11</sup>	1,06.10 <sup>-3</sup>	3,8.10 <sup>-5</sup>	1,3.10 <sup>-6</sup>	4,5.10 <sup>-7</sup>
2 400	2,51.10 <sup>-4</sup>	8,8.10 <sup>-5</sup>	1,20.10 <sup>-9</sup>	2,42.10 <sup>-3</sup>	4,8.10 <sup>-4</sup>	1,3.10 <sup>-5</sup>	6.10 <sup>-6</sup>
2 600	1,46.10 <sup>-3</sup>	6,24.10 <sup>-4</sup>	2,02.10 <sup>-8</sup>	4,86.10 <sup>-3</sup>	3,9.10 <sup>-3</sup>	8,9.10 <sup>-5</sup>	6.10 <sup>-5</sup>
2 800	6,66.10 <sup>-3</sup>	3,36.10 <sup>-3</sup>	2,28.10 <sup>-7</sup>	8,8.10 <sup>-3</sup>	2,2.10 <sup>-2</sup>	4,7.10 <sup>-4</sup>	4,2.10 <sup>-4</sup>
3 000	2,48.10 <sup>-2</sup>	1,44.10 <sup>-2</sup>	1,88.10 <sup>-6</sup>	1,48.10 <sup>-2</sup>	0,10	2,0.10 <sup>-3</sup>	2,2.10 <sup>-3</sup>
3 200	7,87.10 <sup>-2</sup>	5,18.10 <sup>-2</sup>	1,19.10 <sup>-5</sup>	2,32.10 <sup>-2</sup>	0,36	6,9.10 <sup>-2</sup>	9.10 <sup>-3</sup>
3 400	0,218	0,160	6,07.10 <sup>-5</sup>	3,45.10 <sup>-2</sup>	1,2	2,1.10 <sup>-2</sup>	3,5.10 <sup>-2</sup>
3 600	0,540	0,437	2,59.10 <sup>-4</sup>	4,90.10 <sup>-2</sup>	3,4	5,8.10 <sup>-2</sup>	0,11
3 800	1,21	1,07	9,6.10 <sup>-4</sup>	6,71.10 <sup>-2</sup>	8,4	0,14	0,31
4 000	2,53	2,42	3,06.10 <sup>-3</sup>	8,9.10 <sup>-2</sup>	19	0,36	0,8

× 1,01325.10<sup>5</sup> Pa (K)

## 6.6 CONCLUSION

Ce chapitre a montré l'importance des données thermophysiques dans la résolution d'un problème et comment celles-ci sont intimement liées à la théorie et aux modèles développés.

Il a aussi montré que la connaissance actuelle, même si elle est confortable, comporte encore des nombreuses lacunes, conduisant l'utilisateur à faire des approximations (hypothèses) judicieuses. D'assez nombreux exemples de ce qui est disponible ont été fournis, ainsi que les sources essentielles en langue française.

Des compléments seront introduits au fur et à mesure des besoins, pour conforter le lecteur dans l'apprentissage d'une démarche autonome dans la recherche, la validation et l'utilisation des données : on suggère au lecteur de toujours recouper les informations (principe de redondance).

## BIBLIOGRAPHIE

Air Liquide *Encyclopédie des gaz de l'Air Liquide*, Elsevier, 1976.

BALIAN R. *Du microscopique au macroscopique, Cours de Physique de l'École Polytechnique*, Éditions Ellipses, tome 1 et 2, 1982.

BORGHI R. DESTRIAU M. *La combustion et les flammes*, Paris, Éditions Technip, 1995.

CETIAT, *Propriétés physiques de quelques fluides utilisés dans les échangeurs de chaleur*, Échangeurs de chaleur, Diffusion Tec et Doc.

FEIDT M. « Production de froid et revalorisation de la chaleur : machines cryogéniques », *Techniques de l'Ingénieur*, 2005, BE-8097, 12 pages.

Institut International du Froid (IIF, IIR), *Ammoniac, propriétés thermophysiques*, Tables et diagrammes pour l'industrie du froid.

PAPON P., LEBLOND J. *Thermodynamique des états de la matière*, Paris, Hermann Éditeurs, chapitres 4 et 9, 2000.

PHILIPPI I., *Caractéristiques thermodynamiques de l'air humide, Rapport intermédiaire de contrat*, LEMTA-GESPE, juin 1991.

RAZNJEVIC K. *Tables et diagrammes thermodynamiques*, Paris, Eyrolles, 1970.

REID, SHERWOOD, *Properties of gases and liquids*, Mc Graw Hill Editions, seconde édition, 1966.

SEDILLE M. *Turbomachines hydrauliques et thermiques*, Paris, Thermodynamique technique, Tome III, chapitre 7, 1969.

*Techniques de l'Ingénieur*, Paris, Constantes physicochimiques, Tome K, Mise à jour continue.

VIDAL J. *Thermodynamique ; application en génie chimique et à l'industrie pétrolière*, Paris, Éditions Technip, 1997.

## Chapitre 7

# Dégradations d'énergie – principe d'évolution

### 7.1 INTRODUCTION

Comme il a été vu dans les chapitres précédents, l'énergie thermique joue un rôle particulier dans l'ensemble des énergies : c'est une forme d'énergie dégradée. D'un point de vue fondamental et microscopique, cette énergie est liée à l'agitation désordonnée (non cohérente) des particules élémentaires étudiées, par opposition aux énergies nobles, qui se développent de manière cohérente ou ordonnée.

De ce fait, l'entropie, qui est sujette au principe d'extremum pour les positions d'équilibre (voir chapitre 4), joue un rôle particulier dans les transformations thermodynamiques d'une part, et de façon complémentaire dans toute situation irréversible.

On se propose ici :

- d'analyser la notion fondamentale de réversibilité-irréversibilité ;
- d'en étudier toutes les conséquences sur une transformation thermodynamique quelconque ;
- d'examiner la conséquence du second principe sur le bilan entropique ; des prolongements sur l'analyse entropique, puis énergétique seront abordés.

Les notions d'efficacité et de rendement seront aussi étudiées.

## 7.2 ÉQUILIBRE ET RÉVERSIBILITÉ

### 7.2.1 Équilibre d'un système homogène dans son environnement

#### a) Critère d'équilibre

Un système dans un état d'équilibre préserve la qualité de l'énergie, puisque les variables intensives internes sont égales aux valeurs correspondantes de l'environnement :

- équilibre mécanique (système fluide) ; égalité des pressions ;
- équilibre électrique ; égalité des potentiels électriques ;
- équilibre chimique ; égalité des potentiels chimiques ;
- équilibre thermique ; égalité des températures.

Toute combinaison donne un équilibre partiel ; la considération de toutes les formes d'énergie conduit à l'équilibre thermodynamique.

**Remarque :** le critère d'équilibre chimique sera étendu à l'équilibre d'un système hétérogène.

#### b) Critère de stabilité d'un équilibre

La notion de stabilité d'un système thermodynamique est liée à une perturbation de l'état considéré qui peut être stable, métastable, instable. La perturbation à laquelle est soumis le système est une transformation thermodynamique infinitésimale destinée à voir comment le système réagit à cette perturbation (par exemple fluctuation).

Le second principe (principe d'évolution) dit que l'entropie créée dans cette transformation infinitésimale  $T$ ,  $\partial S_T$  vaut

- $\partial S_T > 0$ , pour une transformation naturelle ou irréversible ;
- $\partial S_T < 0$ , pour une transformation non naturelle donc interdite, sauf compensation ;
- $\partial S_T = 0$ , pour une transformation réversible ; celle-ci correspond à un équilibre. L'entropie connaît alors un maximum, dont on s'assure par la concavité de la fonction  $S$  autour du point considéré.

#### ➤ Équilibre général d'un système isolé

L'entropie du système isolé, de masse constante, est une fonction de  $U$ ,  $V$ , telle que  $U$  et  $V$  sont invariants :

$$dU = dV = 0$$

Il en résulte que  $dS = 0$ , qui correspond à un maximum de l'entropie, comme il a été énoncé. Le seul système idéal envisageable comme étant isolé est l'univers, dont l'entropie tend vers un maximum.

#### ➤ Équilibre d'un système pour lequel $S$ et $V$ sont conservatifs

$S$  et  $V$  conservatifs correspond à  $dS = dV = 0$ , dans la transformation élémentaire. Le bilan d'énergie sur le système et son complément dans l'univers, appelé extérieur induit :

$$dU + dU_{ext} = 0 \quad (7.1)$$

On en déduit :

$$dS_{ext} = -\frac{dU}{T_{ext}} \quad (7.2)$$

Sachant que  $S_{ext}$  tend vers un maximum à l'état stable, la fonction  $U$  tend vers un minimum pour ce même état.

► Équilibre d'un système pour lequel  $P$  et  $T$  sont conservatifs

Pour la transformation :

$$dS_T = dS_{ext} + dS \quad (7.3)$$

avec :  $dU_{ext} + dU = 0$  (1<sup>er</sup> principe) ;  $dV_{ext} + dV = 0$

On en déduit :

$$dS_T = dS - \frac{dU}{T} - \frac{PdV}{T} = -\frac{1}{T}[dU + PdV - TdS] \quad (7.4)$$

En remarquant que dans les conditions intensives du système ( $P, T$  constants),  $d(U + PV - TS) = dU + PdV - TdS$ , il vient :

$dT = 0$  ;  $dP = 0$  ;  $dG = 0$  comme condition d'équilibre ( $G$  est un minimum).

**Remarque :** l'état d'équilibre stable d'un système permet de définir quatre fonctions d'état caractéristiques :

$U(S, V)$  qui est minimale à l'équilibre et  $S, V = \text{ctes}$  ;

$F(T, V)$  qui est minimale à l'équilibre et  $T, V = \text{ctes}$  ;

( $F = U - TS$ , énergie libre) ;

$H(S, P)$  qui est minimale à l'équilibre et  $S, P = \text{ctes}$  ;

$G(T, P)$  qui est minimale à l'équilibre et  $T, P = \text{ctes}$  ;

( $G = H - TS$ , enthalpie libre).

## 7.2.2 Transformation réversible

La propriété de réversibilité (ou irréversibilité) caractérise une transformation thermodynamique idéale (ou naturelle, réelle).

### a) Définition

Une transformation thermodynamique réversible ne dégrade pas d'énergies nobles, quelle que soit leur forme.

Le corollaire de cette définition est que la transformation thermodynamique réversible passe par une suite infinie d'états d'équilibre ; cette condition correspond souvent à une évolution très lente dans le temps (voire en temps infini). On lui donne aussi le nom de quasi statique. Mais la réversibilité n'est pas nécessairement liée à une évolution cinétique lente.

### b) Exemples

#### Exemple physique

Le changement de phase d'un corps pur autour des conditions d'équilibre de température et de pression illustre un échange de chaleur de type réversible.

Cas de l'eau dans les conditions de pression atmosphérique autour de 0 °C ou 100 °C. Une très petite perturbation (par exemple, en température) au voisinage de ces deux seuils permet d'inverser la transformation.

$0 + \varepsilon \rightarrow$  liquéfaction ;  $0 - \varepsilon \rightarrow$  solidification ;

$100 + \varepsilon \rightarrow$  vaporisation ;  $100 - \varepsilon \rightarrow$  liquéfaction.

#### Exemple mathématique

Soit une fonction d'onde électromagnétique  $\psi$ , représentant la propagation du champ électrique ou du champ magnétique (de la lumière) dans le vide parfait selon la direction de propagation  $x$  (modèle filaire, correspondant à l'optique géométrique) :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

$c_0$ , vitesse de la lumière dans le vide.

Cette équation conserve la même forme (reste invariante) par renversement du temps :  $t \Rightarrow$  onde progressive ;  $-t \Rightarrow$  onde régressive. La transformation (propagation) ne dépend pas du sens du temps ; l'onde n'a ni passé, ni futur : la transformation est réversible, par opposition à une transformation soumise à la flèche du temps (distinction entre le passé et le futur avec comme interface l'instant présent).

## 7.3 TRANSFORMATION RÉELLE ET IRRÉVERSIBILITÉ

### 7.3.1 Quelques exemples de mécanismes irréversibles

#### a) Exemple mathématique

L'équation de la chaleur rendant compte dans le cas général de la conduction instationnaire dans un solide en l'absence de source ou puits :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}[-\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}] \quad (7.5)$$

est une équation qui dépend de la flèche du temps : le transfert de chaleur s'effectue naturellement des hautes températures vers les basses températures, jusqu'à l'équilibre thermique, s'il est possible.

#### b) Exemples physiques

On se contentera ici de citer de façon non exhaustive les mécanismes irréversibles suivants.

Les transferts de chaleur convectifs ou radiatifs : les premiers sont liés à un déséquilibre de pression motrice en convection forcée, et à un déséquilibre thermique en convection naturelle ; les transferts radiatifs sont dus aussi à un déséquilibre thermique.

Les transferts de matière en écoulement : ceux-ci font apparaître des frottements mécaniques fluides qui peuvent être complexes (écoulements de poudres ou granulaires), ou plus simples (écoulements visqueux).

Les frottements mécaniques solides : deux surfaces en contact en mouvement relatif font apparaître des frottements mécaniques linéaires (piston dans un cylindre) et rotatifs (arbre sur ses paliers).

Les transferts de charges électriques : l'électrocinétique a montré (loi de Joule) que l'écoulement des charges dans un milieu matériel donne lieu à une dissipation thermique appelée effet Joule.

Dissipation physique : la diffusion d'un constituant dans un autre ou un mélange est un phénomène irréversible :

- panaches de fumée ou de polluants dans l'atmosphère ;
- sucre fondant dans un verre de liquide (sans agitation).

### c) Conclusions

À chaque forme d'énergie est associée une forme d'irréversibilité (y compris l'énergie thermique). Les dissipations apparaissent dans les conditions hors équilibre qui font apparaître des gradients moteurs, produisant les flux associés.

Par ailleurs des irréversibilités se produisent dans le volume du système ; on les appelle irréversibilités internes. D'autres irréversibilités se produisent à l'interaction du système avec son environnement ; on les appelle irréversibilités externes. Aussi, dans une transformation élémentaire quelconque soumise au principe d'équilibre local, on a :

$$dS = \delta S_e + \delta S_i \quad (7.6)$$

$dS$ , différentielle totale ( $S$ , fonction d'état)

$\delta S_e$ , entropie élémentaire échangée avec l'extérieur (entropie d'échange)

$\delta S_i$ , entropie créée dans l'irréversibilité de la transformation (entropie d'irréversibilités).

$\delta S_e$  et  $\delta S_i$  sont des formes différentielles dépendantes du chemin suivi par la transformation.

**Remarque 1 :** pour une transformation réversible,  $\delta S_i = 0$ . Pour toute transformation réelle, donc irréversible  $\delta S_i > 0$ .

**Remarque 2 :** l'irréversibilité est caractéristique d'une transformation thermodynamique plus que du système matériel qui en est le siège.

## 7.3.2 Transformation thermomécanique réelle élémentaire

### a) Système thermomécanique 3D

La figure 7.1 représente une évolution thermodynamique élémentaire du système, dans des conditions réelles hors équilibre :  $P_{ext}$  est différent de  $P$ , pression intérieure.

$$\delta W_{ext} = -P_{ext} \cdot dV \quad (7.7)$$

représente le travail des forces de pression extérieures fourni au système si  $dV$  négatif (récepteur), cédé par le système à l'environnement si  $dV$  positif (moteur).

Dans le même temps :

$$\delta W = -P \cdot dV \quad (7.8)$$

représente le travail des forces de pression internes, avec les mêmes conventions thermodynamiques.

Par différence entre (7.7) et (7.8), il vient :

$$\delta W_f = \delta W_{ext} - \delta W = -(P_{ext} - P) dV \quad (7.9)$$

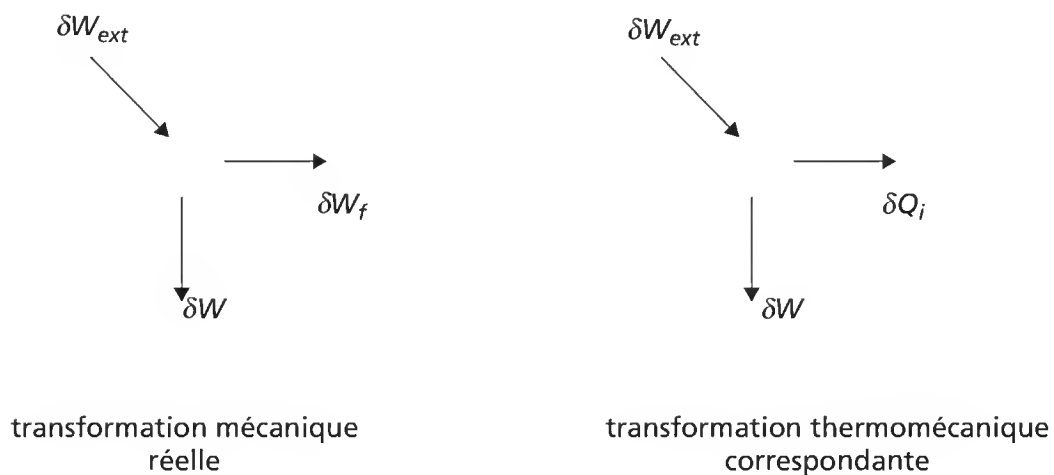


Figure 7.1 Dissipation mécanique

$\delta W_f$  représente l'énergie mécanique dégradée par frottement dans la transformation ; elle peut s'écrire :

$$\delta W_f = -\Delta P \cdot dV \quad (7.10)$$

On voit alors apparaître un gradient (une différence) des forces de pression ; pour un récepteur,  $\Delta P$  est positif,  $\delta W_f$  aussi ; dans le cas d'un moteur,  $\Delta P$  est négatif,  $\delta W_f$  positif.  $\delta W_f$  possède donc un signe constant, quel que soit le sens de la transformation. Le travail mécanique dissipé sous forme de chaleur  $\delta Q_i$  (décohérence de l'énergie mécanique) peut s'écrire dans le cas d'un système adiabatique :

$$\delta Q_i = T \delta S_i = \delta W_f \quad (7.11)$$

vu que :

$$dU = T \delta S_i - P dV = \delta W_{ext}$$

**Remarque 1 :** les frottements mécaniques décrits de façon globale ci-dessus revêtent deux formes principales :



– les frottements en volume (ou fluide), traduisant la viscosité du milieu ; seul un liquide parfait, sans viscosité pourrait conduire à une réversibilité de l'écoulement.  
 – les frottements aux interfaces (aux frontières) ; l'illustration en est le frottement mécanique solide-solide relevant de la tribologie et qui traduit toujours une réaction (une résistance) au déplacement imposé. Dans ce cas, l'échauffement peut se répartir entre l'intérieur et l'extérieur du système.

**Remarque 2 :** le travail minimum à mettre en jeu, tant en récepteur qu'en moteur, correspond aux conditions limites idéales de la réversibilité (Formule 7.9) telles que :

$$\delta W_{ext} = \delta W = \delta W_{rev}$$

**Remarque 3 :** comme il sera développé par la suite,  $\Delta P$  est une fonction généralement des flux des variables caractérisant l'évolution  $\overset{o}{P}, \overset{o}{V}$ , et plus particulièrement des variables extensives.

### b) Généralisation aux autres formes d'énergie

De même que pour l'énergie mécanique, on peut faire apparaître des irréversibilités pour les autres formes d'énergie dont chimique (entre autres réactions de combustion), et aussi thermique ; mais ce dernier cas nécessite un examen particulier.

#### ► Cas des énergies nobles

En appelant  $X$  la variable générale intensive et  $Y$  la variable générale conjuguée extensive, on trouve :

$$\delta W_{ext} = X_{ext} dY; \delta W = X dY$$

En notant  $\delta W_d$  l'énergie dégradée, il vient :

$$\delta W_d = \Delta X \cdot dY \quad (7.12)$$

avec :  $\Delta X = X_{ext} - X$

On en déduit :

$$\delta Q_i = T \cdot \delta S_i = \delta W_d \quad (7.13)$$

l'énergie dégradée est dissipée sous forme de chaleur ( $\delta Q_i > 0$ ) quel que soit le système (récepteur ou moteur).

#### ► Cas des transferts thermiques

Ce cas nécessite quelques précautions, la frontière au système n'étant plus adiabatique ; l'énergie thermique se conserve néanmoins, de sorte que :

$$\delta Q_{ext} = \delta Q \quad (7.14)$$

$$\text{Or, } \delta Q_{ext} = T_{ext} dS_{ext}; \delta Q = T dS$$

l'entropie étant une fonction d'état thermodynamique.

On en déduit :

$$dS - dS_{ext} = \delta Q \left( \frac{T_{ext} - T}{TT_{ext}} \right)$$

D'où l'entropie créée dans le transfert :

$$\delta S_i = \delta Q \frac{\Delta T}{T \cdot T_{ext}} \quad (7.15)$$

avec  $\Delta T = T_{ext} - T$ , gradient de température.

**Remarque :**  $\delta S_i$  correspondant à  $\delta Q_i / T$  est accessible à la mesure, de même que  $\delta W_i$  (formule 7.13). Ceci est à la base de l'analyse entropique.

### 7.3.3 Transformation polytropique conservative généralisée

#### a) Système thermomécanique 3D

On suppose ici un fluide compressible (gaz), en contact thermique avec une capacité calorifique constante  $C$  ; l'évolution non adiabatique du fluide est supposée telle que l'équilibre thermique est maintenu entre le fluide et la capacité lors de l'évolution (diabacité parfaite ; conductance de transfert infinie).

Dans une transformation élémentaire, la capacité calorifique échange :

$$\delta Q = C dT \quad (7.16)$$

Le gaz, s'il est supposé parfait, reçoit :

$$\delta Q = dU - \delta W = C_v dT + P dV \quad (7.17)$$

La combinaison de (7.16, 7.17) et de l'équation d'état conduit par élimination de la pression  $P$  à :

$$\left( \frac{NR}{\gamma - 1} + C \right) \frac{dP}{P} + \left( \frac{N\gamma R}{\gamma - 1} + C \right) \frac{dV}{V} = 0 \quad (7.18)$$

avec  $\gamma = C_p / C_v$ ,  $N$  nombre de moles du gaz.

L'intégration de (7.18) fournit :

$$PV^k = cte \quad \text{avec} \quad k = \frac{N\gamma R + C(\gamma - 1)}{NR + C(\gamma - 1)}$$

Cette équation représente le comportement thermomécanique général du système fluide compressible dans une transformation conservative (équilibre mécanique et thermique), mais non adiabatique ; cette transformation est dite polytropique.

Si la capacité est infinie (thermostat), la limite correspondante est  $k = 1$  : on retrouve l'équation d'état du gaz parfait, associée à la transformation isotherme.

En revanche, si la capacité tend vers zéro (adiabacité), la limite correspondante est  $k = \gamma$  : on retrouve l'équation de Laplace associée à la transformation adiabatique réversible du gaz parfait.

Dans tous les autres cas,  $k$  est compris entre ces deux valeurs limites.

## b) Généralisation de la transformation polytropique

## ► Transformations thermodynamiques

Parmi les transformations thermodynamiques courantes, nous avons rencontré :

- les transformations isochores :  $V = \text{cte}$  ;
- les transformations isotropiques :  $S = \text{cte}$ , ou adiabatique réversible ;
- les transformations à énergie interne constante :  $U = \text{cte}$  ;
- les transformations adiabatiques : sans échange de chaleur avec l'extérieur.

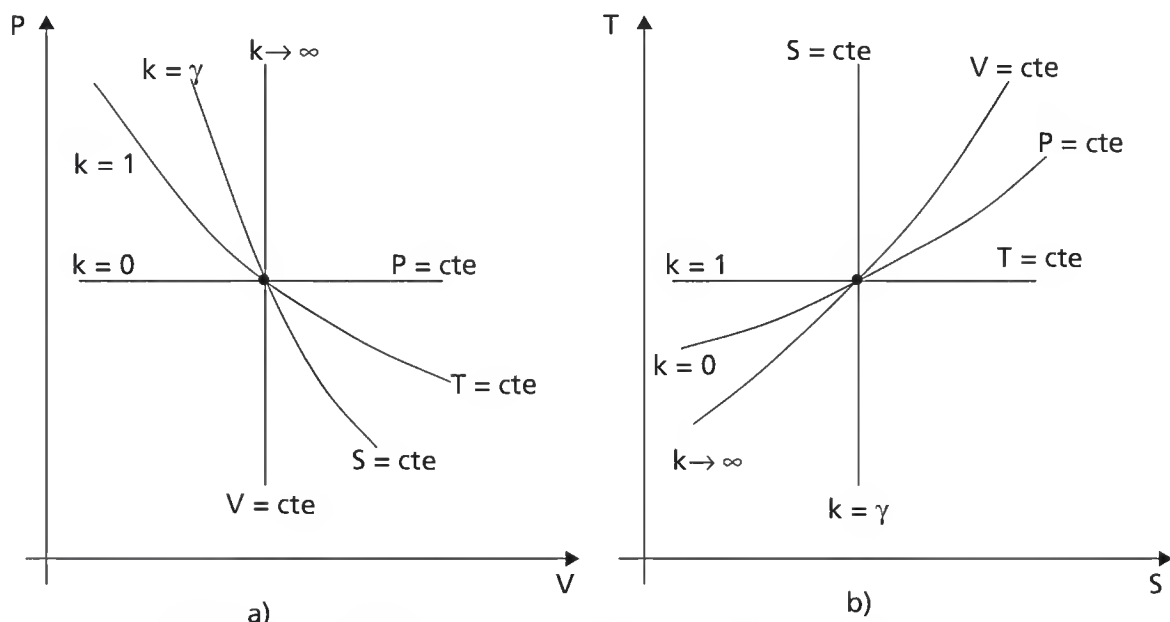
Pour les systèmes thermomécaniques, deux transformations avec des variables intensives constantes sont importantes :

- les transformations à température constante :  $T = \text{cte}$  ou isotherme ;
- les transformations à pression constante :  $P = \text{cte}$  ou isobare.

On rappelle, par ailleurs, que les transformations à masse (ou nombre de moles constant) sont associées aux systèmes fermés.

D'autres transformations interviendront, comme les transformations isenthalpes ( $H = \text{cte}$ ) ou les transformations isotitres ( $x = \text{cte}$ ).

De façon générale pour un système thermomécanique, les transformations thermodynamiques sont représentées soit en diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ) lorsque l'énergie mécanique est privilégiée, soit en diagramme entropique ( $T, S$ ) lorsque l'énergie calorifique est considérée.



**Figure 7.2** Représentation des transformations thermodynamiques  
a) en diagramme de Clapeyron b) en diagramme entropique.

Selon la nature du système auquel on applique un processus particulier, il devient possible de définir une transformation locale liant en particulier les

variables  $P$  et  $V$  selon  $PV^k = \text{cte}$ . La validité de la transformation locale s'étendra plus ou moins au-delà du point initial ; une transformation finie quelconque pourra toujours être décomposée en une suite de transformations polytropiques.

Souvent, pour caractériser un système thermodynamique, on ne connaît que les valeurs des variables initiales  $(P_i V_i)$ , puis finales  $(P_f V_f)$  de la transformation ; on détermine alors un coefficient polytropique équivalent tel que :

$$k = \frac{\ln P_f - \ln P_i}{\ln V_f - \ln V_i} \quad (7.19)$$

► Transformation thermodynamique polytropique conservative généralisée

Soit un système thermoénergétique dont l'énergie a pour variable intensive  $X$ , et pour variable extensive  $Y$  :  $\delta W = X.dY$

$U$  est une fonction des variables  $T, Y$  telle que :

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_Y dT + \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_T dY = C_k dT + X dY \quad (7.20)$$

$C_k$ , capacité calorifique polytropique généralisée.

Dans les conditions d'indéformabilité généralisée ( $Y = \text{cte}$  ;  $dY = 0$ ), il vient :

$$C_k = C_Y = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_Y \quad (7.21)$$

D'où la nouvelle écriture de (7.20) :

$$C_k dT = C_Y dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_T - X \right] dY \quad (7.22)$$

L'équation s'écrit successivement :

$$(C_k - C_Y) \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial X} \right)_Y dX + \left( \frac{\partial T}{\partial Y} \right)_X dY \right] = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_T - X \right] dY \quad (7.23)$$

pour la polytrophe :

$$(C_X - C_Y) \left[ \frac{\partial T}{\partial Y} \right]_X dY = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_T - X \right] dY \quad (7.24)$$

pour la transformation à intensité  $X = \text{cte}$ .

La combinaison de (7.23) et (7.24) conduit après quelques calculs simples à :

$$\boxed{\left( \frac{\partial T}{\partial X} \right)_Y dX + k \left( \frac{\partial T}{\partial Y} \right)_X dY = 0} \quad (7.25)$$

avec  $k = \frac{C_k - C_X}{C_k - C_Y}$ , exposant polytropique généralisé.

La relation (7.25) représente l'équation différentielle de la transformation thermodynamique polytropique conservative généralisée ; le lecteur pourra vérifier, en introduisant le coefficient isentropique généralisé  $\gamma_G = C_X / C_Y$  que :

$$C_k = C_Y \frac{k - \gamma_G}{k - 1} \quad (7.26)$$

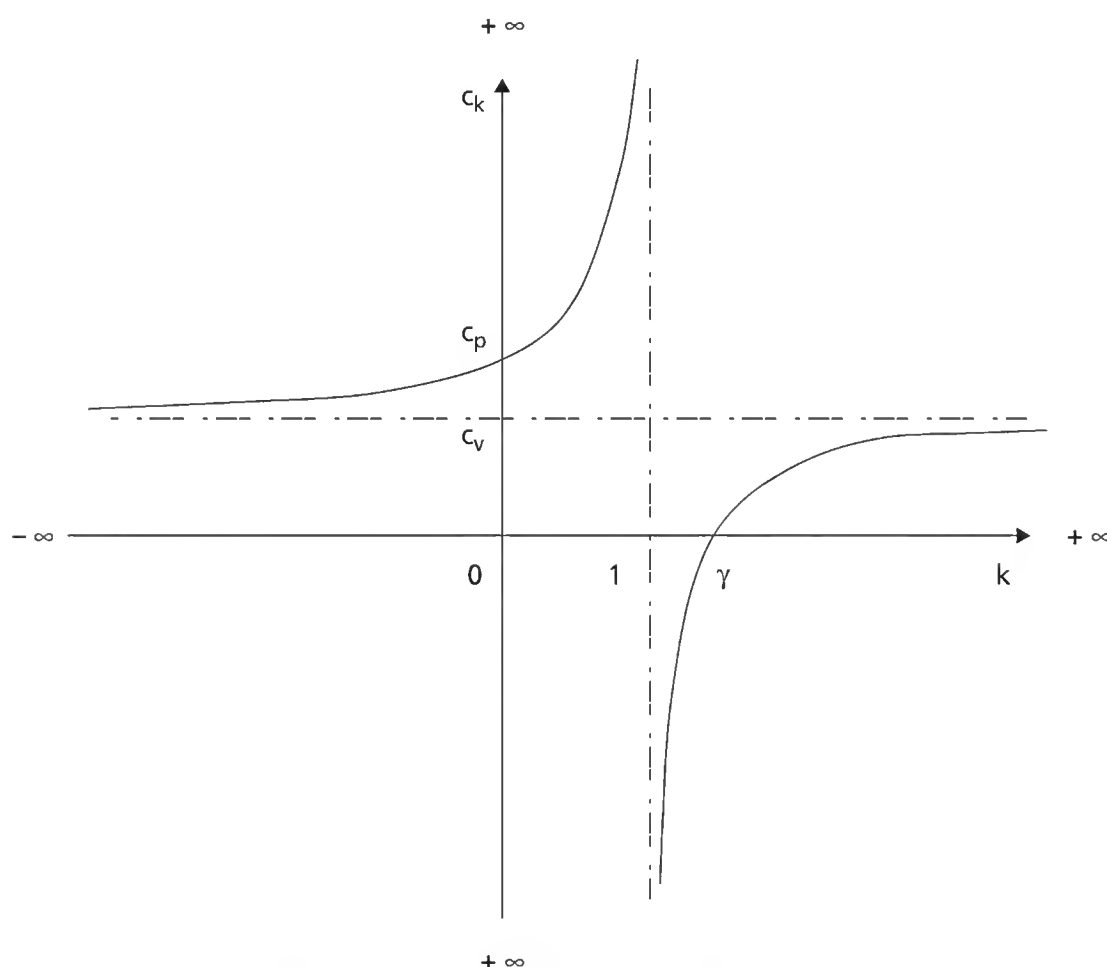


Figure 7.3 Représentation graphique de  $C_k = f(k)$

Le lecteur pourra particulariser les résultats précédents au cas du gaz parfait, mais aussi aux substances paramagnétiques, aux matériaux élastiques.

## 7.4 EFFICACITÉ D'UNE MACHINE OU D'UN PROCÉDÉ

### 7.4.1 Rappel de quelques énoncés du second principe de la thermodynamique

Nous nous appuierons sur l'énoncé du principe d'évolution, qui est un principe d'extrémum. Historiquement, S. Carnot a le premier énoncé ce principe ; son approche sera détaillée et ré-examinée dans le paragraphe suivant.

D'autres énoncés ont été proposés entre les deux approches précédentes. Parmi ceux-ci on citera :

► L'énoncé de Clausius

Il est centré sur l'écoulement de la chaleur, dont le sens naturel (irréversible) est du chaud au froid. Tout transfert de chaleur d'un corps froid à un corps chaud nécessite une compensation ; l'illustration courante qui en sera faite portera sur les machines à cycles inverses (machines à froid ; pompes à chaleur ; climatiseurs).

► L'énoncé de Kelvin

Cet énoncé qui postule l'impossibilité d'obtenir un travail moteur à l'aide d'un cycle ne faisant intervenir qu'un seul réservoir de chaleur (impossibilité du moteur thermomécanique monotherme), conduit naturellement vers les machines à deux réservoirs de chaleur explorés par S. Carnot.

## 7.4.2 L'approche de S. Carnot ; notion d'efficacité

### a) Le cycle de Carnot réversible

Le cycle de Carnot réversible fait apparaître les transformations thermodynamiques successives :

- une transformation isotherme à la température  $T_{SC}$  de la source chaude supposée thermostat (capacité thermique infinie) ;
- une transformation isentropique assurant le passage de la température  $T_{SC}$  à la température  $T_{SF}$ , température du puits froid supposé aussi thermostat ;
- une transformation isotherme à cette température, réciproque de la première isotherme où une partie de la chaleur reçue à  $T_{SC}$ , est rétrocédée à  $T_{SF}$  (diminution d'entropie correspondante) ;
- une transformation isentropique boucle le cycle en assurant le passage de  $T_{SF}$  à  $T_{SC}$ .

**Remarque 1 :** une représentation équivalente de ce cycle est possible dans le diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ).

**Remarque 2 :** le cycle représenté ( $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ ) est un cycle direct correspondant au fonctionnement en moteur.

Conformément aux conventions thermodynamiques, le travail du moteur  $\Delta W$  est négatif, de même que la quantité de chaleur rétrocédée au puits froid  $\Delta Q_F$  ; seule  $\Delta Q_C$ , la quantité de chaleur reçue de la source chaude est positive (voir le schéma du moteur thermomécanique, Figure 7.5.a).

Pour un récepteur, tous les signes sont inversés ; le cycle est d'ailleurs un cycle inverse parcouru de  $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  ; le récepteur prélève de la chaleur  $\Delta Q_F$  à la source froide, pour restituer  $\Delta Q_C$  au puits chaud, moyennant compensation par le travail mécanique reçu  $\Delta W$ .

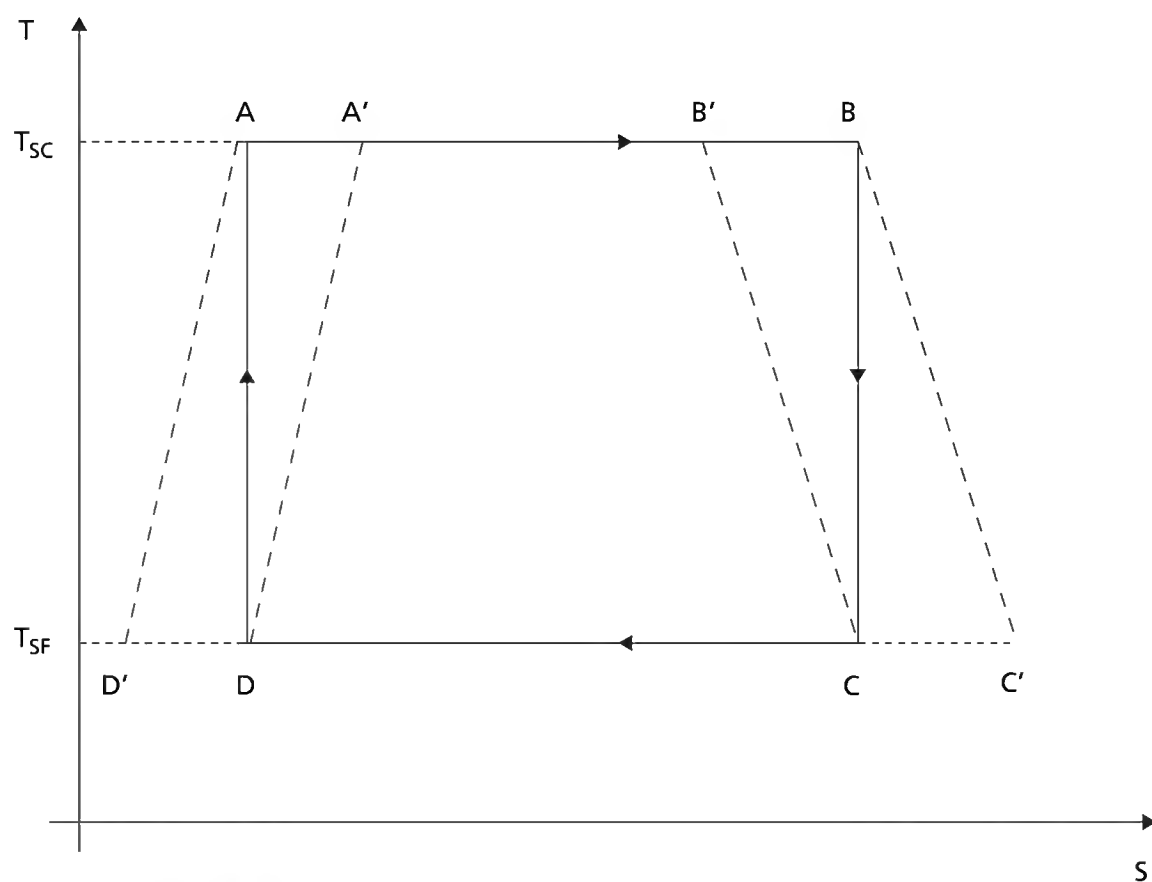


Figure 7.4 Cycle de Carnot réversible en diagramme entropique

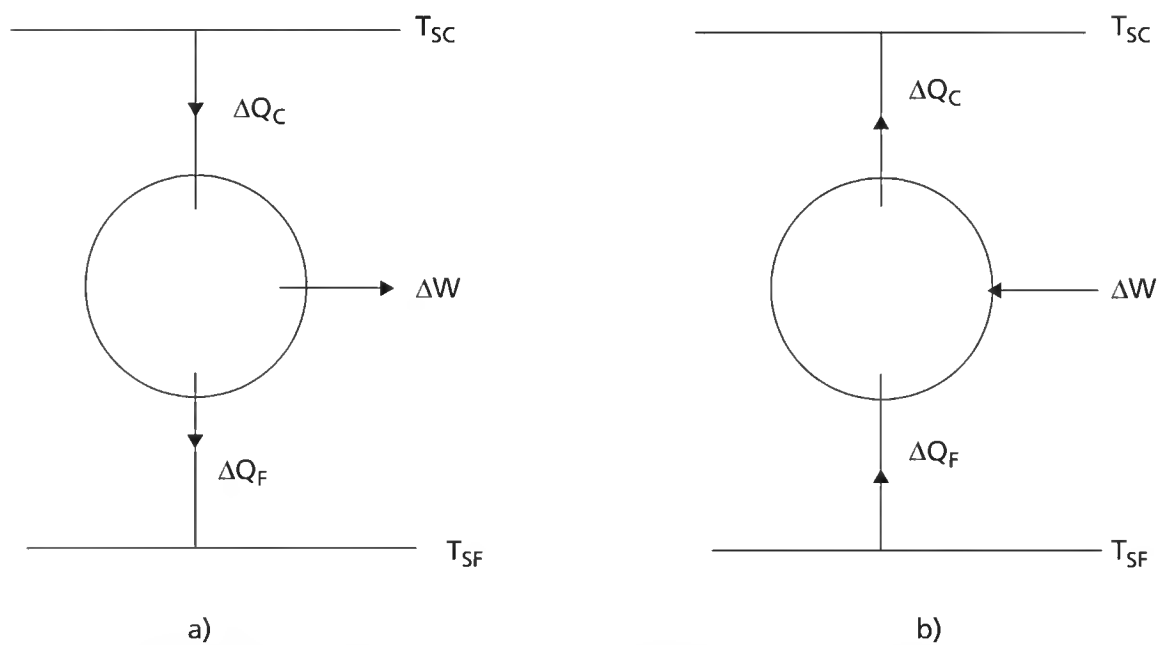


Figure 7.5 Schéma d'un moteur (a) et d'un récepteur (b) de Carnot



Dans les deux cas, le bilan énergétique du cycle s'écrit :

$$\Delta W + \Delta Q_C + \Delta Q_F = 0 \quad (7.27)$$

**b) Notion d'efficacité au sens du premier principe**

L'efficacité au sens du premier principe (équivalence de la chaleur avec les énergies nobles) est mesurée à partir de la connaissance de l'effet utile (E.U.) recherché, qui correspond à une certaine dépense énergétique (D.E.) ; l'efficacité énergétique d'un système ou procédé est mesurée par le quotient de l'effet utile, par la dépense énergétique :

$$\text{efficacité}_I = \frac{E.U.}{D.E.} \quad (7.28)$$

► Rendement d'une machine motrice thermomécanique réversible de Carnot

Conformément à la définition (7.28), il vient

$$\eta_{I_M} = \frac{|\Delta W|}{\Delta Q_C} = 1 - \frac{|\Delta Q_F|}{\Delta Q_C} \quad (7.29)$$

$\eta_{I_M}$ , rendement d'un moteur au sens du premier principe de la thermodynamique ; ce rendement est nécessairement inférieur ou égal à 1 à la limite.

L'entropie étant une fonction d'état, son intégration sur le cycle réversible correspond à :

$$\oint dS = 0 = \frac{\Delta Q_F}{T_{SF}} + \frac{\Delta Q_C}{T_{SC}} \quad (7.30)$$

La combinaison des relations (7.29) et (7.30) fournit une expression du rendement uniquement fonction des températures absolues des sources et puits dans les conditions de réversibilité :

$$\eta_{I_{MC}} = 1 - \frac{T_{SF}}{T_{SC}} \quad (7.31)$$

Ce rendement est aussi appelé rendement de Carnot.

► Coefficient de performance (COP) d'une machine réceptrice de Carnot

Le même raisonnement que ci-dessus conduit à la même relation (7.30). Toutefois, il y a lieu de remarquer que l'efficacité d'une machine à froid (MAF) a pour définition, au sens du premier principe :

$$COP_{MAF} = \frac{\Delta Q_F}{\Delta W} \quad (7.32)$$

De même pour une pompe à chaleur (PAC) :

$$COP_{PAC} = \frac{|\Delta Q_C|}{\Delta W} \quad (7.33)$$



**Remarque 1 :** on voit aisément que pour un récepteur quel qu'il soit :  $COP_{PAC} = COP_{MAF} + 1 \geq 1$ .

**Remarque 2 :** pour les machines à froid à deux réservoirs de chaleur, le COP est aussi couramment supérieur à l'unité. Cette remarque différencie les COP des rendements de moteur, toujours inférieurs à l'unité.

La combinaison de (7.30) avec (7.32), respectivement (7.33) conduit directement aux COP des récepteurs dithermes réversibles :

$$COP_{MAFC} = \frac{T_{SF}}{T_{SC} - T_{SF}} \quad (7.34)$$

$$COP_{PACC} = \frac{T_{SC}}{T_{SC} - T_{SF}} \quad (7.35)$$

**Remarque 3 :** l'extension du raisonnement précédent à une machine thermique faisant intervenir un nombre quelconque de sources et de puits de chaleur est possible. Cette extension sera utile pour les machines trithermes et quadrithermes, ainsi que pour les systèmes polyénergies (cogénération, trigénération).

### 7.4.3 Étude thermodynamique d'une machine intérieurement irréversible

#### a) Cycle moteur à irréversibilité interne

Le cycle correspondant à cette machine peut être représenté sur la figure 7.4 par le trajet  $D \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow D$ . Les transferts thermiques aux source et puits sont supposés réversibles (réversibilité externe). Les irréversibilités internes correspondent à  $S_{A \rightarrow A'}$  et  $S_{B' \rightarrow B}$ , comme il est vu sur le cycle. On pose ici  $\Delta S_i$ , entropie d'irréversibilité (ou créée) telle que :  $\Delta S_i = S_{A \rightarrow A'} + S_{B' \rightarrow B}$ .

De ce fait, l'équation (7.30) devient par intégration de l'entropie sur le cycle :

$$\frac{\Delta Q_F}{T_{SF}} + \frac{\Delta Q_C}{T_{SC}} + \Delta S_i = 0 \quad (7.36)$$

L'élimination de  $\Delta Q_F$  entre (7.27) et (7.36) conduit à :

$$\eta_{IM} = \eta_{IMC} - \frac{T_{SF} \cdot \Delta S_i}{\Delta Q_C} \quad (7.37)$$

On voit sur cette relation que  $\eta_{IM} < \eta_{IMC}$ , qui constitue donc une borne supérieure au rendement du moteur thermomécanique ; l'égalité ne se produit que lorsque l'irréversibilité (interne ici) disparaît. Par ailleurs à  $T_{SF}$  donné (paramètre) le moteur aura un rendement d'autant plus élevé que le rapport  $\Delta S_i / \Delta Q_C$  sera faible.

**Remarque :** le même raisonnement peut être conduit avec le trajet  $D' \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C' \rightarrow D'$ , qui correspond à des contraintes externes différentes (à la source et non plus au puits).

**b) Efficacité du moteur thermomécanique au sens du second principe**

$\eta_{IMC}$  étant le rendement limite alloué par les principes de la thermodynamique, il est possible de rendre compte de l'écart à cette limite, en faisant le rapport entre le rendement réel et ce rendement limite :

$$\eta_{IIM} = \frac{\eta_{IM}}{\eta_{IMC}} \quad (7.38)$$

On obtient alors le rendement du moteur placé dans son environnement thermique :  $T_{SF}$ , température du thermostat froid, correspond généralement à la température ambiante  $T_{amb}$ , qui est la référence  $T_o$  du potentiel thermique dans la majorité des études. Il vient alors :

$$\eta_{IIM} = 1 - \frac{T_{SF} \Delta S_i}{\eta_{IMC} \Delta Q_C} \quad (7.39)$$

$\eta_{IIM}$  est inférieur à 1 ; l'égalité n'est possible que dans la situation de réversibilité  $\Delta A_n = T_{SF} \Delta S_i$  représente ici l'anergie, ou exergie détruite durant le cycle irréversible  $\Delta Ex_C = \eta_{IMC} \Delta Q_C$  représente l'exergie fournie par la source chaude au moteur ; cette exergie correspond à l'énergie utilisable que peut fournir la source chaude à  $T_{SC}$ , placée dans un environnement à  $T_o = T_{SF}$ .

**Remarque :** l'anergie correspond à de l'exergie détruite, mais aussi à l'entropie créée, au facteur multiplicatif  $T_o$  près, qui caractérise l'environnement ; la conservation de l'énergie totale impose alors (1<sup>er</sup> principe, principe de conservation) de façon générale :

$$\Delta E = \Delta Ex + \Delta A_n$$

Le lecteur pourra reprendre la même démarche pour le récepteur ditherme, soit en machine à froid, soit en récepteur. Ces notions seront abondamment utilisées et développées dans la suite de l'ouvrage.

## 7.5 BILANS ENTROPIQUES ET EXERGÉTIQUES

### 7.5.1 Bilan entropique pour un système ouvert

La démarche est identique à celle utilisée pour les bilans conservatifs (principe de conservation). Pour un système ouvert, à tout transfert de matière sera associé un transfert d'entropie, associé à l'entropie spécifique massique  $s$  de cette matière. Il vient donc pour une transformation thermodynamique de durée  $dt$  :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_i + \sum_i s_i dm_i \quad (7.40)$$

$T$ , température de l'interface où se produit l'échange  $\delta Q$

$\delta S_i$ , entropie créée dans la transformation élémentaire par les différentes formes d'irrégularités existant dans le système et à sa frontière.

**Remarque 1 :** pour un système fermé, (7.40) se limite aux deux premiers termes du membre de droite.

**Remarque 2 :** pour un système isolé, il n'y a plus que le second terme de ce même membre.

**Remarque 3 :** le terme du membre de gauche traduit le stockage (algébrique) d'entropie dans le système, dû à la transformation.

En régime dynamique stationnaire et selon les conventions de l'ingénieur, le bilan entropique devient :

$$\sum_s s_s \dot{m}_s = \sum_e s_e \dot{m}_e + \frac{\dot{Q}}{T} + \dot{S}_i \quad (7.41)$$

On voit ici l'importance du terme  $\dot{S}_i$  (et de l'analyse entropique) et comment remonter à sa connaissance en particulier dans des conditions d'adiabaticité.

**Remarque :** il est possible de donner des expressions différentielles et intégrales du bilan entropique pour un corps pur (ou équivalent) en l'absence de réactions chimiques.

La même démarche que celle conduisant à (7.40) peut être conduite pour un système fermé en présence de réactions chimiques. Il vient alors pour la transformation de durée  $dt$  :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_i + \sum_p s_p dm_p - \sum_r s_r dm_r \quad (7.42)$$

$\delta S_i$  représente la création d'entropie liée à la réaction chimique

$p$ , produits de réaction

$r$ , réactifs

## 7.5.2 Bilan exergetique pour un système ouvert

Soit le système thermodynamique représenté Figure 7.6, dont la frontière est conventionnellement dans les conditions de l'environnement immédiat (température  $T_o$  du thermostat ambiant quels que soient les transferts thermiques, qui sont assurés par les écarts de température entre la frontière et l'intérieur du volume de contrôle : irréversibilité de transfert attribuée en interne au système).

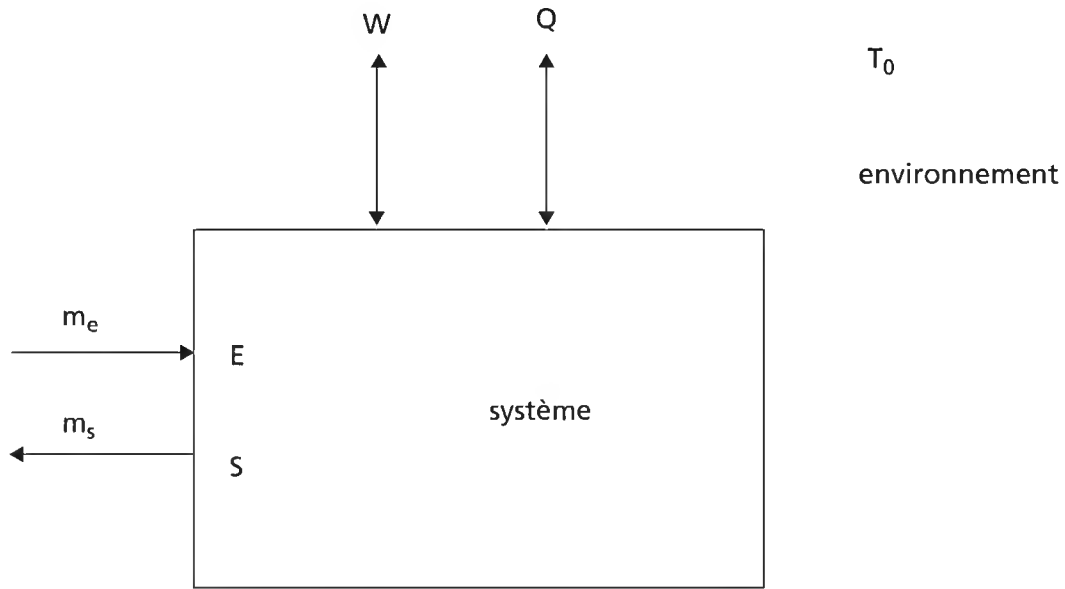


Figure 7.6 Système plongé dans l'environnement  $T_o$

Le premier et le second principe de la thermodynamique permettent alors d'écrire pour une transformation thermodynamique quelconque de durée  $dt$  (régime transitoire) (convention de l'ingénieur) :

$$\frac{dE}{dt} = \sum_e \dot{m}_e \left( h_e + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) + \dot{Q} + \dot{W} - \sum_s \dot{m}_s \left( h_s + \frac{1}{2} v_s^2 + g z_s \right) \quad (7.43)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_e \dot{m}_e s_e + \frac{\dot{Q}}{T_o} + \dot{S}_i - \sum_s \dot{m}_s s_s \quad (7.44)$$

$E$ , énergie interne totale du système

$S$ , entropie du système

Par élimination de  $\dot{Q}$  entre (7.43) et (7.44), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(E - T_o S) = & \sum_e \dot{m}_e \left( h_e - T_o s_e + \frac{1}{2} v_e^2 + g z_e \right) \\ & + \dot{W} - T_o \dot{S}_i - \sum_s \dot{m}_s \left( h_s - T_o s_s + \frac{1}{2} v_s^2 + g z_s \right) \end{aligned} \quad (7.45)$$

On retrouve ici un résultat proposé, depuis longtemps, par (Gouy M.), puis Stodola A., Darrieus G. (Darrieus G.), et qui se développe depuis quelques années sous forme de l'analyse exergetique, en particulier sous l'impulsion de Szargut J. (Szargut J.), (Benelmir R.).

**Définition :** l'exergie est la quantité d'énergie noble (mécanisable) qu'il est possible d'obtenir avec de la matière qui est portée, dans la transformation réversible mise en œuvre, à l'équilibre thermodynamique avec les composants naturels de l'environnement avec lesquels elle interagit et uniquement avec ceux-ci.

### a) Bilan d'exergie en régime dynamique stationnaire

La particularisation de (7.45) au régime dynamique stationnaire, hors énergie cinétique et potentielle, conduit avec les conventions de l'ingénieur à :

$$\dot{w} = \sum_s \dot{m}_s (h_s - T_o s_s) - \sum_e \dot{m}_e (h_e - T_o s_e) - T_o \dot{S}_i \quad (7.46)$$

Il apparaît alors l'exergie spécifique massique,  $ex = h - T_o s$ , qui est une fonction d'état, représentant l'énergie utilisable par rapport à l'état de référence  $T_o$ .

Le terme  $T_o \dot{S}_i$  restitue l'énergie dégradée (perdue) dans la transformation  $\dot{w}_d$ , ou  $\dot{E}x_d$  (exergie détruite), soit encore l'anergie, dont le flux correspondant est  $\dot{A}_n$  :

$$\dot{W}_d = \dot{E}x_d = \dot{A}_n = T_o \dot{S}_i \quad (7.47)$$

**Remarque :** le choix de la température de référence peut être problématique (cas des systèmes adiabatiques, par exemple) ; l'usage courant est d'une température conventionnelle de 25 °C ou 298,15K.

### b) Formes de l'exergie

À chaque forme d'énergie peut être associée une forme d'exergie correspondante ; une référence est donc à donner pour chaque variable intensive, en référence à l'environnement.

Classiquement, quatre formes d'exergie, grandeur extensive (additive) sont utilisées (Szargut J.) :

$Ex_c$ , l'exergie cinétique

$Ex_p$ , l'exergie potentielle

$Ex_{ph}$ , l'exergie physique (phénomènes nucléaires, mécaniques, électriques, magnétiques, surfaciques,...)

$Ex_{ch}$ , l'exergie chimique

Dans la pratique, l'exergie physique fait référence à l'état  $P_o, T_o$  ( $P_o$ , pression atmosphérique : 101325 Pa). Pour les évolutions thermodynamiques courantes, la référence de température est souvent suffisante en première approche. La prise en compte de plus en plus sévère des contraintes d'environnement amènera à reconsidérer cette limitation.

Pour les corps purs, l'exergie est supposée nulle dans l'état de référence.

## 7.6 CONCLUSIONS

L'étude thermodynamique des dégradations d'énergie est une conséquence directe du principe d'évolution décrit dans ce chapitre : l'entropie n'est pas une grandeur conservative (création d'entropie de par l'irréversibilité des transformations réelles).

Pour un état thermodynamique quelconque (non stationnaire et loin de l'équilibre), il y a lieu d'être prudent et de remarquer que l'entropie du système est telle que  $\frac{dS}{dt}$  diffère de zéro et peut donner lieu à des « structures dissipatives » complexes (domaine d'étude actuel).

Pour un état stationnaire hors équilibre,  $\frac{dS}{dt} = 0$  (ou  $dS = 0$  ;  $S = \text{cte}$ ) ; si l'état stationnaire est voisin de l'équilibre, l'étude peut se poursuivre, en utilisant la Thermodynamique des Phénomènes Irréversibles Linéarisée (TPIL) qui sera abordée plus loin.

Toutefois, pour un système isolé, le seul état stationnaire possible est l'état d'équilibre thermodynamique vu que  $\frac{dS}{dt} = \frac{\delta S_i}{dt} = 0$ .

Pour un système fermé par contre  $\frac{\delta S_i}{dt} = -\frac{\delta S_e}{dt} \geq 0$  ; l'état stationnaire est donc entretenu par une dépense d'énergie (transfert d'entropie vers l'environnement).

Pour un système ouvert, l'état stationnaire est maintenu, à la fois par un transfert d'énergie, mais aussi de matière (dégradation d'énergie et de matière).

En pratique, la caractérisation des irréversibilités passe par le bilan entropique (analyse entropique), ou par le bilan exergétique (analyse exergétique : système dans son environnement).

Le présent chapitre a par ailleurs permis d'introduire :

- une transformation thermodynamique généralisée conservative : la transformation polytropique ;
- la notion d'efficacité de système.

Cette notion donne lieu à des efficacités au sens du premier principe, puis du second principe ; elle distingue par ailleurs entre la notion classique de rendement pour les moteurs ( $< 1$ ), et la notion de COP pour les récepteurs.

Ces notions seront précisées à l'avenir et complétées, par exemple, par les efficacités de transfert et de conversion (Feidt M.).

## BIBLIOGRAPHIE

- BENELMIR R. et al *Analyse exergétique*, Techniques de l'Ingénieur, BE 8015, 15 pages, Paris, Janvier 2002.
- DARRIEUS G. *Rev. Gén. Electricité*, Vol. 27, p. 963, 1930.
- FEIDT M. Reconsideration of efficiency of processes and systems from a non equilibrium point of view, *Int. J. of Environment and Economics*, Vol. 11, n° 1, p. 31-49, 2001.
- FEIDT M. *Thermodynamique et optimisation énergétique de systèmes et procédés*, Paris, Tec et Doc, p. 88-89, 1996.
- FEIDT M. *Thermodynamique optimale en dimensions physiques finies*, Hermes, 2013.
- GOUY R. Sur l'énergie utilisable, *J. Phys*, Vol. 8, p. 501, 1889.
- RADCENCO V. *O teorie termodinamica a interactiunilor fizice*, Bucuresti, Editura Academiei Romane, 2001.
- SZARGUT J. International progress in second law analysis, *Energy*, Vol. 5, p 709, 1980.

## Chapitre 8

---

# **Thermodynamique des phénomènes irréversibles linéarisée**

### **8.1 INTRODUCTION**

Le chapitre 7 a montré l'importance centrale de la notion d'entropie dans la dégradation des énergies nobles en chaleur lors de la conversion ou du transfert de celles-ci, de même que lors du transfert de chaleur.

On propose ici une analyse complémentaire à celle rapportée au chapitre précédent lorsque les transformations thermodynamiques ne s'éloignent pas trop des états d'équilibre ; cela sera utile dans la caractérisation des régimes dynamiques stationnaires de systèmes et procédés pour lesquels les propriétés locales ne dépendent pas du temps.

À l'équilibre thermodynamique, l'entropie est maximale ; la création d'entropie correspondante doit donc être nulle. En revanche, pour un système hors équilibre, par exemple dynamique stationnaire, le flux de création d'entropie n'est pas nécessairement nul. Il y a lieu de le caractériser : nous allons introduire les notions de base dans cette direction.

### **8.2 LES IRRÉVERSIBILITÉS ET LE FLUX DE CRÉATION D'ENTROPIE**

Recherchons la forme générale du flux de création d'entropie, quelle que soit la forme d'énergie. Pour ce faire, on considère quelques exemples associés aux formes d'énergie les plus courantes, dont la chaleur. Le régime considéré est supposé dynamique stationnaire.



### 8.2.1 Flux de création d'entropie due aux transferts de chaleur

Le raisonnement proposé est valable quel que soit le mode de transfert de chaleur ; il suppose simplement un système globalement adiabatique vis-à-vis de l'environnement, avec un compartiment à une température  $T$  supérieure à  $T'$ , la température du second compartiment qui échange avec le premier, conformément à :

$$\dot{Q} = \dot{S}_e.T = \dot{S}'.T' \quad (8.1)$$

L'irréversibilité du transfert suppose un flux de création d'entropie  $\dot{S}_i$  tel que :

$$\dot{S}' = \dot{S}_e + \dot{S}_i \quad (8.2)$$

La combinaison de (8.1) et (8.2) conduit alors à :

$$\dot{S}_i = \dot{Q} \left( \frac{1}{T'} - \frac{1}{T} \right) \quad (8.3)$$

Le flux d'entropie créé apparaît comme le produit d'un flux (de chaleur), par une force généralisée dépendant ici du potentiel thermique (la température).

**Remarque :**  $\dot{S}_i$  est bien une quantité positive, donc traduisant une irréversibilité. Dans le cas d'un modèle filaire en conduction pure, à conductivité constante, on montre que :

$$\dot{S}'_i = \frac{\lambda A}{T^2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 \quad (8.4)$$

Cette forme quadratique confirme le résultat pour le flux linéique d'entropie créé

$\dot{S}'_i = \frac{d\dot{S}}{dx}$ , et prolonge le résultat systémique (8.3).

### 8.2.2 Flux de création d'entropie associé aux frottements mécaniques

#### a) Frottement mécanique de surfaces solides en contact

Les deux surfaces solides sont en déplacement relatif de la translation élémentaire  $\overrightarrow{dL}$ , correspondant au glissement de la surface motrice soumise à la force motrice  $\overrightarrow{Fm}$ , sur la surface réceptrice soumise à la force réceptrice  $\overrightarrow{Fr}$  ( $|\overrightarrow{Fm}| > |\overrightarrow{Fr}|$ ) ; la différence en norme de ces deux forces représente la force de frottement  $\overrightarrow{Ff}$ , qui s'oppose au mouvement :

$$|\overrightarrow{Fm}| = |\overrightarrow{Fr} + \overrightarrow{Ff}| \quad (8.5)$$

Le travail de frottement est un travail résistant, auquel correspond la puissance mécanique dissipée  $\dot{W} = T.\dot{S}_i$  ( $T$ , température du point de contact entre les surfaces). D'où :

$$\dot{S}_i = \frac{1}{T} (\overrightarrow{Fm} - \overrightarrow{Fr}) \cdot \frac{\overrightarrow{dL}}{dt} \quad (8.6)$$

Là encore, le flux d'entropie créé est le produit d'une vitesse (flux de translation) par une force généralisée, dépendant des forces mécaniques au contact.

**Remarque :** la norme  $Ff$  est souvent donnée proportionnelle à la vitesse relative des surfaces en contact :  $Ff = k.v$  ;  $k$  est un coefficient constant.

Il vient alors :

$$\dot{S}_i = \frac{kv^2}{T}$$

On retrouve une forme quadratique, mais ici par rapport au flux de translation (extensité).

**b) Frottements mécaniques visqueux associés aux fluide ;  
approche systémique**

Tout fluide en écoulement suppose une perte de pression, dans le sens de l'écoulement ; la puissance mécanique dissipée sous forme visqueuse s'écrit donc :  $\dot{W}f = -\dot{V}.\Delta P = T.\dot{S}_i$  ( $T$ , température homogène du système, température de mélange supposé parfait).

Dans le cas d'un système fermé compressible,  $\Delta P = (P_{ext} - P)$  ;  $\dot{V}$  représente la vitesse de variation du volume : le travail correspondant est un travail résistant, dissipé sous forme de chaleur ( $\dot{W}f = -\dot{V}.\Delta P > 0$  avec  $\dot{V} < 0$  si  $\Delta P > 0$  et réciproquement).

Pour un système ouvert,  $\dot{V}$  représente le débit volume qui n'est conservatif que pour un fluide incompressible ou isovolume ; sinon il apparaît un couplage aux conditions locales d'écoulement conformément à  $\dot{m} = \rho.\dot{V}$ . Le travail correspondant est toujours résistant, avec cette fois  $\Delta P < 0 \quad \forall \dot{V}$  (où  $\dot{m}$ ) : il ne peut y avoir écoulement qu'en présence d'un gradient de pression.

Dans les deux cas présentés, il est apparu que le flux d'entropie créé fait intervenir le produit d'un flux ou d'une vitesse de variation de la variable extensive  $V$ , couplée à une force généralisée dépendant du gradient des pressions, variable conjuguée de  $V$ .

**c) Frottements mécaniques visqueux dans un tube, modèle filaire**

La description des écoulements de fluide en tube de géométrie quelconque suppose la connaissance d'une loi de frottement ; cette loi est couramment élaborée pour des conditions de régime dynamique stationnaire (régime établi, avec longueur d'établissement) ; thermodynamiquement et plus généralement, nous dirons que l'hypothèse d'équilibre local est préservée (équilibre tant mécanique que thermique pour les systèmes thermomécaniques). Il vient alors pour les pertes de pression régulières une loi du type :

$$|\Delta P_r| = f \cdot \frac{4\Delta L}{D_H} \cdot \rho \frac{V^2}{2} \quad (8.7)$$

$f$ , coefficient de frottement, fonction de la géométrie du tube, de la nature de sa surface et du régime d'écoulement :

$V$ , vitesse moyenne débitante en tube ;

$\Delta L$ , longueur de tube correspondant à  $\Delta P$  ;

$D_H$ , diamètre hydraulique du tube :  $4A_t/P_t = 4V_c/A_t$  ;

$P_t$ , périmètre transversal de la section ;

$A_t$ , section transversale du tube ;

$V_c$ , volume de contrôle (ou volume mouillé par le fluide).

**Remarque :** l'expression de la perte de pression linéique par passage à la limite en coordonnée cartésienne est :

$$P' = \left| \frac{dP_r}{dx} \right| = \frac{4f}{D_H} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \quad (8.8)$$

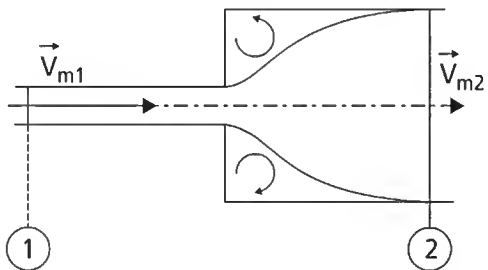
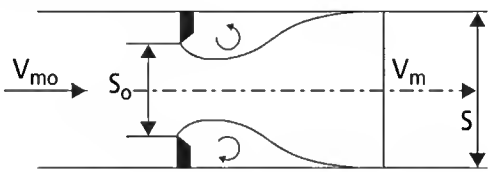
### ► Pertes de pression singulière

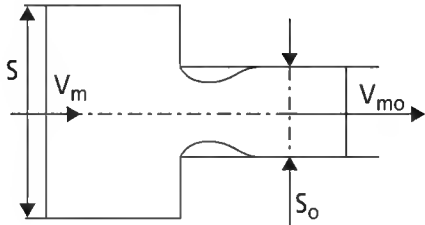
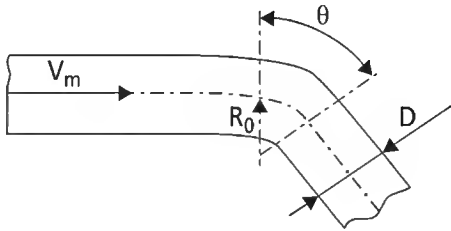
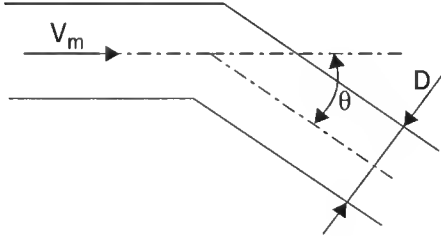
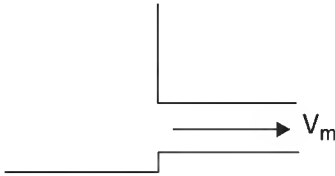
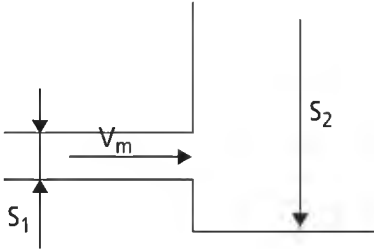
Par analogie avec le formalisme précédent, mais pour des situations qui relèvent délibérément du hors équilibre (régimes non établis), l'approche système propose une généralisation de la démarche sous la forme d'un coefficient rendant compte de la singularité (effet d'entrée, effet de sortie respectivement ; contraction brusque, élargissement brusque ; coude, etc.) (Idelcik I.E.).

$$|\Delta P_s| = K_s \frac{\rho V^2}{2} \quad (8.9)$$

Le tableau 8.1 illustre quelques configurations singulières. La vitesse en référence dans la relation (8.9) est la vitesse maximale du cas étudié.

TABLEAU 8.1 ILLUSTRATION D'ÉCOULEMENT EN SINGULARITÉS.

SINGULARITÉ	VALEUR DE K
<p>1) Élargissement brusque</p> 	<p>Formule de Barré de St Venant</p> $K = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$
<p>2) Diaphragme</p> 	$K = \left(\frac{S}{mS_0} - 1\right)^2 + \frac{1}{9} \quad \text{avec } m = 0,62$

SINGULARITÉ	VALEUR DE K
<p>3) Rétrécissement</p> 	$K = \left( \frac{1}{m} - 1 \right)^2 + \frac{1}{9} \text{ avec } m = 0,62$ <p><math>K = 0,49</math> ; on prend <math>K = 0,5</math> valable pour <math>S</math> suffisamment différent de <math>S_0</math></p>
<p>4) Coude</p> <p>4.1 Coude continu</p>  <p>4.2 Coude à angles vifs</p> 	<p>Formule de Weisbach</p> $K = \left[ 0,131 + 1,847 \left( \frac{D}{2R_0} \right)^{\frac{7}{2}} \right] \frac{\theta}{90^\circ}$ <p><math>\theta</math> en degrés</p> <p>Formule de Weisbach</p> $K = 0,947 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2,047 \sin^4 \frac{\theta}{2}$
<p>5) Raccordements Conduite-Réservoir</p> <p>5.1 Départ</p>  <p>5.2 Arrivée</p> 	<p><math>K = 0,5</math></p> $K = \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 + \frac{1}{9} \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \text{ avec } S_2 \gg S_1$ <p><math>K = 1</math></p> <p>valable quelle que soit la forme d'arrivée</p>

Dans une situation quelconque générale, la perte de pression totale  $\Delta P$  résultera de la somme des pertes de pression régulière et singulière ; en première approximation, on pourra écrire :

$$|\Delta P| = K \cdot \frac{\rho V^2}{2} \quad (8.10)$$

avec  $K = K_s + f \frac{4\Delta L}{D_H}$ .

L'expression correspondante de l'énergie dissipée s'en déduit, en tenant compte de la conservation du débit matière :

$$\overset{o}{W} f = K A_t \frac{\rho V^3}{2} = \frac{K}{2} \frac{\overset{o}{m}^3}{(\rho A_t)^2} \quad (8.11)$$

Il en résulte pour un écoulement isotherme à  $T$  l'expression de  $\overset{o}{S}_i$  :

$$\overset{o}{S}_i = \frac{K}{2T} \cdot \frac{\overset{o}{m}^3}{(\rho A_t)^2} \quad (8.12)$$

**Remarque :** la création d'entropie est bien positive, mais sous une forme cubique et non quadratique du flux d'extensité  $\overset{o}{m}$  ;  $\rho$ , la masse volumique doit être indépendante de  $P$  ; si celle-ci est fortement variable, il a lieu de reconsidérer le problème.

### 8.2.3 Dissipations électriques (approche systémique)

La dissipation électrique est associée au flux de charges électriques dans des milieux conducteurs imparfaits ; d'où la notion commune de résistance électrique finie  $R = 1/K$ , inverse de la conductance électrique  $K$ . Ces grandeurs relient par la loi d'Ohm le flux de charge,  $I = \frac{dq}{dt}$ , ou intensité, à la différence de potentiel existant aux bornes du conducteur :

$$\Delta V = R \cdot I \quad (8.13)$$

L'énergie électrique dégradée par effet Joule se retrouve sous forme de chaleur dissipée dans le conducteur supposé isotherme à  $T$ , dans les conditions du régime dynamique stationnaire :

$$\overset{o}{Q} = \Delta V \cdot I = R \cdot I^2 \quad (8.14)$$

$\Delta V$ , la différence des potentiels amont et aval, est ici la force généralisée associée au flux de la quantité de charge électrique,  $I$  ( $q$  variable extensive) ; on trouve de nouveau une forme quadratique positive telle que :

$$\overset{o}{S}_i = \frac{\Delta V \cdot I}{T} = \frac{R \cdot I^2}{T} \quad (8.15)$$

**Remarque 1 :**  $R = \frac{\rho L}{A_r}$ , avec  $\rho$  résistivité du conducteur, est considéré constant, mais peut dépendre de  $T$ .

**Remarque 2 :** la dissipation électrique associée à l'effet Joule peut donner lieu à modèle filaire. Il vient :

$$\overset{o}{S}'_i = -\frac{\overline{\text{grad} \vec{E} \cdot \vec{I}}}{T} = \frac{\rho A_r j^2}{T} \quad (8.16)$$

$j$ , densité surfacique de courant telle que  $I = jA_r$ .

## 8.2.4 Dégradation d'énergie chimique

### a) Notion d'affinité

Les réactions chimiques sont dans la majorité des cas intrinsèquement irréversibles (exemple les combustions). Nous avons déjà vu (chapitre 5, paragraphe 5.2.1) que pour une transformation thermodynamique élémentaire de durée  $dt$ , l'évolution du constituant  $i$  s'écrit :

$$dm_i = \nu_i M_i d\zeta$$

avec l'équation stoechiométrique pour le système supposé fermé :

$$\sum_i \nu_i M_i = 0$$

### ► Retour sur la notion de potentiel chimique

Pour un système physique homogène à  $N$  constituants, l'état thermodynamique suppose la connaissance de deux variables d'états standard thermomécaniques, mais aussi de  $N$  variables fonctions de la masse ou du nombre de moles, grandeurs extensives et conservatives pour chacun des constituants.

Les expressions différentielles des fonctions thermodynamiques caractéristiques  $U$ ,  $H$ ,  $F$ ,  $G$  permettent alors d'écrire :

$$\left( \frac{\partial U}{\partial m_i} \right)_{S,V,m_j} = \left( \frac{\partial H}{\partial m_i} \right)_{S,P,m_j} = \left( \frac{\partial F}{\partial m_i} \right)_{T,V,m_j} = \left( \frac{\partial G}{\partial m_i} \right)_{T,P,m_j}$$

avec :

$F = U - TS$ , transformée de Legendre d'ordre 1 de la fonction  $U$ , par les variables conjuguées  $T$  et  $S$  (énergie libre,  $F(T, V)$ ).

$G = H - TS$ , transformée de Legendre d'ordre 1 de la fonction  $H$ , par les variables conjuguées  $T$  et  $S$  (enthalpie libre,  $G(T, P)$ ).

On appelle  $\mu_{i_m}$  le potentiel chimique du constituant  $i$ , tel que :

$$\mu_{i_m} = \left( \frac{\partial G}{\partial m_i} \right)_{T,P,m_j} \quad (8.17)$$

**Définition :** le potentiel chimique massique du constituant  $i$  représente la variation de l'enthalpie libre du système lorsqu'on lui ajoute à  $T, P, m_j$  constants, l'unité de masse du constituant  $i$ .

**Remarque 1 :** le potentiel chimique s'appelle aussi enthalpie libre partielle massique, car contrairement à l'enthalpie libre massique, c'est une fonction de  $n_j$ . On reviendra sur cette influence du mélange.

**Remarque 2 :** des définitions homologues peuvent être données, en référence molaire, ce que choisit souvent le chimiste.

### ► Définition de l'affinité chimique

L'ensemble des considérations ci-dessus permet d'écrire l'expression générale de la différentielle de l'enthalpie libre :

$$dG = -SdT + VdP + \sum_i v_i \mu_i d\zeta \quad (8.18)$$

Dans cette relation apparaît l'affinité chimique  $A$  de la réaction considérée :

$$A = -\sum_i v_i \mu_i \quad (8.19)$$

Cette notion a été introduite par De Donder.

### ► Conséquence : équilibre d'un système chimique fermé isobare et isotherme

Dans ce cas, (8.18) se simplifie en :  $dG_{P,T} = -Ad\zeta$

L'équilibre chimique stable est associé, au minimum de la fonction  $G(dG_{P,T} = 0)$  ; l'équilibre correspond donc à  $A = 0$ , pour la réversibilité.

### b) Création d'entropie associée à une réaction chimique

#### ► Cas du système chimique homogène fermé

Le système étant à volume constant (par exemple, bombe calorimétrique), la variation d'énergie interne dans la transformation élémentaire  $dt$  s'écrit :

$$dU = TdS + \sum_i \mu_i dm_i = \delta Q$$

D'où l'expression de  $\frac{dS}{dt}$ , en introduisant l'affinité de la réaction (8.19) :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\overset{\circ}{Q}}{T} + \frac{A}{T} \frac{d\zeta}{dt} \quad (8.20)$$

Cette expression comporte deux termes : le premier représente l'échange d'entropie avec l'extérieur dans la transformation isotherme à  $T$  donné ; le second terme représente le flux d'entropie créé par la réaction chimique irréversible de vitesse  $d\zeta / dt$  :

$$\overset{o}{S}_i = \frac{A}{T} \frac{d\zeta}{dt} \quad (8.21)$$

**Remarque 1 :** on peut généraliser l'expression précédente à  $r$  réactions chimiques

$$\overset{o}{S}_i = \frac{1}{T} \sum_k A_k \frac{d\zeta_k}{dt}$$

**Remarque 2 :** pour l'énergie chimique,  $A$  est le scalaire représentant la force généralisée ; on remarquera qu'en convention de l'ingénieur  $A = A_r - A_p = \sum_r v_r \mu_r - \sum_p v_p \mu_p$  (avec  $v_r, v_p > 0$ ) : l'affinité rend compte de la variation d'un potentiel énergétique des réactifs vers les produits. La vitesse de réaction chimique est ici la variable scalaire extensive associée.

► Cas du système chimique homogène ouvert

Il est assez facile dans ce cas d'établir le bilan entropique suivant :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\dot{Q}}{T} + \frac{1}{T} \sum_j (h - \mu_j) \frac{dme_j}{dt} + \frac{A}{T} \frac{d\zeta}{dt} \quad (8.22)$$

avec  $\frac{dme_j}{dt}$ , débit matière du constituant  $j$  échangé avec l'extérieur.

On retrouve la même expression formelle que (8.21) pour le flux d'entropie créé par la réaction chimique irréversible.

► Conclusion

Pour toute réaction chimique irréversible, on représentera le flux d'entropie créé par (8.21) :

$$\overset{o}{S}_i = \frac{A}{T} \cdot \frac{d\zeta}{dt}$$

La connaissance de l'affinité de la réaction n'est pas le problème le plus difficile à résoudre (voir 8.19) ; en revanche, la connaissance de la cinétique chimique (vitesse de réaction) reste à préciser : il n'y a pas de relation immédiate simple entre  $A$  et  $\frac{d\zeta}{dt}$ , contrairement aux autres formes d'énergie.

### 8.3 RELATIONS FLUX-FORCE ET ENTROPIE CRÉÉE

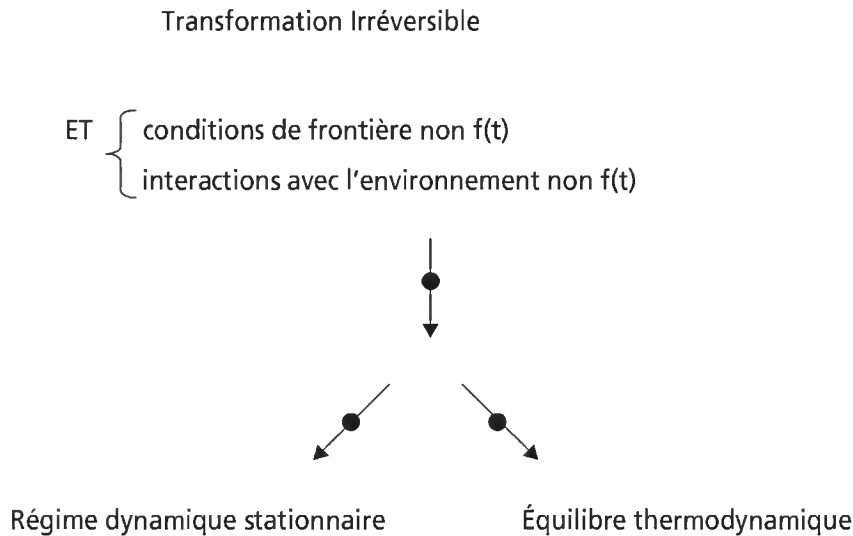
Le paragraphe 8.2 a illustré le fait que les processus physiques réels hors équilibre transitoire ou dynamique stationnaire font intervenir des évolutions (variation avec le temps) induisant la notion de cinétique des processus et ce quelle que soit la forme d'énergie ; en régime dynamique stationnaire, il y correspond des flux, tels que toute variable d'état ne dépend pas du temps.



Ces remarques permettent une généralisation des notions précédentes et un prolongement des propriétés d'un régime dynamique stationnaire, au voisinage de l'équilibre thermodynamique sous forme d'un extremum d'une fonction des variables d'état  $\left( \overset{o}{S}_i \right)$ , moyennant quelques précautions (hypothèses) :

On suppose que le régime dynamique stationnaire reste dans le voisinage de l'équilibre thermodynamique, de façon à préserver l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local (existence des fonctions d'état ne dépendant que des variables d'état), ainsi que la symétrie par rapport au temps des lois physiques dans ce voisinage (pas d'effet de mémoire, ni de dépendance aux flux).

Aussi, toute transformation thermodynamique irréversible associée à un système, dont les conditions sur la frontière ne dépendent pas du temps, de même que les interactions avec l'environnement, conduit soit à l'équilibre thermodynamique, soit à un régime dynamique stationnaire.



**Figure 8.1** Evolutions irréversibles dans le voisinage de l'état d'équilibre thermodynamique

### 8.3.1 Relations flux-force- $\overset{o}{S}_i$ pour les systèmes discrets

#### a) Force généralisée

En généralisant les exemples présentés au paragraphe 8.2, pour un système isolé, quelle que soit la forme d'énergie considérée  $k$  de variable intensive  $X_k$ , variable extensive  $Y_k$ , la conservation de  $Y_{ks}$  pour le système, conduit pour l'entropie totale du système  $S_s$  à :

$$F_k = \left( \frac{\partial S_s}{\partial Y_k} \right)_{Y_{ks}} = \left( \frac{\partial S}{\partial Y_k} \right)_{Y_{ks}} - \left( \frac{\partial S'}{\partial Y'_k} \right)_{Y_{ks}} = \mathfrak{S}_k - \mathfrak{S}'_k \quad (8.23)$$

$$S_s = SUS'$$

$F_k$  est la force généralisée associée à l'énergie  $k$ . Elle est liée à la différence (au gradient) des variables intensives  $\mathfrak{S}$  dans chaque sous-ensemble homogène.

En représentation entropique, on retrouve :

- la force généralisée de la chaleur (U) :  $F_k = \frac{1}{T} - \frac{1}{T'}$
- la force généralisée mécanique 3D (V) :  $F_k = \frac{P}{T} - \frac{P'}{T'}$
- la force généralisée chimique (et physique) (m) :  $F_k = \frac{\mu_m}{T} - \frac{\mu'_m}{T'}$

### b) Flux généralisé

À la force généralisée correspond le flux de l'extensité associée :

$$J_k = \frac{dY_k}{dt} \quad (8.24)$$

#### ► Flux de production d'entropie

Le flux de production d'entropie est la somme des produits de chaque flux par la force généralisée correspondante :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S_i}{\partial t} = \sum_k \left( \frac{\partial S}{\partial Y_k} \right)_{Y_{ks}} \cdot \frac{dY_k}{dt}$$

Soit :

$$\boxed{\dot{S}_i = \sum_k J_k \cdot F_k} \quad (8.25)$$

### 8.3.2 Relation flux-force- $\dot{S}_i$ pour les systèmes continus

Dans le cadre de l'hypothèse d'équilibre local, l'entropie spécifique massique  $s$  est une fonction d'état caractéristique des variables extensives locales d'équilibre  $y_k$  telle que :

$$ds = \mathfrak{S}_k \cdot dy_k \quad (8.26)$$

L'élément de volume de contrôle reçoit alors de l'extérieur une densité surfacique de flux entropique  $j_s$ , relié à la densité surfacique de flux de l'extensité  $y_k$  selon :

$$j_s = \sum_k \mathfrak{S}_k \cdot j_k \quad (8.27)$$

L'écriture du bilan entropique sur le volume élémentaire conduit alors pour le modèle filaire à la densité volumique d'entropie créée :

$$\overset{o}{s}_i = \overset{o}{S}_i' = \frac{d\overset{o}{S}_i}{dV} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial j_s}{\partial x} \quad (8.28)$$

La vitesse de production d'entropie est égale à la vitesse d'augmentation de l'entropie du volume élémentaire, augmenté de la densité surfacique de flux d'entropie s'échappant du volume élémentaire au même instant (référence normale interne).

L'équation de conservation de l'extensité  $y_k \left( \frac{\partial y_k}{\partial t} + \frac{\partial j_k}{\partial x} = 0 \right)$  combinée aux équations (8.26, 8.27) dans (8.28) conduit après simplifications à :

$$\overset{o}{s}_i = \sum_k j_k \cdot \frac{\partial \mathfrak{S}_k}{\partial x} \quad (8.29)$$

La comparaison de (8.29) à (8.25) montre par passage à la limite que la force généralisée correspond au gradient des variables intensives dans la représentation entropique, pour les systèmes continus.

**Remarque 1 :** les forces généralisées  $F_k$  sont aussi appelées forces thermodynamiques (ou affinités généralisées, dans certains livres en langue anglaise) : ne pas confondre  $\mathfrak{S}_k$ , variable extensive reliée à l'entropie, avec  $X_k$ , variable extensive reliée à l'énergie  $k$ .

**Remarque 2 :**  $\overset{o}{s}_i$  est une quantité nécessairement positive, à la limite nulle dans les conditions de réversibilité qui correspondent à  $j_k = 0$  et  $\frac{\partial \mathfrak{S}_k}{\partial x} = 0$ , quelle que soit la transformation au voisinage de l'état d'équilibre ( $F_k = 0$  pour les systèmes macroscopiques).

## 8.4 EXPRESSION DES FLUX EN FONCTION DES FORCES – APPROXIMATION LINÉAIRE

### 8.4.1 Coefficients cinétiques ou phénoménologiques

Pour les systèmes passifs, souvent qualifiés aussi de résistifs, le flux est une fonction des forces généralisées à l'instant  $t$  considéré, ainsi que des variables intensives de la représentation entropique :

$$\vec{J}_k = \vec{J}_k(\vec{F}_k, \vec{\mathfrak{S}}_k) \quad (8.30)$$

On notera ici que le flux de l'énergie  $k$  dépend de toutes les forces généralisées et variables intensives correspondantes. Il apparaît donc des couplages entre les énergies, la dominante étant sa propre énergie.

De plus, chaque flux s'annule lorsque les forces généralisées s'annulent. Un développement en série de Taylor autour de l'état d'équilibre conduit alors à :

$$J_k = \sum_j L_{jk} F_j + \frac{1}{2!} \sum_i \sum_j L_{ijk} F_i F_j + \dots \quad (8.31)$$

avec :

$$L_{jk} = \left( \frac{\partial J_k}{\partial F_j} \right)_{eq} = L_{jk}(\overline{\mathfrak{F}}_k) \quad (8.32)$$

$L_{jk}$ , coefficient cinétique ou phénoménologique d'ordre 1, fonction des variables intensives locales en représentation entropique.

$$L_{ijk} = \left( \frac{\partial^2 J_k}{\partial F_j \partial F_i} \right)_{eq} \text{ coefficient cinétique ou phénoménologique de second ordre.}$$

**Remarque :** une extension aux ordres supérieurs à 2 est possible, mais généralement l'ordre 1 suffit, car l'importance des couplages entre différentes formes d'énergie reste faible.

#### 8.4.2 Flux fonction linéaire des forces généralisées

L'approximation linéaire qui résulte de (8.31) suppose une faible déviation de l'équilibre :

$$J_k = \sum_j L_{jk} F_j \quad (8.33)$$

##### a) Relations linéaires homogènes entre flux et forces

Les coefficients  $L_{kk}$  sont appelés coefficients propres.

Ils correspondent aux lois empiriques de Fourier (conduction thermique), de Fick (diffusion de la matière), ainsi qu'à la conduction électrique ; dans le cas de la loi de Fourier,  $L_{kk} = \lambda T^2$  ( $\lambda$  supposé constant). Les coefficients  $L_{jk}$  sont appelés coefficients mutuels.

Ils permettent de décrire les interactions entre phénomènes thermiques et électriques par exemple (voir l'étude des phénomènes thermoélectriques, qui est l'exemple le plus connu, répondant aux critères du modèle développé).

##### b) Propriétés des coefficients cinétiques

Soit le cas particulier de deux phénomènes irréversibles quelconques couplés, mais satisfaisant aux conditions de linéarisation précédentes (phénomènes 1 et 2) :

$$\begin{cases} J_1 = L_{11} F_1 + L_{12} F_2 \\ J_2 = L_{21} F_1 + L_{22} F_2 \end{cases}$$

Un exemple en est le couplage entre la diffusion et la conduction thermique ; dans ce cas  $L_{12}$  et  $L_{21}$  rendent compte de la thermodiffusion.

$$\overset{o}{S}_i = L_{11}F_1^2 + (L_{12} + L_{21})F_1F_2 + L_{22}F_2^2 \geq 0 \quad \forall F_1 \text{ et } F_2$$

La condition de positivité de la forme quadratique associée à  $\overset{o}{S}_i$  s'exprime par les trois conditions :

$$L_{11} > 0$$

$$L_{22} > 0$$

$$(L_{12} + L_{21})^2 < 4L_{11}L_{22}$$

Le lecteur pourra vérifier que cela est en bon accord avec les couplages énergétiques courants en thermodynamique ; les expériences physiques courantes montrent un bon accord avec ce modèle.

### c) Relations de réciprocité d'Onsager

#### ► Symétrisation de la matrice des coefficients cinétiques

Toute matrice  $L_{jk}$  des coefficients cinétiques peut se décomposer en une matrice symétrique  $L_{jk}^s$  plus une matrice antisymétrique  $L_{jk}^a$  telles que :

$$L_{jk} = L_{jk}^s + L_{jk}^a \quad (8.34)$$

avec :

$$L_{jk}^s = L_{kj}^s; L_{jk}^a = -L_{kj}^a$$

On en déduit l'expression du flux de création d'entropie :

$$\overset{o}{S}_i = \sum_j \sum_k L_{jk}^s F_j F_k \geq 0$$

### d) Théorème de réciprocité d'Onsager

Les travaux d'Onsager (Onsager L. (a), Onsager L. (b)) datant de 1931 ajoutent une propriété complémentaire au modèle, en supposant la symétrie des effets linéaires :

$$L_{jk} = L_{kj} \text{ pour tout } k \neq j.$$

La valeur du coefficient cinétique  $L_{jk}$  est identique à celle du coefficient  $L_{kj}$  mesuré par renversement des conditions externes.

Ce théorème a été établi primitivement dans un champ magnétique externe. Son importance n'a été reconnue que dans les années 1950. Les bases théoriques des relations de réciprocité se trouvent en thermodynamique statistique (hors du cadre de cet ouvrage) dans le théorème de fluctuation-dissipation et les relations de Kubo.

### e) Conditions de symétrie pour le couplage de processus irréversibles

#### ► Cas d'un système chimique, avec propagation de chaleur en x

Dans l'approche locale, pour un réacteur de type plan, dont la normale coïncide avec la direction des x, et en supposant les effets de bord négligeables, il vient en combinant les relations (8.4), (8.21), (8.29) :

$$\overset{o}{s}_i = \frac{-\overset{o}{Q}''}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{A_m j_m}{T} \quad (8.35)$$

avec :

$$\begin{cases} \overset{o}{Q}''_x = -\frac{L_{qq}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} + L_{qm} \frac{A_m}{T} \\ J_m = -\frac{L_{mq}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} + L_{mm} \frac{A_m}{T} \\ L_{qm} = L_{mq} \end{cases}$$

Il apparaît alors dans l'expression  $\overset{o}{Q}''_x$  une cause scalaire (l'affinité chimique) qui engendrerait un effet vectoriel (le flux de chaleur surfacique) ; cela est contraire au principe physique de symétrie.

En conséquence :  $L_{qm} = 0 = L_{mq}$  et d'un point de vue général :

- les couplages sont possibles seulement entre phénomènes de même ordre tensoriel (à savoir scalaire, vectoriel, tensoriel) ;
- en l'absence de couplage, la production d'entropie est égale à la somme des contributions, qui sont séparément positives :

$$\overset{o}{S}_i = \sum_i J_i F_i + \sum_j \overline{J}_j \cdot \overline{F}_j + \sum_k \overrightarrow{J}_k : \overrightarrow{F}_k \quad (8.36)$$

**Exemple :** le réacteur thermochimique à structure plane examinée ci-devant

est tel que :  $-\frac{\overset{o}{Q}''_x}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} > 0$  et  $\frac{A_m j_m}{T} > 0$

**Remarque :** le résultat rapporté dans ce paragraphe constitue une extension du principe de Curie en milieu isotrope.

## 8.5 ÉTATS STATIONNAIRES DE NON-ÉQUILIBRE

Un état stationnaire est un état hors équilibre particulier soumis à des contraintes externes.

### 8.5.1 Théorème du minimum de production d'entropie

#### a) Énoncé du théorème

Par modification d'une contrainte externe, le système qui subit cette interaction évolue vers un régime dynamique stationnaire asymptotiquement (relaxation, avec une certaine constante de temps). Au voisinage de l'état d'équilibre dynamique stationnaire, la production d'entropie atteint sa valeur minimale compatible avec les conditions imposées (contraintes).

Cela constitue un théorème dû à Prigogine ; il est établi dans le cadre des hypothèses du chapitre.

**Théorème :** en régime dynamique stationnaire, la production d'entropie passe par un minimum.

L'état correspondant est stable par rapport aux perturbations locales.

Ce théorème vaut pour le modèle isotrope, à dilatation thermique négligeable, et conductibilité thermique constante.

**Remarque :** lorsque les coefficients phénoménologiques ne sont pas constants, le théorème prend une forme différente, qui ne garantit plus le minimum de production d'entropie. Il y a donc lieu d'être attentif dans le développement des modèles.

#### b) Application dans le cas du transfert de matière et d'énergie

On considère ici le couplage de l'énergie thermique avec la diffusion de matière (thermodiffusion).

Si on considère l'expression de l'entropie créée, on a :

$$\overset{o}{S}_i = J_q \cdot F_q + J_m \cdot F_m$$

avec :

$$\begin{aligned} J_q &= L_{qq} F_q + L_{qm} F_m \\ J_m &= L_{mq} F_q + L_{mm} F_m \\ L_{mq} &= L_{qm} \end{aligned}$$

En imposant une contrainte de gradient de température ( $F_q = cte$ ), le minimum de production d'entropie correspond à :

$$\left( \frac{\partial \overset{o}{S}_i}{\partial F_m} \right)_{F_q} = 0 = 2(L_{mq} F_q + L_{mm} F_m) = 2J_m \quad (8.37)$$

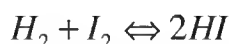
La valeur de  $F_m$  déduite de (8.37) correspond à la différence de pression thermomoléculaire de l'état dynamique stationnaire contraint en température.

**Remarque :** si de plus on libère  $F_q$ , on tend alors vers l'état d'équilibre de la thermodiffusion ; la production d'entropie s'annule alors (le premier terme de  $\overset{o}{S}_i$  tend aussi vers zéro).

Ces résultats ne valent que dans le cadre de la thermodynamique des phénomènes irréversibles linéarisée et des hypothèses associées, sauf extension du théorème à examiner (il en existe).

### 8.5.2 Exemple de relation non linéaire

Pour illustrer l'existence de non linéarité, on prend l'exemple d'une réaction chimique équilibrée en phase gazeuse :



Dans ce cas  $A = \mu_{II_2} + \mu_{I_2} - 2\mu_{HI}$  (affinité en référence molaire).

#### a) Potentiels chimiques des constituants du système

On assimile ici la phase gazeuse à un gaz parfait dG étant une différentielle totale, la définition de l'affinité conduit à :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mu_i}{\partial T} \right)_{P, n_i, n_j} &= - \left( \frac{\partial S_i}{\partial n_i} \right)_{P, T, n_j} = -s_i \\ \left( \frac{\partial \mu_i}{\partial P} \right)_{T, n_i, n_j} &= \left( \frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_{P, T, n_j} = v_i \\ \left( \frac{\partial \mu_i}{\partial n_j} \right)_{P, T, n_i} &= \left( \frac{\partial \mu_j}{\partial n_i} \right)_{P, T, n_j} \end{aligned}$$

avec  $s_i, v_i$  respectivement entropie et volume partiels molaires du constituant  $i$ .

À  $n_i, n_j$  constants, il vient :

$$d\mu_i = -s_i dT + v_i dP$$

Si de plus  $T = \text{cte}$   $d\mu_i = v_i dP = RT \frac{dP}{P}$ .

Comme à  $n_i, n_j, T$  constants  $\frac{dP}{P} = \frac{dP_i}{P_i}$ , il vient :

$$\mu_i(T) = \mu_i^o(T) + RT \ln \frac{P_i}{P_o}$$

$\mu_i^o(T)$ , potentiel chimique du constituant  $i$ , à la température  $T$ , et à la pression de référence  $P_o$ .

**Remarque :** pour les solides et les liquides, le second terme est généralement négligeable.

#### b) Lois du déplacement de l'équilibre

Le paragraphe a) permet l'écriture de l'activité d'une réaction chimique en phase gazeuse sous la forme ( $P_o$ , supposé unitaire) :

$$A = - \sum_i v_i \mu_i^o(T) - RT \sum_i v_i \ln P_i \quad (8.38)$$



Sachant que l'enthalpie libre standard à  $T$ , 1'atmosphère est :

$$\Delta G^o = \sum_i \nu_i \mu_i^o(T)$$

il vient :

$$A = -\Delta G^o - RT \ln \prod_i (P_i^{\nu_i}) \quad (8.39)$$

Cette relation traduit la loi d'action de masse due à Guldberg et Waage sous la forme :

$$\Delta G^o = -RT \ln K_p(T); K_p(T) = \prod_i (P_i^{\nu_i})$$

Soit :

$$A = RT \left[ \ln K_p(T) - \ln \prod_i (P_i^{\nu_i}) \right] \quad (8.40)$$

$K_p(T)$ , constante d'équilibre de la réaction par rapport aux pressions partielles.

**Remarque 1 :** la loi d'action de masse peut aussi être exprimée en fonction des concentrations molaires  $C_i$  ; il vient alors :

$$A = RT \left[ \ln K_c(T) - \ln \prod_i (C_i^{\nu_i}) \right] \quad (8.41)$$

**Remarque 2 :** déplacement de l'équilibre en fonction de  $P$ .

En introduisant les fractions molaires  $x_i = \frac{P_i}{P}$  des constituants du mélange gazeux dans (8.40), il vient :

$$\prod_i (x_i^{\nu_i}) = P^{-\Delta \nu} \cdot f(T) \quad (8.42)$$

$\Delta \nu$ , variation du nombre de moles produits par la réaction chimique.

(8.42) traduit la loi de Le Chatelier : une augmentation de la pression déplace les proportions d'équilibre, de façon à diminuer le nombre de moles, ou réduire le volume (stabilité de l'équilibre chimique, soumis à perturbation).

**Remarque 3 :** la loi de Van't Hoff, complémentaire de la précédente, traduit le déplacement de l'équilibre sous l'influence de la température ; elle est obtenue à partir de la relation d'Helmholtz ( $G = H - TS$ ) et de (8.40) sous la forme :

$$\frac{d \ln K_p(T)}{dT} = \frac{\Delta H^o}{RT^2} \quad (8.43)$$

$\Delta H^o$ , enthalpie standard de la réaction chimique isotherme et isobare (voir chapitre 6).

Ainsi, une augmentation de température déplace les pressions d'équilibre dans le sens d'une réaction endothermique.

## c) Application à la cinétique de la réaction étudiée

Pour la réaction chimique étudiée, la vitesse de réaction globale résulte de la superposition d'une réaction directe de flux molaire  $\vec{J}$ , et d'une réaction inverse, de flux molaire  $\vec{J}$ , d'où :

$$J = \vec{J} - \vec{J}$$

avec :

$$\vec{J} = \bar{k}C_{I_2}.C_{H_2}, \vec{J} = \bar{k}C_{HI}^2$$

vu que  $K_C = \frac{\bar{k}}{\bar{k}}$ , on peut écrire :

$$J = \bar{k}C_{I_2}.C_{H_2} \left( 1 - K_C \frac{C_{HI}^2}{C_{I_2}C_{H_2}} \right)$$

Comme (8.41) s'écrit ici :  $A = RT \ln \left[ K_C / C_{I_2}^{-1}.C_{H_2}^{-1}.C_{HI}^2 \right]$ , il vient :

$$J = \vec{J} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{A}{RT} \right) \right] \quad (8.44)$$

La relation (8.44) qui exprime le flux  $J$ , en fonction de la force  $\frac{A}{T}$  est une relation non linéaire.

Toutefois, au voisinage de l'équilibre,  $\vec{J}_{eq}$  est très voisin de  $\vec{J}_{eq}$  ;  $|A/RT|$  est très inférieur à l'unité ; dans ce cas, le développement de l'exponentiel conduit à :

$$J = \frac{\vec{J}_e}{R} \cdot \frac{A}{T}$$

expression linéaire avec  $L = \frac{J_e}{R}$ , coefficient phénoménologique propre de la réaction.

On voit ici l'importance de la définition du voisinage de l'équilibre conduisant à la validité des hypothèses.

**Remarque :** si  $A/RT$  grand (soit  $\frac{C_{I_2}C_{H_2}}{C_{HI}}$  grand, ou  $C_{HI} \rightarrow 0$ ) le stade initial de

la réaction suppose  $J \sim \vec{J}$  ;  $J$  ne dépend alors pas de  $A$  : c'est un effet de saturation, traduisant le fort hors équilibre.

## 8.6 CONCLUSION

La thermodynamique des phénomènes irréversibles linéarisée (TPIL) rend compte des irréversibilités dans l'espace linéaire tangent, au voisinage du point d'équilibre thermodynamique du système étudié. Cela suppose de ne pas trop s'éloigner de ce

voisinage (voisinage restreint), de façon à pouvoir préserver l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local.

Des précautions sont à prendre, car des exemples simples ont montré des non linéarités existantes. Des développements de thermodynamique non linéaire sont en cours, tout particulièrement en thermodynamique des milieux continus ; voir par exemple les travaux de Lebon G. sur la Thermodynamique Irréversible Étendue (EIT en anglais).

L'originalité essentielle de la TPIL est de permettre une prise en compte des couplages entre diverses formes d'énergie lors des transferts ; l'application la plus notoire est relative à la description cohérente des phénomènes thermoélectriques ; vu son importance, cela sera examiné dans la troisième partie de l'ouvrage.

Des applications plus fondamentales tendent à assurer, par ailleurs, la cohérence de l'équation de propagation de la chaleur avec les principes thermodynamiques (Kolenda Z. *et al.*).

## BIBLIOGRAPHIE

IDELCIK I.E., *Mémento des pertes de charge*, Collection DER-EDF n° 13, Eyrolles, 1999.

JOU D. *et al*, *Extended Irreversible Thermodynamics*, Springer, 2001, 3<sup>e</sup> édition.

KOLENDA Z *et al.*, *On the entropy generation minimization in steady state and transient heat conduction processes*, Proceedings of ECOS 2005, Trondheim, Norway, June 20-22 2005, p. 289-293.

ONSAGER L., *Physical Review*, 37, p. 405, 1931.

ONSAGER L., *Physical Review*, 38, p. 2265, 1931.

## Chapitre 9

---

# Économie et environnement

### 9.1 INTRODUCTION : L'ANALYSE DE PROJET

Le présent chapitre fait le lien entre les préoccupations scientifiques du chercheur ou du physicien et celles de l'ingénieur qui vise à l'application pratique au service de l'homme des connaissances et savoir-faire acquis. Il apparaît alors la nécessité d'une évaluation technico-économique qui relève de l'ingénierie.

#### 9.1.1 Les étapes d'un projet

Le développement d'un projet se déroule de l'étude, en passant par la réalisation, puis ensuite le suivi et éventuellement le démantèlement de l'installation en fin de vie. La figure 9.1 illustre les diverses étapes ci-dessus et leurs imbrications.

##### *a) Le dossier du projet*

##### ➤ Identification des besoins

Il est nécessaire dans un premier temps de préciser les besoins (objectifs) ; la connaissance préalable de références existantes permet la comparaison avec des alternatives.

##### ➤ Étude des performances techniques

La détermination des performances techniques est une étape essentielle pour le dimensionnement, le fonctionnement de l'installation projetée et la sécurité de celle-ci.

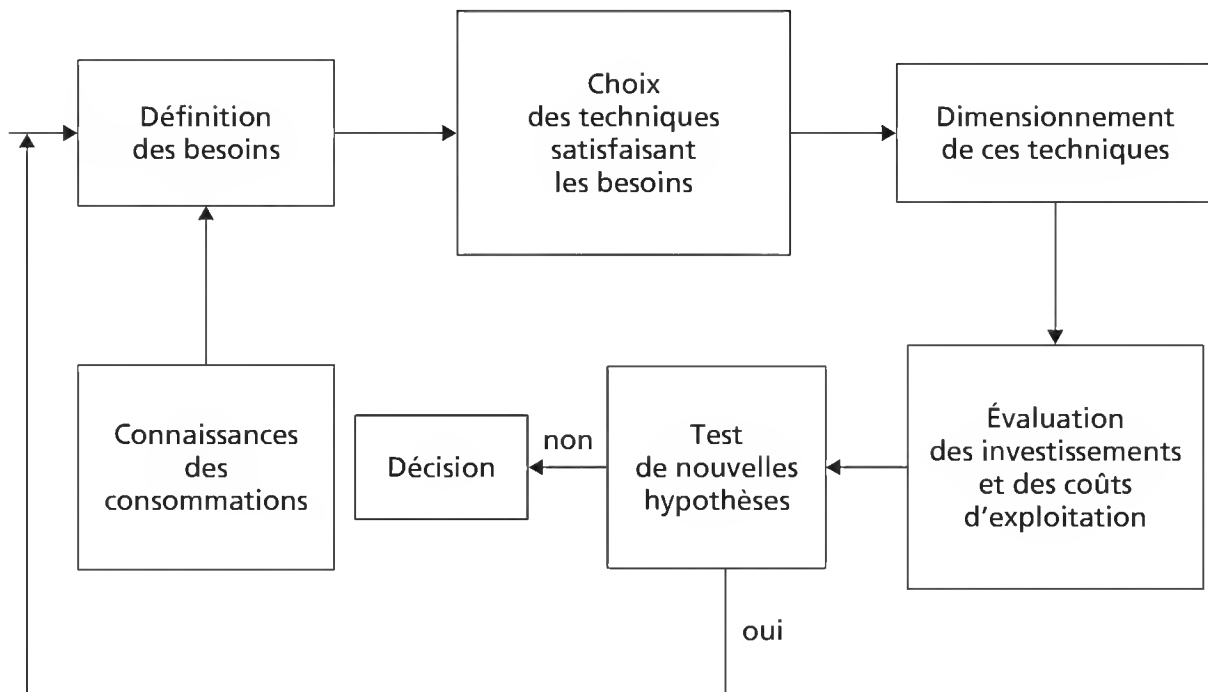


Figure 9.1 Organigramme des tâches d'un projet

### ➤ Étude économique

L'installation étant techniquement définie, un chiffrage de coûts et de prévisions financières est à réaliser ; le présent chapitre a pour but de fournir les bases essentielles nécessaires à cette étape.

#### b) Prise de décision

Sur la base du dossier de projet élaboré, une décision est prise comportant une certaine part de risque (pari industriel, économique, financier...).

Une décision positive conduit aux phases successives d'appel d'offres, de marché, et de travaux.

#### c) Réalisation de l'opération

La mise en place du système ou du procédé donne lieu à une phase de réception, puis de rodage (contrôle des performances, qualité, réglage, aménagement). Ensuite le système entre dans une phase d'exploitation, avec suivi des opérations (maintenance, dépannage), montée en puissance, puis arrêt.

L'arrêt de l'opération est aujourd'hui une phase importante : dès la mise en place d'un projet, elle est prise en compte pour minimiser les impacts résiduels et assurer le recyclage maximum des constituants mis en œuvre sur la durée de vie de l'opération (éco-conception).

### 9.1.2 L'analyse des besoins

L'analyse des besoins répond à un projet d'investissement. Le cas le plus simple en apparence est celui d'un nouveau besoin associé à un projet neuf. Le projet d'investissement correspond alors à une prise de risque pour laquelle on cherche généralement à dégager un bénéfice, compte tenu des coûts et de la valeur ajoutée dans l'opération.

Pour des opérations existantes, il s'agit davantage de mettre en place des évolutions visant à un moindre coût de production, ou une rentabilité accrue (aspects économique et financier).

Il existe aussi des configurations où la préoccupation est plus technique : ajustement de production (le plus souvent augmentation pour répondre aux besoins nouveaux).

#### ► Cahier des charges

L'analyse des besoins s'appuie sur un cahier des charges qui doit être établi avec soin suivant les principales rubriques ci-dessous :

- objectifs de l'opération ;
- flux mis en jeux (dont produits) ;
- caractéristiques d'entrée et de sortie ;
- disponibilités sur site : matières, énergies, main d'œuvre, transport ;
- logistique ;
- financement, gestion ;
- contraintes de qualité ;
- contraintes d'environnement ;
- contraintes réglementaires (nationale, européenne, mondiale).

### 9.1.3 Les bilans

La mise en place de bilan sur un système de production est chose aisée en thermodynamique (voir chapitre 5).

La figure 9.2 est une représentation schématique simplifiée d'un système de production ; il comporte des entrées et des sorties susceptibles d'évolution dans le temps, durant sa durée de vie.

Sont représentés sur ce schéma les flux  $\overset{o}{G}$ , des grandeurs d'entrée et de sortie  $G$ .

**Remarque :** on supposera pour ce qui suit le système en régime dynamique stationnaire (hors transitoire : pas d'effet capacitif ou de stockage).

Il y a lieu d'ajouter à cette description, parmi les grandeurs  $G$  importantes caractérisant le système, la grandeur temps  $T$  (voir remarque ci-dessus), mais aussi la grandeur générale dimension  $D$  (extensité nécessairement finie du système).

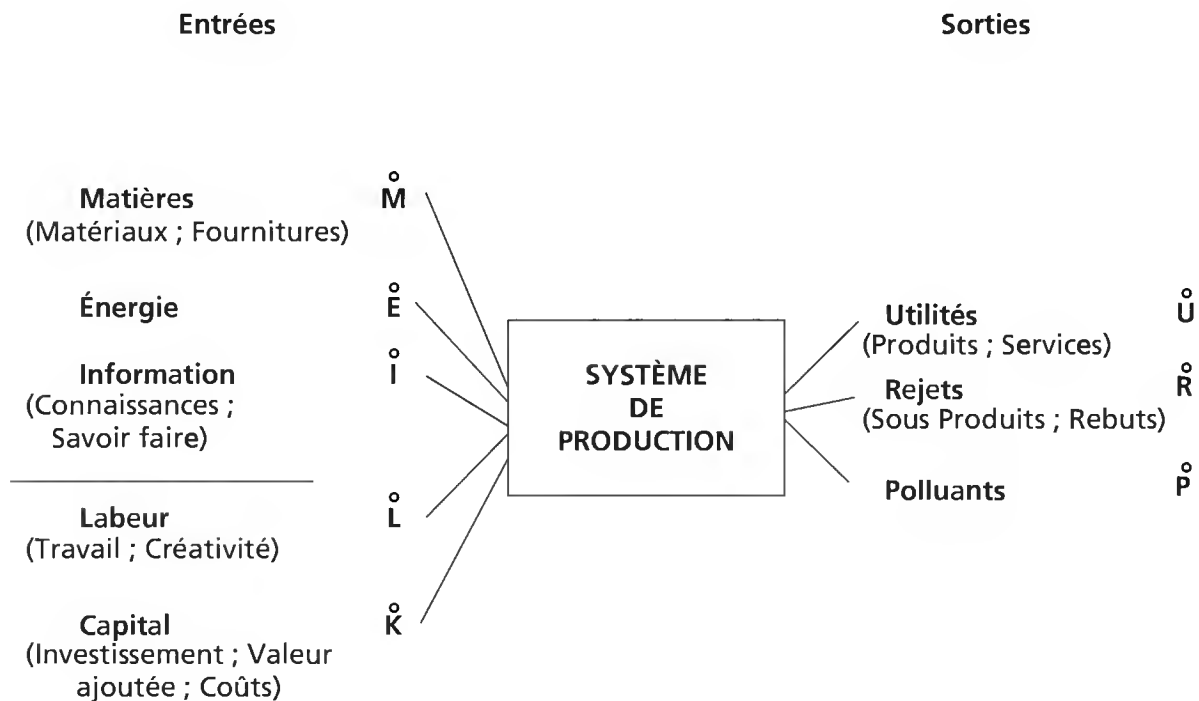


Figure 9.2 Système de production d'utilités

### a) Les bilans classiques

Il s'agit des bilans matières et énergie essentiellement. Des exemples de flux d'énergie entrants sont l'électricité, les combustibles, la vapeur, des fluides à contenu énergétique (air comprimé, fluides cryogéniques).

Pour les flux sortants, on indiquera les fluides et solides sortants, les flux à travers les parois, les produits.

**Remarque :** les bilans précédents seront utilement complétés par les bilans exergétiques comme il sera montré par la suite.

### b) Les bilans économiques

La principale difficulté qui apparaît sur le schéma de la figure 9.2 est la disparité des unités relatives à l'ensemble des flux représentés (matière, énergie, information, capital, pollution).

Les bilans économiques sont une première tentative d'établissement d'une base de valeur universelle (base économique). Cette base fait intervenir la notion de *coût*.

**Remarque 1 :** la théorie de la valeur (chapitre 11) reconsidérera le problème sous une forme plus générale, montrant la difficulté d'établissement d'une base absolue et universelle de valeur, en recherche actuellement.

**Remarque 2 :** on différenciera l'approche économique abordée ici de l'approche financière, même si les deux approches s'appuient sur le même support : la monnaie. Il existe en effet des jeux complexes dans les domaines financiers

(parités, valeurs boursières, taxations...) qui n'entrent pas dans le cadre de cet ouvrage. Les interactions socio-politiques n'en existent pas moins (Guillet R.).

Le coût est une notion complémentaire de la notion de bénéfice : un coût négatif correspond à un bénéfice, ce qui est recherché dans toute opération (un déficit correspond à un coût positif pour une opération).

### c) *Autres bilans*

Les bilans écologiques sont devenus fondamentaux ces dernières années ; ils font intervenir une quantification (chiffage d'effluents) de plus en plus précise et avancée. Une autre approche possible considère le compromis coût-qualité.

Il n'en est pas de même d'autres bilans (sociaux, politiques...) pour lesquels la traduction chiffrée reste difficile.

## 9.2 LES BASES DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE

Un projet d'investissement est une projection vers le futur (un pari) qui nécessite la disponibilité de capitaux (ressources financières). Un projet aboutit à un arbitrage entre plusieurs configurations de systèmes et procédés (une population de configurations) entre l'instant présent et un certain horizon sur l'avenir (nombre d'années  $N$  ; souvent la durée de vie souhaitée du projet).

La rentabilité du projet aussi bien pour l'industriel que les investisseurs suppose une maîtrise des coûts.

### 9.2.1 Les divers coûts d'un système

Sur sa durée de vie, un système nécessite un compromis entre investissement et exploitation associée éventuellement au déclassement et remplacement (amortissement).

#### a) *Les coûts d'investissement*

L'investissement réalisé fait apparaître des volets techniques (étude de faisabilité), économique et financier, plus récemment sociaux et environnementaux.

L'investissement tient compte :

- des coûts directs sur site et hors site ;
- des coûts indirects (ingénierie et supervision, construction, mise en place d'appareils, aléas) ;
- d'autres coûts (démarrage, réglage, capitaux, finances, licence et recherche développement, fonds de roulements).

*Exemples de coûts directs autres que d'équipements standards* : liaisons (tubes), instrumentation-contrôle, fluides (électricité, gaz, eau, vapeur, air comprimé), site (superficie), génie civil, architecture, services.



Pour la majorité des équipements du domaine industriel, et plus particulièrement énergétique, les coûts d'investissement peuvent s'exprimer sous la forme :

$$C_I = C_o + C' \cdot \overset{o}{E}^\alpha \quad (9.1)$$

Il apparaît ainsi un terme constant (coût fixe) et un second terme fonction puissance des flux  $\overset{o}{G}$  (en l'occurrence, la puissance énergétique). Le coefficient  $C'$  est fonction lui du type de matériel (conception ;  $X$ , vecteur des variables caractéristiques), des matériaux, d'autres paramètres (physiques, temps). Ce point sera repris au paragraphe 9.3.

**Remarque :** un projet peut viser au minimum d'investissement.

### b) Les coûts de fonctionnement

Contrairement à l'investissement qui doit être consenti, au démarrage de l'opération,  $C_{Io}$  à  $t = 0$  (mais qui peut financièrement porter sur une durée différente ou égale à la durée de vie du système), l'exploitation du système génère des coûts de fonctionnement  $C_F$  qui sont estimés le plus souvent sur une base annuelle (référence de temps comptable).

Ces coûts sont généralement des coûts de type proportionnels. À titre d'exemple, on cite :

- les coûts de maintenance (entretien) ; le plus souvent estimés sous la forme d'un pourcentage de l'investissement : classiquement ils représentent 3 à 6 % de l'investissement initial ;
- les coûts des matériaux ;
- les coûts en personnel ;
- les coûts des énergies ; dans ce cas, la proportionnalité est à pondérer de discontinuités introduites par les contraintes tarifaires.

**Remarque 1 :** ces coûts évoluent avec les années.

**Remarque 2 :** les taxes et assurances constituent aussi des postes de dépenses annuelles, de même que l'amortissement (recouvrement du capital).

### ► Flux de recettes et de dépenses

Ces flux sont générés par l'investissement supposé réalisé totalement à l'année 0 (début de fonctionnement de l'installation). Sur la base annuelle à une année  $j$ , on fait apparaître un coût de fonctionnement  $C_{Fj}$  brut (cash flow brut) tel que :

Le bénéfice brut est :

$$C_{Fj} = R_j - D_j \quad (9.2)$$

$R_j$ , recette de l'année  $j$  ;

$D_j$ , dépense de l'année  $j$ .

**Remarque 1 :** le coût de fonctionnement brut correspond au bénéfice brut annuel.

**Remarque 2 :** des dépenses annuelles doivent intégrer les coûts de contrôle-commande, qualité, entretien, polluants et conditions de travail.

Le bénéfice disponible prend en compte l'amortissement et la fiscalité en vigueur (règles fiscales).

L'amortissement à l'année  $j$ ,  $A_j$  peut être linéaire ou dégressif ; il rend compte de la dépréciation des immobilisations et de la nécessité de leur renouvellement à terme.

L'impôt sur les bénéfices à taux  $b$  (exprimé en %) est introduit suivant :

$$C_{Fj} = (R_j - D_j) - b(R_j - D_j - A_j) \quad (9.3)$$

Le bénéfice net intègre le remboursement des emprunts et intérêts afférents, ou les frais de crédit bail-location, autre formule possible.

Ainsi, dans le cas d'un *emprunt avec intérêts*, le bénéfice net s'écrit :

$$C_{Fj} = (R_j - D_j - A_j - F_j)(1 - b) + A_j - E_j \quad (9.4)$$

$E_j$ , annuité de remboursement de l'emprunt ;

$F_j$ , frais liés aux intérêts ; cette charge est déductible du bénéfice net.

Dans le cadre d'un contrat *crédit-bail-location*, le bénéfice s'écrit :

$$C_{Fj} = (R_j - D_j - L_j)(1 - b) \quad (9.5)$$

$L_j$ , loyer annuel déductible du revenu.

**Remarque :** la formule crédit-bail ne fait plus apparaître d'amortissement, sauf s'il y a rachat du bien en fin de contrat, avec une valeur résiduelle  $V_r$  (investissement amortissable).

L'expression générale du bénéfice net annuel est :

$$C_{Fj} = (R_j - D_j - A_j - F_j - L_j)(1 - b) + A_j - E_j \quad (9.6)$$

**Remarque 1 :** dans la suite de l'ouvrage, on simplifiera généralement les calculs effectués dans un but pédagogique.

**Remarque 2 :** on peut chercher à maximiser le bénéfice.

### c) Coût global

Le coût global d'une opération est défini sur la durée de vie de cette opération. Si  $N$  est la durée de vie de l'opération, il vient simplement :

$$C_G = C_I + \sum_{j=1}^{j=N} C_{Fj} \quad (9.7)$$

**Remarque 1 :** la relation (9.7) intègre la variabilité des prix par l'intermédiaire du second terme ; mais la variabilité du coût monétaire (financier)

n'apparaît pas dans ce terme et n'a pas été explicitée pour le premier  $C_1$  ; dans ce dernier cas, elle n'est recevable en première approche que pour l'investissement effectué en totalité à l'année 0.

**Remarque 2 :** au minimum de coût d'investissement et du coût de fonctionnement, correspond une troisième possibilité associée au minimum de coût global.

**Remarque 3 :** la comparaison éventuelle de diverses configurations de systèmes à durées de vie différentes suppose la recherche d'un critère ne dépendant pas de  $N$  ; on définit alors un coût global unitaire (ou annuel),

$$c_G = \frac{C_G}{N}.$$

### 9.2.2 Notion d'actualisation

#### a) Définition de l'actualisation

Là encore, on suppose sur une base annuelle (unité de temps), à l'année initiale  $i$  (année de référence), la disposition d'une unité monétaire  $u_{mi}$  ; du fait de l'évolution économique (et générale), à l'année finale  $f$  ( $N$  années plus tard), cette même unité monétaire aura une valeur  $u_{mf} \neq$  de  $u_{mi}$ .

**Définition :** l'actualisation consiste à rechercher à l'instant initial  $i$  la valeur actualisée  $u_{ma}$ , pour disposer à l'année  $N$  d'une unité monétaire initiale  $u_{mi}$ .

En appelant  $a_i$  le taux d'actualisation à l'année  $i$ , il vient au bout de  $N$  années :

$$u_{ma}(N) = \frac{1}{\prod_i (1 + a_i)} u_{mi} \quad (9.8)$$

**Remarque 1 :**  $u_{ma}(N)$  est la valeur actuelle d'une  $u_{mi}$  à l'année  $N$ .

**Remarque 2 :** généralement, sur un horizon de  $N$  années (pas trop large), on suppose une actualisation constante :  $a_i = a, \forall_i$ .

**Exemple :** expression du coût de fonctionnement actualisé à l'année  $j$ , en supposant le taux d'actualisation constant  $a$  :

$$CF_{ja} = \frac{CF_j}{(1 + a)^j} \quad (9.9)$$

#### b) Estimation du taux d'actualisation

Le choix de  $a$  est délicat et fluctuant ; il rend compte du prix que le secteur productif accepte de payer pour le financement de ses investissements, ainsi que du prix que la collectivité accepte de payer en renonçant à une autre satisfaction immédiate : c'est un compromis entre une demande immédiate et une offre dans le futur.

Le taux d'actualisation doit donc traduire un équilibre entre l'offre et la demande, surtout en terme d'investissement ; la simulation de l'offre et de la demande doit prendre en compte les conditions d'emprunt, le mode de financement, l'appréciation du risque, les corrections d'impôts...

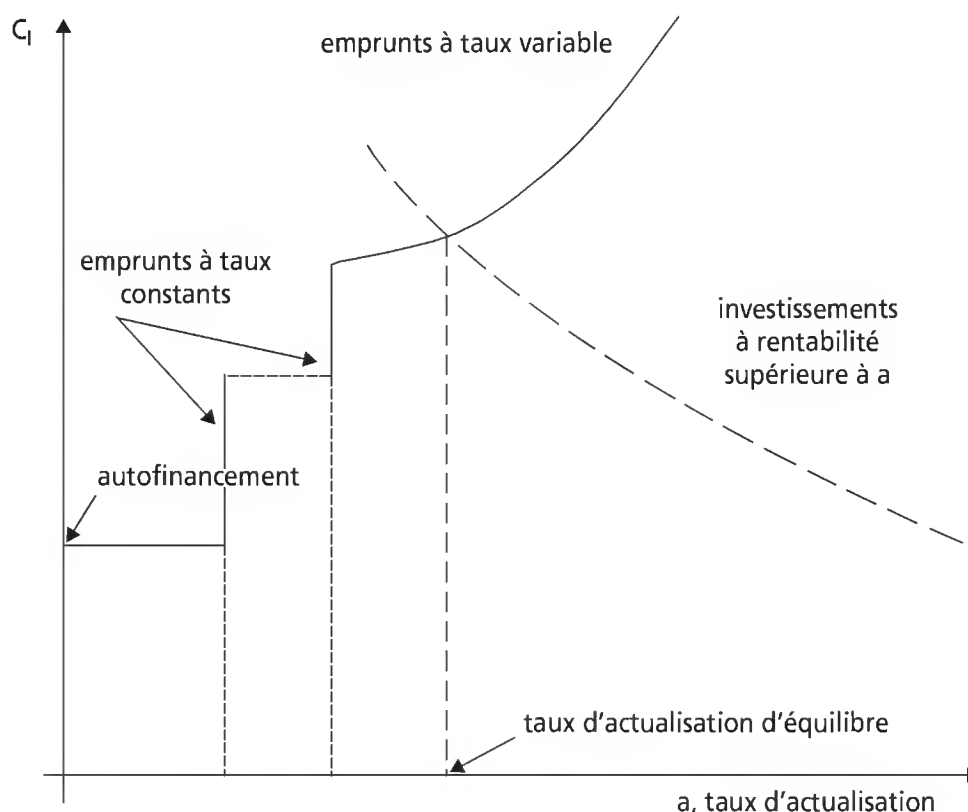


Figure 9.3 Estimation du taux d'actualisation d'un projet

On voit sur la figure 9.3 qu'il en résulte un taux d'actualisation à l'équilibre entre l'offre et la demande, qui sera préconisé.

Toutefois, ce choix n'étant pas totalement objectif, une étude de sensibilité du projet au taux d'actualisation est suggérée *a minima*.

**Remarque 1 :** selon l'intensité économique, plus la croissance est forte, plus les besoins en investissements sont grands, plus le taux d'actualisation est élevé ; le taux d'actualisation est en quelque sorte une variable intensive, représentant la « pression économique ».

**Remarque 2 :** si  $a$  est une constante, l'année de référence n'a pas une grande importance, en particulier dans la comparaison de projets distribués dans le temps. Malheureusement,  $a$  est fluctuant, comme il a été dit, d'où l'existence d'indice d'actualisation (par rapport à une année de référence précisée).

**Exemples :** indice des prix de l'INSEE ; taux d'actualisation publics.

► Prise en compte du coût de l'argent

Le financement d'un projet peut se faire en autofinancement ou par emprunt, voire selon un mode mixte.

Quel que soit le mode d'emprunt, celui-ci suppose un certain taux d'intérêt  $i$  (pourcentage).

Ainsi, partant d'une valeur initiale  $V_i$ , sur une durée de  $N$  années avec une base annuelle, la valeur finale  $V_f$  (remboursement) s'élève à :

$$V_f = V_i(1+i)^N \quad (9.10)$$

**Remarque :** si le paiement des intérêts s'effectue  $p$  fois par an, la relation (9.10) devient :

$$V_f = V_i \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{Np}$$

On en déduit un intérêt effectif  $i_e = \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p - 1$ .

Si la rémunération des intérêts se fait sur une base continue ( $p \rightarrow \infty$ ), il vient aisément :

$$V_f = V_i e^{iN}$$

On en déduit l'intérêt effectif  $i_e = e^i - 1$

Dans ces deux cas,  $V_f = V_i(1+i_e)^N$ , en base annuelle.

La relation (9.10) étant générale, l'estimation du taux d'actualisation pour des financements par emprunt en résulte :

$$a = i_e(1-b) + s \quad (9.11)$$

$b$ , taux d'imposition des bénéfices industriels et commerciaux (rappel)

$s$ , taux de risque (coefficient de sécurité économique).

► Prise en compte de l'inflation

L'inflation traduit l'augmentation des prix des biens et des services.

**Exemple :** Indice des prix à la consommation.

En appelant  $a_i$  le taux d'inflation sur une base annuelle, par rapport à une référence initiale  $i$ , on en déduit l'évolution d'un coût quelconque  $C_i$ .

Deux possibilités d'estimation apparaissent alors :

- Estimation en  $u_m$  constante (à la valeur de l'année initiale). Le fait de négliger les évolutions monétaires en fait une approximation d'autant plus grossière que  $N$  est grand.
- Estimation en unité monétaire courante ( $u_{mj}$ ). Cette démarche intègre l'inflation ; même si l'estimation de celle-ci reste difficile, le résultat obtenu approche plus la réalité économique.

Il apparaît alors une actualisation apparente  $a_a$ , reliée à l'actualisation réelle  $a_r$ , pour l'intermédiaire du taux d'inflation  $a_i$  :

$$(1 + a_a) = (1 + a_r)(1 + a_i) \quad (9.12)$$

D'où la définition des coûts actualisés à l'année  $j$  :

en  $u_m$  constante :  $C_{j\text{constant}} = C_i (1 + a_r)^j$

en  $u_m$  courante :  $C_{j\text{courant}} = C_i (1 + a_a)^j$

On en déduit la relation existant entre les coûts en  $u_m$  constante et courante :

$$C_{j\text{constant}} = C_{j\text{courant}} \frac{(1 + a_r)^j}{(1 + a_a)^j} = \frac{C_{j\text{courant}}}{(1 + a_i)^j} \quad (9.13)$$

La relation (9.13) est utile pour exprimer des résultats économiques sur une même base monétaire ; généralement, les calculs sont faits en valeur monétaire constante (c'est-à-dire ramenée en coût à l'unité monétaire de l'instant  $i$ ).

**Remarque :** le fait de chiffrer un projet en unité monétaire constante ne veut pas dire pour autant que les divers coûts sont constants ; la dérive de certains ou de la totalité des coûts peut être incluse, si on sait la chiffrer de façon significative.

### c) Les bilans actualisés

L'ensemble des notions introduites aux paragraphes (a) et (b) précédents conduit aux expressions des bilans actualisés (discounted cash flow).

#### ► Bilans de fonctionnement actualisés

Ces bilans sont annuels ; à l'année  $j$ , le coût de fonctionnement actualisé vaut :

$$CF_{ja} = \frac{CF_j}{\prod_j (1 + a_j)}$$

En supposant, pour simplification, un taux d'actualisation constant selon la durée de vie de l'équipement ( $N$  années), il en résulte le bilan actualisé sur ces  $N$  années,  $CF_a$  :

$$CF_a = \sum_j^N \frac{CF_j}{(1 + a)^j} \quad (9.14)$$

Ce critère est une mesure des gains générés par l'investissement sur la durée de vie de l'installation.

**Remarque 1 :** il faut toutefois prendre précaution de bien intégrer dans  $a$  les conséquences du mode de financement, de la fiscalité, mais aussi de points non évoqués jusqu'alors : fonds de roulement (stock), et de la valeur résiduelle des équipements.

**Remarque 2 :** la variabilité du prix des énergies (et aussi des matériaux) impose une actualisation.



**Remarque 3 :** les coûts de fonctionnement sont aussi appelés, dans certains ouvrages, coûts d'exploitation ou opératoires.

► Bilan global actualisé

Identiquement au bilan de fonctionnement, on peut établir à  $a$  constant, un bilan global actualisé.

Dans le cas où le coût d'investissement est réparti (pour simplifier) sur la durée de vie  $N$  de l'équipement, il vient :

$$C_{G_a} = \sum_j \frac{C_{Ij} + C_{Fj}}{(1+a)^j} \quad (9.15)$$

Dans le cas, beaucoup plus commun, où l'investissement est réalisé en totalité à l'année initiale de réalisation du projet  $C_{Ii}$ , l'expression du bilan global actualisé s'écrit (valeurs arithmétiques) :

$$C_{G_a} = -C_{Ii} + \sum_{j=1}^N \frac{(R_j - D_j)}{(1+a)^j} + \frac{C_{IN}}{(1+a)^N} \quad (9.16)$$

$C_{IN}$ , valeur résiduelle de l'investissement à l'année  $N$ , d'arrêt de l'installation.

**Remarque 1 :** si on ne tient pas compte de  $C_{IN}$ , on obtient par (9.16) ce qui est appelé la valeur actuelle nette (VAN).

**Remarque 2 :** la relation (9.16) fait apparaître une valeur négative de l'investissement (débours) ; il en résulte que  $C_G$  correspond au bénéfice net actualisé.

**Remarque 3 :** l'utilisation des résultats du paragraphe 9.1.2 b permet de donner à  $C_{G_a}$  la forme plus complète suivante :

$$C_{G_a} = -C_{Ii} + \sum_{j=1}^N \frac{(R_j - D_j - A_j - F_j)(1-a) + A_j - E_j}{(1+a)^j}$$

► Annuité moyenne actualisée

Les bilans actualisés précédents ne permettent pas la comparaison de systèmes ayant des durées de vie différentes. Aussi, la notion d'annuité moyenne actualisée (AMA) a été introduite pour ce faire :

$$AMA = \frac{C_{G_a}}{fa} \quad (9.17)$$

### 9.2.3 Critères de performance économique

Il existe de très nombreux critères économiques ; le lecteur s'en convaincra aisément en consultant la presse économique. Ceux-ci sont répartis en deux classes essentielles :

- les critères purement économiques dont la notion extensive de bénéfice, et la notion de taux de rentabilité interne ;
- des critères temporels qui relient l'économie à la variable temps.

#### a) Taux de rentabilité interne

**Définition :** le taux de rentabilité interne (TRI) est la valeur du taux d'actualisation qui annule le bénéfice net actualisé.

Si le taux d'actualisation  $a$  est supérieur à TRI, l'investissement est rentable, mais on se rappelle la difficulté d'estimation du taux d'actualisation.

L'intérêt de la notion de TRI provient plus du fait qu'il ne nécessite pas d'estimation de  $a$  ; l'expression permettant le calcul du TRI, conformément aux développements proposés est fourni par la relation (9.16).

Dans le cas où  $C_F$  est une constante et que la valeur résiduelle  $C_{IN}$  est négligée, il vient :

$$C_{II} = C_F \frac{(1 + TRI)^N - 1}{(1 + TRI)^N \cdot TRI} \quad (9.18)$$

**Remarque :** le TRI permet aussi le classement de projets par rentabilité croissante ou décroissante par rapport à une situation de référence (critère relatif), conformément à :

$$C_{II} - C_{Iref} = \sum_j \frac{CF_j - CF_{ref}}{(1 + TRI)^j}$$

**Remarque :** il existe un critère économique adimensionnel : le ratio bénéfice/coûts.

#### b) Critères temporels

On en distinguera deux : le temps de retour brut et le temps de retour d'un surinvestissement.

Ces deux critères sont basés sur le fait que l'immobilisation souhaitée pour l'investissement doit être la plus courte possible.



► Temps de retour sur investissement  $t_{ri}$

$t_{ri}$ , correspond au temps de récupération de l'investissement. Plusieurs estimations sont possibles ; on se contentera de le définir de façon générale sous la forme :

$$t_{ri} = \frac{\text{Investissement}}{\text{Gain d'exploitation}} \quad (9.19)$$

Pour simplifier on supposera que l'investissement est un investissement initial  $C_{li}$ .

Les variantes proviennent alors de l'estimation du gain d'exploitation : on peut choisir le gain d'exploitation de la première année (non actualisation) ou le gain d'exploitation moyenné sur la durée de vie de l'installation.

Le premier cas privilégie les investissements.

Pour le second cas, il vient :  $t_{ri} = \frac{C_{li}}{CF}$ .

En utilisant la relation (9.18) il vient :

$$t_{ri} = \frac{1}{TRI} - \frac{1}{(1 + TRI)^N \cdot TRI}$$

On voit alors que si  $N$  est grand,  $t_{ri} \cong \frac{1}{TRI}$  ; le critère temps de retour est lié (de façon rudimentaire) au taux de rentabilité interne. Plus  $t_{ri}$  est court, plus l'investissement est rentable.

**Exemple numérique :**  $N = 20$  ans ;  $TRI = 0,20$  (20 %)  $t_{ri} = 4,9$  ans  $\cong 5$  ans

**Remarque :** le temps de retour exploité est indépendant du financement.

► Temps de retour d'un surinvestissement  $t_{rs}$

À même production, ce temps de retour  $t_{rs}$  différencie les coûts d'investissement et d'exploitation (valeurs marginales) :

$$t_{rs} = \frac{\text{surinvestissement}}{C_F \text{ annuel moyen généré}} = \frac{\Delta C_I}{\Delta C_F}$$

avec :

$$\Delta C_I = C_{li} - C_{lref}$$

$$\Delta C_F = CF - C_{Fref}$$

On notera ici que  $t_{rs}$  a été particularisé, au coût de fonctionnement annuel moyen. Plus  $t_{rs}$  est faible, plus le surinvestissement est rentable. Enfin,  $t_{rs}$  ne prend pas en compte l'évolution du système au-delà de son horizon de temps, qui peut être différent de la durée de vie des investissements initiaux.

Le temps de retour de surinvestissement est utile pour comparer des alternatives.

► Un exemple incitant à la prudence

La figure 9.4 représente, sur une base de variation linéaire, la comparaison entre deux solutions 1 et 2 ; la solution 1 (2) génère un gain d'exploitation annuel par rapport à l'existant  $\Delta C_{F1}$  ( $\Delta C_{F2}$ ), pour un surinvestissement  $\Delta C_{I1}$  ( $\Delta C_{I2}$ ).

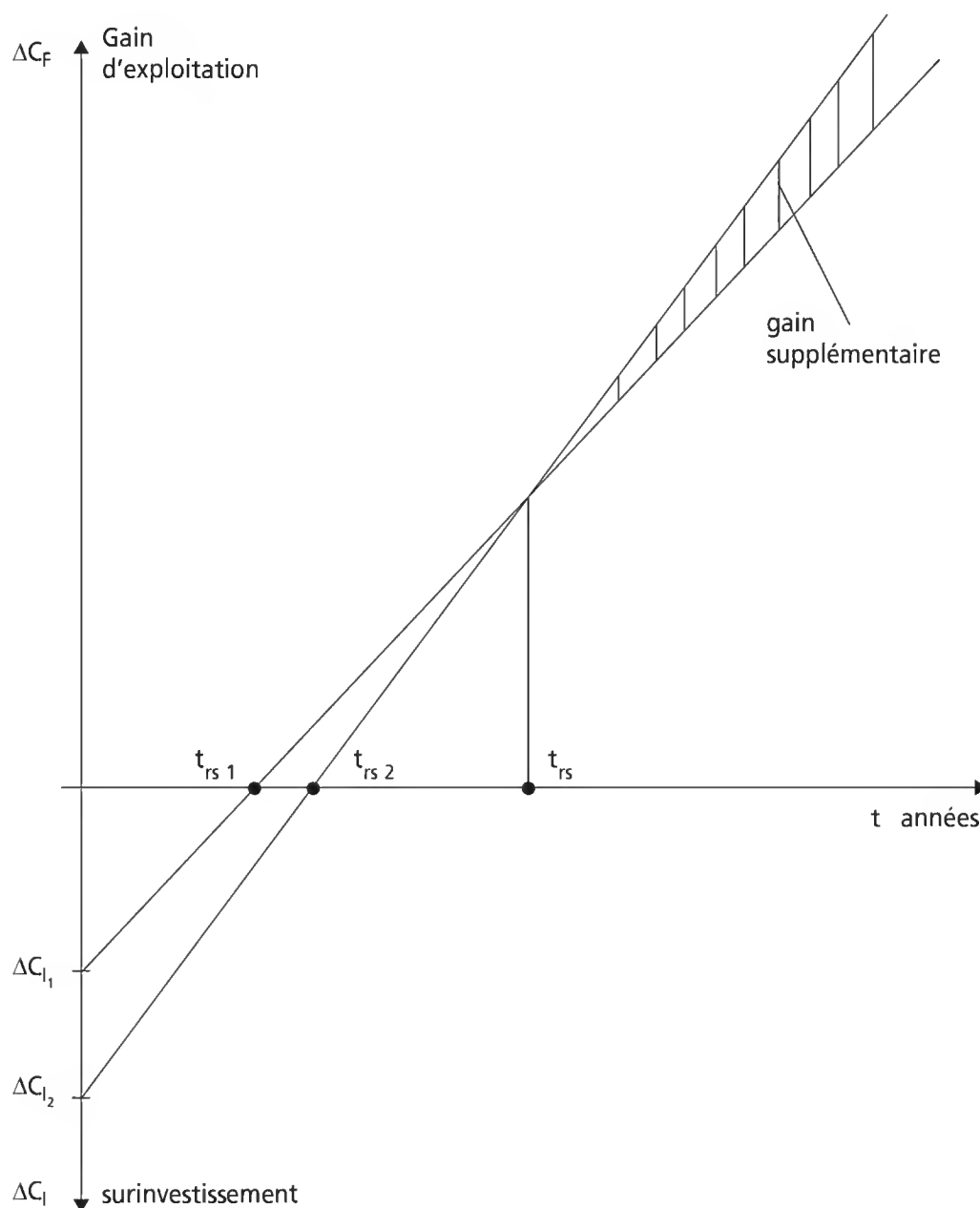


Figure 9.4 Comparaison temporelle d'alternatives de surinvestissement

On voit sur la figure que la solution 1 possède un temps de retour sur investissement  $t_{rs1} < t_{rs2}$  : la solution 1 est supérieure à la solution 2 à court terme (horizon des surinvestissements).

Un examen sur la durée de vie plus longue du système montre qu'à partir d'un certain temps  $t_{rs}$  (voir figure 9.4), le surcoût de la solution 2 est compensé et que cette solution dégage des gains supplémentaires par rapport à la solution 1.

En conclusion, on se gardera de trancher trop rapidement ; il n'y a pas de règle absolue de choix d'investissement. Des logiciels existent pour faciliter les études de simulation et sensibilité paramétrique ; on aboutit alors naturellement à une approche d'optimisation thermoéconomique, qui relève clairement des sciences de l'ingénieur.

### 9.3 THERMOÉCONOMIE ET PROLONGEMENTS

Si le paragraphe 9.2 a montré comment chiffrer les divers coûts d'un système et d'un procédé et la compétition qui existe entre investissement et fonctionnement, il a aussi mis en évidence les imprécisions (indéterminations) importantes liées aux incertitudes du monde économique.

De ce fait, une approche thermoéconomique ne peut pas faire intervenir une modélisation très sophistiquée : il y a lieu de préserver l'homogénéité des développements.

De plus, le souci pédagogique conduit ici, pour des raisons de démonstration, vers des modèles de tendance simple, bien adaptés de surcroît à la thermodynamique.

#### 9.3.1 Modélisation et optimisation simples

L'analyse économique (paragraphe 9.2) a pour objet essentiel l'optimisation technico-économique, cas particulier de la thermoéconomie : l'ingénieur cherche à choisir entre diverses solutions techniques ; il optimise le dimensionnement de l'installation (dimensions finies) ; il optimise l'exploitation de l'installation (variable temps), soit de façon prévisionnelle, soit en temps réel.

Il apparaît alors une fonction objectif FO (critère) qui pour un système nouveau est dépendante de  $C_I$  et  $C_F$ , ou pour une remise à niveau, fait apparaître le système de référence tel que :

$$FO = f(C_I - C_{Iref}, C_F - C_{Fref}) \quad (9.21)$$

Les fonctions objectifs précédentes ne font pas apparaître les dépendances aux variables d'état du système (physiques, techniques) ; cette dépendance reste à expliciter avec ses conséquences (but du présent paragraphe 9.3).

À titre d'exemple, on indique que :

- la valeur finale  $C_{ff}$  est en première approximation inversement proportionnelle à la durée de vie du système :  $C_{ff} \cong \frac{1}{N}$  ;
- la valeur thermodynamique d'un rejet thermique représentée par  $T_R$  est proportionnelle (en première approximation) à  $(1 - \eta_C)$ ,  $\eta_C$  rendement de Carnot de la machine thermomécanique de cogénération :  $T_R \cong (1 - \eta_C)$  ;

- le flux d'entropie créé par le fonctionnement d'un système est inversement proportionnel (en première approximation) au coût d'investissement unitaire

$$c_I = \frac{C_I}{N} : \dot{S}_i \equiv \frac{1}{c_I}.$$

a) *Modèles simples à une seule variable d'état*

Les exemples ci-dessus ont montré les relations qui peuvent exister entre les données économiques et les données physiques et techniques.

De façon générale, on appelle  $y$  la FO, et  $x$  la variable d'état du système ; la relation fonctionnelle  $y = f(x)$  peut prendre diverses formes.

➤ **Relation linéaire**

$$y - y_o = a(x - x_o) \quad (9.22)$$

$(x_o, y_o)$  est un état de référence ;  $a$ , paramètre du modèle.

**Exemple :** approximation à  $\pm 10\%$  de fonctions exponentielles

$$\begin{aligned} y = 1 + 1,1x &\cong e^x && \text{pour } y \in [1; 1,45] \\ y = 1 - 0,9x &\cong e^{-x} && \text{pour } y \in [0,60; 1] \end{aligned}$$

➤ **Relation puissance**

$$\frac{y}{y_o} = \left( \frac{x}{x_o} \right)^b \quad (9.23)$$

**Exemple :** approximation à  $\pm 3\%$  de fonctions exponentielles.

$$\begin{aligned} y = 1 + 0,82 \left( \frac{x}{0,60} \right)^{1,33} &\cong e^x && \text{pour } y \in [1; 2,40] \\ y = 1 - 0,45 \left( \frac{x}{0,60} \right)^{0,73} &\cong e^{-x} && \text{pour } y \in [0,40; 1] \end{aligned}$$

Cette forme est très utile ; elle est utilisée de façon privilégiée dans le domaine économique, comme il sera précisé ci-après (paragraphe 9.3.1.c).

De nombreuses applications existent aussi dans le domaine physique ; à titre d'illustration, on indiquera les corrélations rendant compte des interactions fluide-paroi.

Ainsi, la représentation des frottements fluide-paroi se fait par l'intermédiaire d'un coefficient de frottement  $f$  tel que :

$$f = k.Re^{-\alpha}$$

$Re$ , nombre de Reynolds  $= \rho \frac{VD_h}{\mu}$  ( $\rho$ , masse volumique du fluide ;  $\mu$ , viscosité

dynamique du fluide ;  $V$ , vitesse moyenne débitante du fluide,  $D_h$ , diamètre hydraulique caractéristique de l'écoulement).

**Remarque :**  $\alpha = 1$  en régime d'écoulement laminaire.  $\alpha$  varie entre 0 et 0,20 en régime turbulent pour des tubes cylindriques longs, à surface lisse ou rugueuse.

La représentation des transferts de chaleur (couplé au transfert de matière) se fait par l'intermédiaire du nombre de Nusselt  $Nu$  :

$$Nu = k.Re^{-\beta}$$

$Nu$ , nombre de Nusselt =  $\frac{hD_h}{\lambda}$  ( $\lambda$ , conductivité thermique du fluide ;  $h$ , coefficient de transfert de chaleur (convectif) à la paroi).

**Remarque 1 :**  $\beta = 0$  en régime laminaire.

$\beta \in [0,40; 0,80]$  selon le cas en régime turbulent ; en moyenne  $\beta = 0,50$ .

**Remarque 2 :** on rencontre aussi couramment dans la pratique scientifique et technique des sommes de fonctions puissances.

**Exemple :** perte de charge d'un fluide traversant un milieu poreux :

$$\frac{1}{2}f = 16,7Re^{-1} + 0,24 \quad (\text{corrélation d'Ergun}).$$

#### b) Modèles simples à plusieurs variables d'état

Il s'agit ici d'une généralisation de la relation puissance, justifiée par son usage pratique, en particulier dans l'évaluation économique.

La FO s'écrit alors :

$$y = \sum k_i \prod_j x_j^{\alpha_{ij}} \quad (9.24)$$

**Exemple :** Fonction technico-économique de Cobb-Douglas :

$$P = kL^\alpha K^\beta$$

$P$ , production ;  $L$ , travail ou main d'œuvre ;  $K$ , capital ; avec  $\alpha + \beta = 1$  (condition de normation).

Cette fonction production a été étendue récemment à l'énergie  $E$  (Lindenberg D.) :  $P = kL^\alpha K^\beta E^{1-\alpha-\beta}$

**Remarque 1 :** la relation de Cobb-Douglas peut encore être étendue, comme proposé dans l'analyse de P. Le Goff (Le Goff P.) ; la fonction production apparaît alors sous la forme d'une fonction de Cobb-Douglas généralisée des variables suivantes :

$$P = f(M, E, L, T, I, D, E, K)$$

$M$ , matière première ;  $E$ , énergie ;  $L$ , travail ;  $T$ , temps ;  $I$ , information ;  $D$ , dimension ;  $E$ , eau ;  $K$ , capital).

Pour notre part, nous suggérons de remplacer la variable eau (qui entre dans la matière) par une variable  $E$  écologique rendant compte de la pollution de l'environnement.

**Remarque 2 :** les exposants de la FO de Cobb-Douglas sont supposés constants ; les coefficients  $k_i$  dépendent des grandeurs économiques.

### ► Notions d'élasticité

Un problème couramment rencontré dans la pratique industrielle est l'adaptation locale d'un système autour d'une situation de référence supposée connue ( $y_{ref}$  pour  $\{x_{jref}\}$ ).

Si on suppose alors que la FO (9.24) ne comporte qu'un monome (relation de Cobb-Douglas), il vient :

$$\frac{y}{y_{ref}} = \prod_j \left( \frac{x_j}{x_{jref}} \right)^{\alpha_j} \quad (9.25)$$

Cette relation correspond à une additivité linéaire des variations relatives, autour de la situation de référence, sur le domaine des variables d'état où le vecteur  $\{x_j\}$  peut être considéré constant. On a en effet par différentiation logarithmique :

$$\frac{dy}{y} = \sum_j \alpha_j \frac{dx_j}{x_j} \quad (9.26)$$

$\alpha_j$  est donc un coefficient sans dimension, donnant la sensibilité de  $y$  à  $x_j$  :  $\alpha_j$  est le coefficient d'élasticité de  $y$  à  $x_j$ .

### c) Des corrélations thermoéconomiques

Les corrélations économiques sont généralement rapportées aux variables dimensionnelles des systèmes, aux flux échangés, aux unités d'énergie utilisées. On propose ci-après d'examiner successivement et succinctement les corrélations liées aux coûts d'investissement, puis de fonctionnement.

#### ► Corrélation des coûts d'investissement

Celles-ci sont utiles pour une exploration dans l'avant-projet préalable à l'appel d'offre. Elles nécessitent une connaissance aussi complète que possible de l'existant, et une identification des coefficients  $(k_i, \alpha_{ij})$  des corrélations par les méthodes exposées par la suite (chapitre 10, paragraphe 10.2.7).

Le tableau 9.1 fait apparaître des fourchettes de coûts actualisés à 2006. L'ensemble des procédés étant électriques, la référence à la variable kW installé semble pertinente pour comparaison entre les cinq alternatives proposées.

On notera toutefois qu'il existe d'autres techniques pour lesquelles la disponibilité en données est moindre (techniques émergentes : procédés micro-ondes, procédés diélectriques haute fréquence).

Par ailleurs, le tableau montre clairement que les coûts des annexes (raccordement électrique, génie civil) puis montage sont toujours significatifs vis-à-vis du coût de l'équipement. De façon générale, les coûts de génie civil  $C_{GC}$  peuvent être ajustés

**TABEAU 9.1** VARIATION DES COÛTS D'INVESTISSEMENT DE PROCÉDÉS ÉLECTRIQUES RAPPORTÉ AU KW INSTALLÉ.

	Équipement	Annexes et mise en place	Total
Chaudière à thermoplongeur			
$\dot{Q} < 100 \text{ kW}$	0,50 – 0,60	0,35 – 0,70	0,85 – 1,30
$500 \text{ kW} < \dot{Q} < 7 \text{ MW}$	0,10 – 0,18	0,10 – 0,22	0,20 – 0,40
	Équipement	Annexes et mise en place	Total
Générateur de gaz chaud à résistances	0,08 – 0,15	0,10 – 0,20	0,18 – 0,35
Pompe à chaleur	1,20 – 2,20	0,70 – 0,95	1,90 – 3,15
Compression mécanique de vapeur	1,75 – 4,00	1,50 – 3,50	3,25 – 7,50
Procédés infrarouges IR	0,50 – 1,50	0,25 – 0,75	0,75 – 2,25

sous la même forme fonctionnelle ; ainsi, pour les chaudières classiques, il vient :

$$C_{GC} = 4,2 \dot{W}_{elec}^{0,32} \text{ en kE (2006).}$$

Pour les pompes à chaleur et la compression mécanique de vapeur (même type de machines) :  $C_{GC} = 1,9 \dot{W}_{elec}^{0,60} \text{ en kE (2006).}$

**TABEAU 9.2** QUELQUES EXEMPLES DE VALEUR DU COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ ALPHA DE L'ÉQUATION (9.27) POUR DIVERS ÉQUIPEMENTS

Équipement	Variable (x)	$\alpha$	Domaine
Ventilateur (centrifuge)	$\dot{V}$	0,44 1,17	0,5-5 Nm <sup>3</sup> /s 5-40 Nm <sup>3</sup> /s
Compresseur (axial, centrifuge, alternatif)	$\dot{W}$	0,95	50 kW-8 MW
Pompe (piston)	$\dot{W}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,25 \\ 0,45 \\ 0,84 \end{array} \right.$	20 W-300 W 0,3 kW-20 kW 20 kW-200 kW
Centrifuge	$\dot{W}$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,23 \\ 0,37 \\ 0,48 \end{array} \right.$	20 kW-300 kW 0,3 kW-20 kW 20 kW-200 kW
Chaudière standard	$\dot{Q}$	0,78	0,5-10 MW
Chaudière à vapeur	$\dot{Q}$	0,85	50 MW-2 GW

Équipement	Variable (x)	$\alpha$	Domaine
Echangeur de chaleur Double tube Plaque Tube et calandre	A	$\begin{cases} 0,16 \\ 0,40 \\ 0,66 \end{cases}$	$\begin{matrix} 0,2-6\text{m}^2 \\ 15-1500\text{ m}^2 \\ 15-400\text{ m}^2 \end{matrix}$
Evaporateur	A	$\begin{cases} 0,40 \\ 0,66 \end{cases}$	10-1000 m <sup>2</sup>
Tour de refroidissement	$\dot{V}_{\text{eau}}$	0,54	0,05-9 m <sup>3</sup> /s
		0,93	
Moteur électrique Transformateur	$\dot{W}$ $E_{\text{elec}}$	$\begin{cases} 0,80 \\ 1,00 \\ 0,40 \\ 0,39 \end{cases}$	$\begin{matrix} 3-15\text{ kW} \\ 15-150\text{ kW} \\ 0,15-6\text{ MW} \\ 0,2-50\text{ MWA} \end{matrix}$
Moteur à combustion interne (MCI)	$\dot{W}$	0,81	7 kW-10 MW
Turbine à combustion (TAC)	$\dot{W}$	$\begin{matrix} 0,65 \\ 0,89 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 10\text{ kW}-15\text{ MW} \\ 70\text{ MW}-200\text{ MW} \end{matrix}$
Turbine à vapeur	$\dot{W}$	$\begin{matrix} 0,50 \\ 0,90 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,1-15\text{ MW} \\ 50\text{ MW}-600\text{ MW} \end{matrix}$
Séchoir atmosphérique Réacteur chimique Réservoir de stockage	A V V		$\begin{matrix} 1-10\text{ m}^2 \\ 0,2-4\text{ m}^3 \\ 0,07-150\text{ m}^3 \\ 150-19\,000\text{ m}^3 \end{matrix}$
Tube	D		0,05-0,75 m

Conformément à la loi de Cobb-Douglas monovariante appliquée au coût d'investissement d'équipement, la relation (9.25) devient :

$$C_I = C_{Iref} \left( \frac{x}{x_{ref}} \right)^\alpha \quad (9.27)$$

Le tableau 9.2 donne pour des équipements courants du domaine de l'énergétique, la variable  $x$  associée à ce coût, la valeur du coefficient d'élasticité  $\alpha$  relatif à cette variable et l'intervalle de la variable sur lequel  $\alpha$  peut être pris comme constant. Encore faut-il une référence (à chercher dans la littérature ou sur le marché).

**Remarque :** la plage de variation de  $\alpha$  est comprise entre 0,40 et 1,20 ; la valeur la plus courante est voisine de 0,60. En l'absence d'autre information, on pourra retenir cette même valeur pour l'étude.

Les principales variables qui apparaissent dans le tableau sont des variables de flux (débits, puissance thermique ou mécanique), ainsi que des variables dimensionnelles (encombrement) liées à la taille des équipements (surface d'échange, volume du stock).



**Remarque :** on notera que pour un même équipement  $\alpha$  peut varier selon le domaine (influence de la taille de l'équipement sur la valeur de  $\alpha$ ).

Pour compléter la démarche, on indiquera quelques corrélations dimensionnelles pour les pompes à chaleur et la compression mécanique de vapeur.

**Exemple de la pompe à chaleur :** dans ce cas, la corrélation du coût d'équipement est ajustée par rapport à la variable, puissance thermique chaude ou utile  $\dot{Q}_c$ . Il vient :

pour un fluide utile eau  $C_I = 0,28 \dot{Q}_c^{1,13}$  avec  $\dot{Q}_c \leq 1,1 MW$

pour un fluide utile air  $C_I = 0,23 \dot{Q}_c^{1,14}$  avec  $\dot{Q}_c \leq 4 MW$

**Remarque :** l'approche proposée est globale pour la pompe à chaleur PAC ; elle ne tient pas compte du génie civil, ni du raccordement électrique et mise en route.

**Exemple de la compression mécanique de vapeur CMV :** cette installation comporte plusieurs composants : moteur électrique, compresseur, évapo-condenseur et des accessoires. On donne ci-après les corrélations dimensionnelles :

- moteur électrique :  $C_I = 0,28 \dot{W}$   $\dot{W} \in [0,2 - 1,2 MW]$
- évapo-condenseur :  $C_I = kA$  (9.28)

A, surface de transfert de l'échangeur.

La constante  $k$  dépend du type d'échangeur (tubulaire ou à plaques) et du matériau utilisé (acier ordinaire ou acier inoxydable) ; la valeur de  $k$  est fournie dans le tableau 9.3 ci-dessous.

**TABEAU 9.3** COEFFICIENT  $K$  KE/M<sup>2</sup> DE LA RELATION (9.28) RELATIVE À L'ÉVAPO-CONDENSEUR

Évapo-condenseur		Tubulaire	A plaques
Acier	Ordinaire	0,80	0,90
	Inoxydable	1,25	1,40

**Remarque :** le montage et la mise en service de l'échangeur est estimé sous forme forfaitaire d'un pourcentage de  $C_I$  : 90 % pour l'acier ordinaire ; 60 % pour l'échangeur en acier inoxydable.

- compresseur : le coût d'investissement du compresseur est lié à la variable débit volumique  $\dot{V}$  (Nm<sup>3</sup>/h) des vapeurs qui le traversent. Mais il dépend aussi de la technologie utilisée. Ainsi, on retiendra une corrélation de type :

$$C_I = k \dot{V}^\alpha \quad \dot{V} \in D \quad (9.29)$$

$k$  dépend de la technologie et du domaine  $D$ , de même que  $\alpha$ , conformément au tableau 9.4 ; le coût est en kE 2006.

TABLEAU 9.4 COEFFICIENTS  $k$  ET  $\alpha$  DE LA RELATION (9.29) RELATIVE AU COMPRESSEUR

Compresseur	Domaine	$k$	$\alpha$
A lobes	500-1 000 Nm <sup>3</sup> /h	4,20	0,32
	1 000-12 000 Nm <sup>3</sup> /h	0,10	0,86
Bi-vis	500-4 000 Nm <sup>3</sup> /h	7,20	0,45
	4 000-20 000 Nm <sup>3</sup> /h	0,39	0,81
Centrifuge monoétage	7 000-30 000 Nm <sup>3</sup> /h	13,20	0,37
	30 000-100 000 Nm <sup>3</sup> /h	2,10	0,54
Centrifuge bi-étage	4 000-10 000 Nm <sup>3</sup> /h	200	0,11
	10 000-40 000 Nm <sup>3</sup> /h	12	0,42

À l'ensemble des coûts des composants, il y a lieu d'ajouter des accessoires (en kE) :

Armoires électriques :  $C_I = 4,7 \dot{W}^{0,44}$

Tuyauteries :  $C_I = 2,8 \dot{W}^{0,63}$   $\dot{W} \in [200, 1200 \text{ kw}]$

Génie civil :  $C_I = 1,9 \dot{W}^{0,60}$

**Remarque** : tous les coûts annexes ont été exprimés en fonction de la variable puissance électrique consommée ; il peut y avoir lieu d'y ajouter des frais de raccordement au réseau.

Le lecteur qui voudrait compléter l'exemple de la compression mécanique de vapeur peut se référer au travail de (Hayani Mounir S. 1) ou d'une récente publication sur le sujet (Hayani Mounir S. 2).

Sinon, la référence française dans le domaine de l'évaluation économique de systèmes et procédés est l'ouvrage de A. Chauvel (Chauvel A.) ; on trouve dans cet ouvrage des données sur les réservoirs, les réacteurs, les échangeurs de chaleur, les pompes et compresseurs, ainsi que les machines d'entraînement, de même que les utilités qui vont être abordées ci-après du point de vue du fonctionnement.

#### ► Corrélation de coûts de fonctionnement

Généralement, les coûts de fonctionnement sont plus faciles à chiffrer que les coûts d'investissements, car ils correspondent à des coûts proportionnels.

#### Exemples :

- Coût en matière sur base pondérale (kg) ou volumique (m<sup>3</sup>) ;

- Coût en main-d'œuvre (coût horaire, mensuel, annuel, coût à la tâche) ;
- Coûts énergétiques (kWh, litre de carburant, tonne de charbon).

En résumé, les coûts de fonctionnement sont calculés sur une base extensive.

**Remarque :** un certain nombre d'autres coûts annexes (maintenance, transport, stock...) peuvent être évalués par une procédure de proportionnalité à une (ou des variables) de production.

On notera toutefois que si, pour les coûts énergétiques, les combustibles solides et liquides sont proportionnels aux quantités consommées, pour les énergies et fluides délivrés par un réseau (électricité, gaz, vapeur, air comprimé...), au coût du flux des énergies ou des fluides, il faut ajouter un coût de raccordement lié à sa taille (par une corrélation à établir).

De plus, la tarification en vigueur joue un rôle non négligeable et nécessite un examen approfondi. Des logiciels facilitent ce travail : le travail de D. Romary (Romary D.) est un exemple d'influence tarifaire.

La figure 9.5 illustre la tarification relative à l'énergie électrique, dont le coût dépend de la saison dans l'année, et de l'heure dans la journée. Il faut aussi ajouter la différence entre puissance souscrite (contrat) et puissance consommée.

**Remarque :** pour une meilleure adaptation de l'offre à la demande (et sûreté du réseau), une tarification spéciale existe, tarification EJP (effacement jour de pointe) pour lisser le caractère aléatoire de la demande.

Une bonne gestion des coûts de l'énergie peut conduire en fonction des tarifs à des systèmes bi (ou poly) combustibles, ou à des systèmes binergie (électricité-combustible stockable), voire à des systèmes flux-stock, ce qui est encore peu courant actuellement.

En conclusion, pour les coûts de fonctionnement et tout particulièrement des matériaux et de l'énergie (surtout les combustibles), on notera une incertitude importante dans l'évolution des prix dont la référence essentielle semble être le pétrole.

### 9.3.2 Méthode d'optimisation simple

On se contente ici des notions simples fondamentales et utiles pour la thermoéconomie, sachant que les aspects plus techniques et scientifiques seront développés au chapitre 11.

#### a) Optimisation à une variable

Toute optimisation industrielle est généralement multivariable et multicritère. Ici, le problème va être délibérément restreint à une variable et un critère.

Cette réduction du problème est possible, dans le formalisme de la fonction production  $P$  de Cobb-Douglas, en considérant deux variables indépendantes privilégiées  $X$ ,  $Y$ , satisfaisant toutes choses égales par ailleurs à :

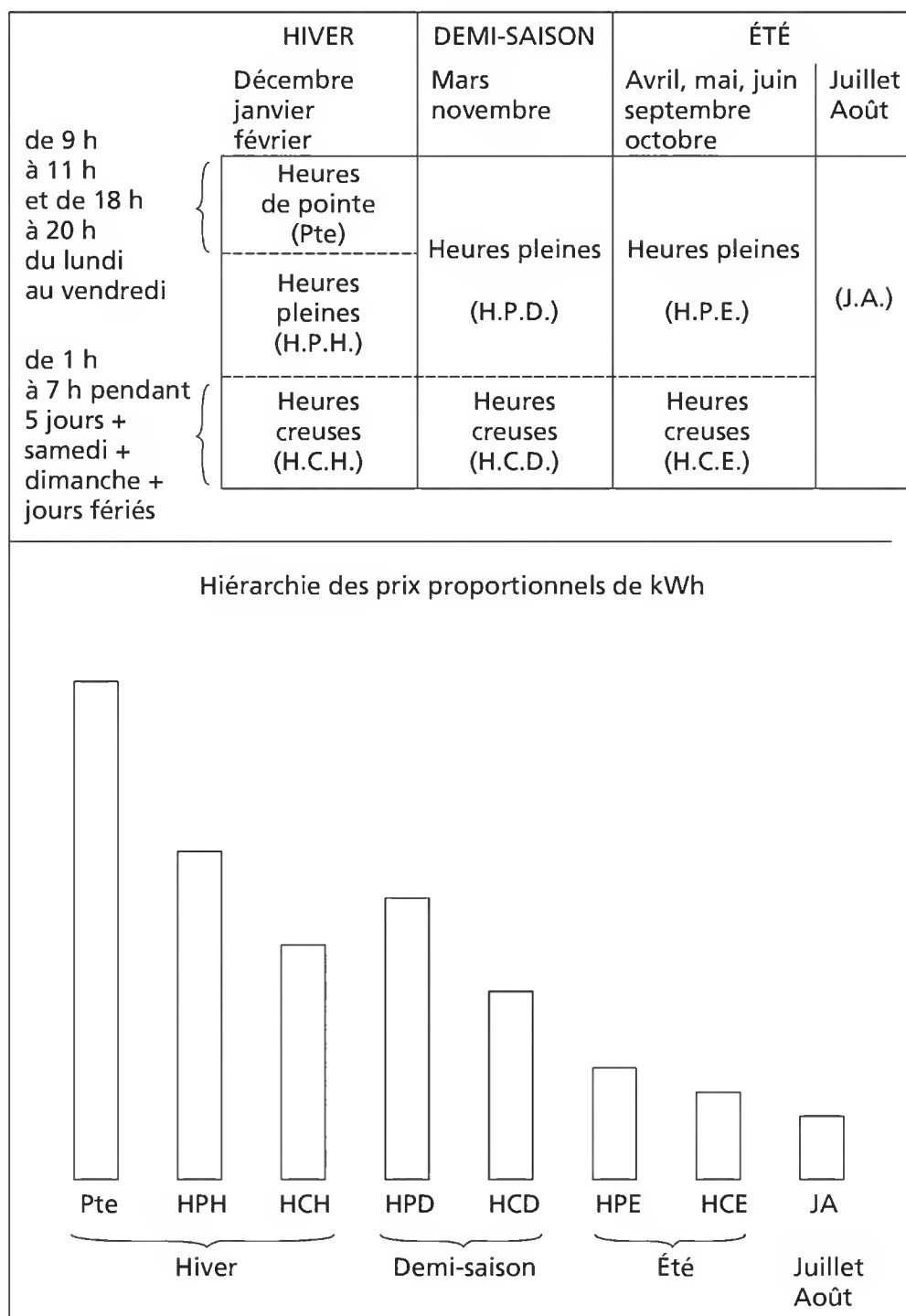


Figure 9.5 Exemple de tarification pour le kWh électrique.

$$\frac{P}{P_{ref}} = \left( \frac{X}{X_{ref}} \right)^{\alpha_x} \cdot \left( \frac{Y}{Y_{ref}} \right)^{\alpha_y} \quad (9.30)$$

À production imposée, il en résulte une relation entre les variables  $X$  et  $Y$ , dont une seule est indépendante (figure 9.6).

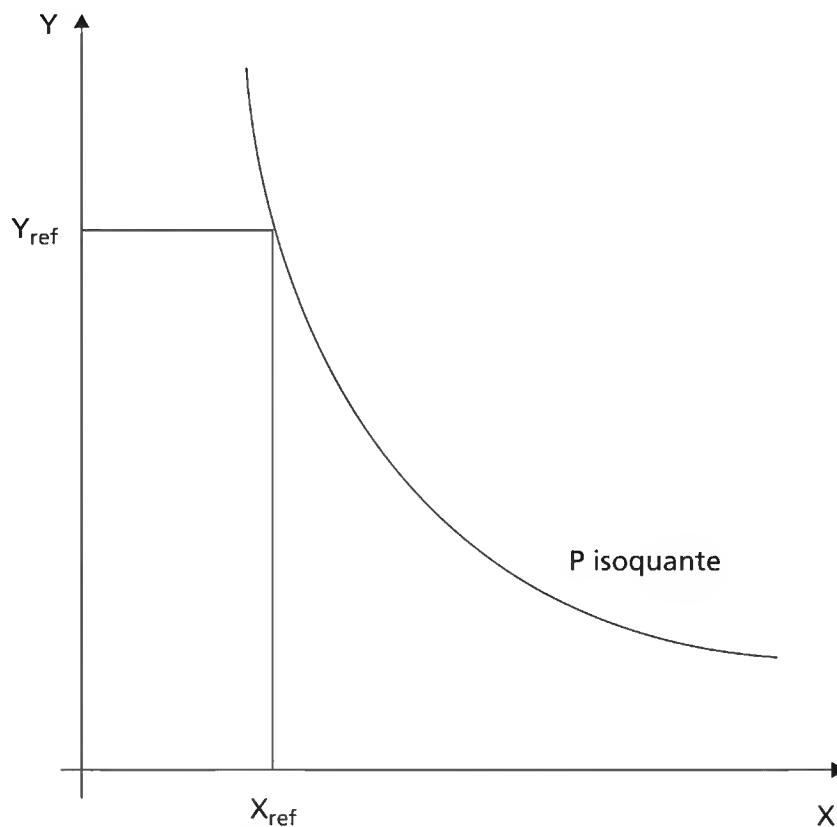


Figure 9.6 Contrainte entre les variables liées  $X$  et  $Y$  à production donnée

Il vient :

$$Y = kX^{-\alpha_x/\alpha_y} \quad (9.31)$$

$\alpha_x / \alpha_y$ , coefficient d'élasticité de substitution de  $X$  par  $Y$  ( $\alpha_x$  et  $\alpha_y > 0$ ).

**Remarque :** une courbe isoproduction est nommée isoquante par certains auteurs (Le Goff P. *et al.*).

► Optimisation du coût par rapport aux deux variables liées  $X$  et  $Y$

La relation (9.27) permet d'exprimer les coûts liés à chaque variable sous la forme :

$$C_X = v_x \cdot X^\gamma; C_Y = v_y \cdot Y^{\gamma'}$$

$v_x, v_y$ , valeurs respectives des variables  $X$  et  $Y$  du système

$\gamma, \gamma'$ , coefficients d'élasticité respective de  $X$  et  $Y$

Le coût global d'investissement en résulte sous la forme :

$$C_I = v_x X^\gamma + v_y Y^{\gamma'} + Co \quad (9.32)$$

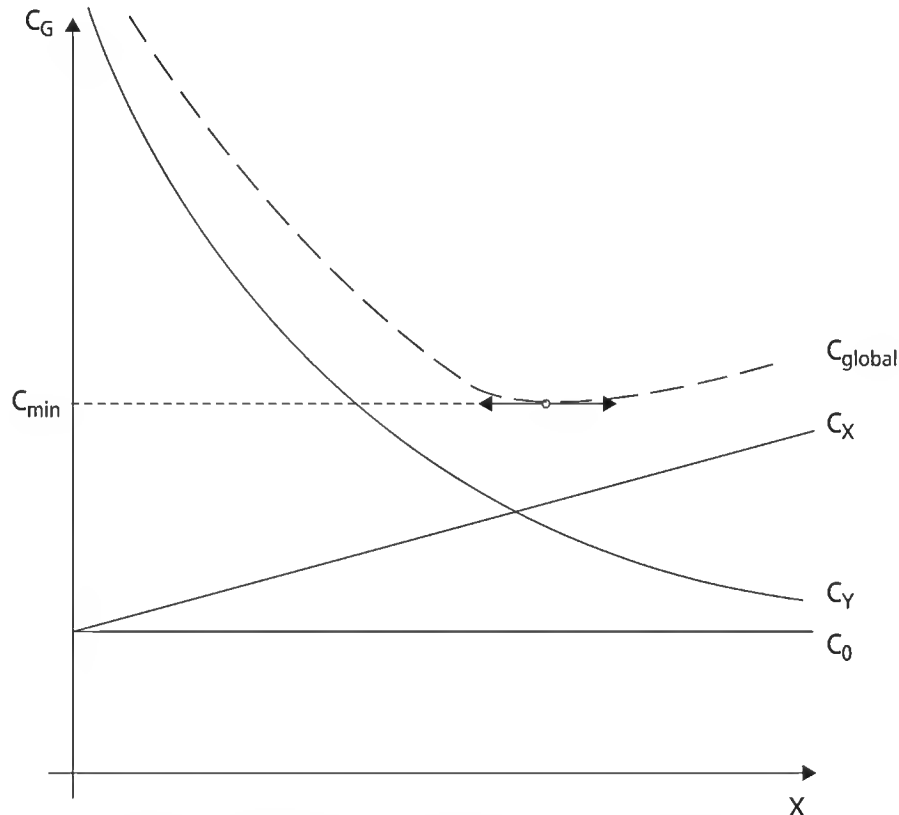
$Co$ , coût fixe lié aux autres variables maintenues constantes.

Par combinaison de (9.31) et (9.32), il vient :

$$C_I = v_x X^\gamma + v_y k X^{-\beta} + Co \quad (9.33)$$

avec :  $\beta = \frac{\alpha_x}{\alpha_y} \gamma'$ .

Le tracé de la fonction  $C_I(X)$  (figure 9.7) montre l'existence d'un minimum de coût d'investissement global qu'il est facile d'obtenir par dérivation de (9.33) par rapport à  $X$ .



**Figure 9.7** Évolution du coût global en fonction de  $X$ , variable indépendante à isoproduction

$$X_{opt} = \left( \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{kv_y}{v_x} \right)^{\frac{1}{\beta+\gamma}} ; \min C = C_0 + k_c (kv_x)^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} \cdot (v_y)^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}$$

avec :  $k_c = \left( \frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} + \left( \frac{\beta}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}$ .

**Remarque :** à l'optimum, le rapport des coûts est indépendant de  $v_x, v_y, k$ , donc des conditions économiques (théorème des coûts partiels de rapport

constant) (Le Goff P.) :  $\left( \frac{C_x}{C_y} \right)_{opt} = \frac{\beta}{\gamma}$ .

Toutefois, pour le modèle à une variable étudiée selon deux critères, le long du front de Pareto ( $X$  dans l'intervalle des deux optimums), on peut montrer

que le rapport des coûts partiels en  $X$  dépend des  $\gamma_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) et aussi des  $v_{xi}, v_{yi}$ .

### b) Exploitation optimale d'un système ou procédé

Un système ayant été réalisé, il est possible de rechercher un optimum de fonctionnement par substitution. C'est le cas de la binergie mentionnée précédemment. On va considérer deux cas de figure :

- la substitution énergie-matière première ;
- la substitution chaleur-force.

L'étude rapportée ci-après est faite en régime dynamique stationnaire.

#### ► Substitution énergie-matière première

À production fixée, on a :  $\overset{o}{M}^{\alpha m} \cdot \overset{o}{W}^{\alpha e} = cte$  qui conduit à une relation analogue à (9.31) :

$$\frac{\overset{o}{M}}{\overset{o}{M}_{ref}} = \left( \frac{\overset{o}{W}}{\overset{o}{W}_{ref}} \right)^{-\beta}$$

Avec :  $\beta = -\frac{\alpha e}{\alpha m}$ , coefficient d'élasticité de substitution matière-énergie.

Le coût de fonctionnement en matière-énergie s'exprime alors sous la forme :

$$C_F = v_m \cdot \overset{o}{M} + v_e \cdot \overset{o}{E}.$$

Il vient alors à l'optimum :

$$\overset{o}{W}_{opt} = \left( \frac{\beta \overset{o}{M}_{ref}}{\overset{o}{W}_{ref}} \cdot \frac{v_m}{v_e} \right)^{\frac{1}{1+\beta}} \quad \overset{o}{M}_{opt} = \left( \frac{\overset{o}{W}_{ref} \overset{o}{M}_{ref}^{1/\alpha}}{\beta} \cdot \frac{v_e}{v_m} \right)^{\frac{\beta}{1+\beta}}$$

**Remarque 1 :**  $\min C_F$  est très plat : si  $\beta = 1$ ,  $\frac{\Delta \overset{o}{W}}{\overset{o}{W}}$  ou  $\frac{\Delta \overset{o}{M}}{\overset{o}{M}} = 0,20$  correspond à

$$\frac{\Delta C_F}{C_F} = 0,02 ; \quad \text{si } \beta = 0,20, \quad \frac{\Delta \overset{o}{W}}{\overset{o}{W}} = 0,20 \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta \overset{o}{M}}{\overset{o}{M}} = 0,04 \quad \text{correspond à}$$

$$\frac{\Delta C_F}{C_F} = 0,004.$$

**Remarque 2 :** l'objectif scientifique et technique demeure de diminuer simultanément la consommation de matière et d'énergie.

► Substitution chaleur-force

Les applications des systèmes à deux sources d'énergie sont très courants. On citera comme exemples les industries sidérurgiques (réchauffage des lingots pour laminage et forgeage) et les industries agroalimentaires : pressage et séchage (fourrage, pâte à papier, brasserie).

Consommation d'énergie primaire  $\dot{E}_p$

$$\dot{E}_p = A_w \cdot \dot{W} + A_q \cdot \dot{Q}$$

$A_w$ ,  $A_q$ , paramètres fonctions des rendements de conversion de l'énergie primaire.

Coût de fonctionnement énergétique  $C_E$

$$C_E = B_w \cdot \dot{W} + B_q \cdot \dot{Q}$$

En posant :  $\frac{\dot{W}}{\dot{W}_{ref}} = \left( \frac{X}{X_{ref}} \right)^\alpha$ ,  $\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{ref}} = \left( \frac{X}{X_{ref}} \right)^{-\beta}$ , il vient :

$$\dot{E}_p = A_w \dot{W}_{ref} \left( \frac{X}{X_{ref}} \right)^\alpha + A_q \dot{Q}_{ref} \left( \frac{X}{X_{ref}} \right)^{-\beta}$$

avec  $X$ , variable caractéristique de l'installation.

**Remarque :** un raisonnement similaire s'applique pour le coût de fonctionnement économique.

Coordonnées des optimums énergétique, économique

On trouvera aisément pour l'optimum énergétique :

$$X_{optF} = X_{ref} \left[ \frac{\beta A_q \dot{Q}_{ref}}{\alpha A_w \dot{W}_{ref}} \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} ; \min \dot{E}_p = k \left( A_q \dot{Q}_{ref} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left( A_w \dot{W}_{ref} \right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$\text{avec } k = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Des expressions analogues valent pour l'optimum économique.

La comparaison des optimums conduit à :

$$\frac{X_{optF}}{X_{optE}} = \left( \frac{B_q}{B_w} \cdot \frac{A_w}{A_q} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

**Remarque :** d'autres propriétés des optimums pourraient être dégagés de l'étude (surconsommation, ou surcroît d'exploitation).



## c) Optimisation temporelle

L'optimisation temporelle relève de la maintenance des installations industrielles pour l'essentiel ; la maintenance peut revêtir deux aspects principaux :

- un aspect partiellement réversible qui conduit à une phase de *régénération* ;
- un aspect irréversible qui traduit l'usure de l'installation ; il conduit au *remplacement* des pièces usées.

**Exemples :**

- entartrage de canalisations et d'échangeurs de chaleur (phénomènes d'encrassement) ; la régénération se fait par une procédure de nettoyage (voir chapitre 13, partie 3) ;
- encrassement des huiles de lubrification (parfois régénérable par une procédure de filtrage ;
- usure de surfaces en frottement (cas des plaquettes de frein : remplacement, si possible préventif).

## ► Usure et remplacement

Un exemple de loi de vieillissement est la loi exponentielle ; l'efficacité initiale du composant  $\eta_o$ , au temps  $t = 0$  étant connu, l'efficacité au temps  $t$  est donnée par :

$$\eta(t) = \eta_o \exp(-t / \tau) \quad (9.34)$$

$\tau$ , paramètre représentant la constante de temps de l'usure ; on l'appelle aussi demi-durée de vie du composant.

Une approximation commode de (9.34) est l'approximation linéaire :

$$\eta(t) = \eta_o / (1 + t / \tau) \quad (9.35)$$

À flux de production donné  $\overset{o}{P}$ , le flux matière  $\overset{o}{M}$  est inversement proportionnel à l'efficacité du composant (en unité adéquat) :

$$\overset{o}{M} = \frac{\overset{o}{P}}{\eta} = \frac{\overset{o}{P}}{\eta_o} \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) \quad (9.36)$$

Par intégration de (9.36) entre l'instant initial et un instant  $t$ , on en déduit le coût de la matière, sur la durée  $t$  :

$$C_m = v_m \cdot \int_0^t \overset{o}{M} dt = \frac{v_m}{\eta_o} \left( t + \frac{t^2}{2\tau} \right) \quad (9.37)$$

**Remarque :** le premier terme de (9.37) est le coût de base (sans usure), le second terme est le surcoût dû à l'usure.

Si le coût de remplacement  $C_r$  est proportionnel à  $\overset{o}{M}$  à l'instant zéro, on a :

$$C_r = v_r \frac{\overset{o}{P}}{\eta_o} \quad (9.38)$$

$v_m, v_r$ , prix du matériau et du remplacement. L'expression du coût total de l'opération  $C_t$  pour une durée  $t$  s'écrit :

$$C_t = C_m + C_r = \left[ \frac{v_m}{\eta_o} \cdot t \quad \frac{v_m}{2\eta_o \tau} \cdot t^2 + \frac{v_r}{\eta_o} \right] \overset{o}{P} \quad (9.39)$$

On en déduit aisément la durée d'utilisation optimale de l'opération correspondant au minimum de  $C_t$  :

$$t_{opt} = \sqrt{2\tau \frac{v_r}{v_m}}$$

**Remarque :** à production imposée et à l'optimum, le modèle d'usure-remplacement conduit à un coût de remplacement égal au surcoût de matière première dû à l'usure.

Le coût total, rapporté à la quantité produite à l'instant  $t$  ( $\overset{o}{P} \cdot t$ ), s'exprime alors par :

$$C_t = \frac{1}{\eta_o} \left( v_m + \frac{v_m \cdot t}{2\tau} + \frac{v_r}{t} \right)$$

#### ► Fatigue-régénération

La régénération est une phase d'autant plus efficace que la régénération est réalisée à vieillissement faible (il est plus facile d'agir sur un faible endommagement que sur un fort endommagement).

Un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent conduit à :

$$C_t = C_m + C_r = \frac{\overset{o}{P}}{\eta_o} \left( v_m t + v_m \frac{t^2}{2\tau} + v_g + v_g' \frac{t^2}{2\tau} \right) \quad (9.40)$$

avec  $C_r$ , coût de régénération donné par :

$$C_r = v_g \frac{\overset{o}{P}}{\eta_o} + v_g' \frac{\overset{o}{P}}{\eta_o} \cdot \frac{t^2}{2\tau}$$

Le premier terme de  $C_r$  est un coût constant, le second un coût fonction (quadratique) de la durée de vieillissement. (9.40) conduit alors à la période optimale du cycle de régénération pour le coût total rapporté à la quantité produite à l'instant  $t$  :

$$t_{ropt} = \sqrt{2\tau \frac{v_g}{v_m + v_g'}}$$

**Remarque :** on retrouvera des modèles du même genre pour le nettoyage d'échangeurs de chaleur encrassés (voir chapitre 13, partie 3).

#### d) Optimisation d'investissement

L'option considérée ici vise à la recherche d'un investissement minimal pour un système, puis à la valorisation optimale de l'énergie sur la durée de vie du système.

##### ► Optimisation d'investissement d'un composant dans un système S

La relation de Cobb-Douglas permet d'exprimer le coût  $C_c$  du composant installé en fonction du flux énergétique annuel  $\overset{o}{E}$  ( $\overset{o}{E}_{ref} = 1 \text{ kWh/an}$ ) :

$$C_c = K_c v_{cref} \overset{o}{E}^c \quad 1,5 \leq K_c \leq 3$$

$v_{cref}$ , prix de référence d'un composant de puissance nominale 1 kWh/an (prix HT, départ usine, justifiant le coefficient  $K_c$ ).

Pour un système S, il existe une relation entre la dimension caractéristique  $D$ , le flux d'énergie utilisé  $\overset{o}{E}$ , et le flux de production  $\overset{o}{P}$  :  $f(D, \overset{o}{E}, \overset{o}{P}) = 0$  ; à production

imposée,  $\overset{o}{E}$  est généralement décroissant avec  $D$ , d'où :  $C_s = K_s v_{sref} \overset{o}{E}^{-s}$

$v_{sref}$ , prix d'achat unitaire ;

$C_s$ , coût d'investissement du système complémentaire au composant ;

On en déduit l'investissement total :

$$C_T = C_c + C_s + Co = K_c v_{cref} \overset{o}{E}^c + K_s v_{sref} \overset{o}{E}^{-s} + Co \quad (9.41)$$

le flux énergétique au minimum d'investissement :

$$\overset{o}{E}_{iopt} = \left[ \frac{s}{c} \cdot \frac{K_s v_{sref}}{K_c v_{cref}} \right]^{1/c+s}$$

le minimum d'investissement :

$$\min C_T = Co + k_i \left[ K_c v_{cref} \right]^{\frac{s}{c+s}} \cdot \left[ K_s v_{sref} \right]^{\frac{c}{c+s}}$$

$$\text{avec } k_i = \left( \frac{s}{c} \right)^{-\frac{s}{c+s}} \cdot \left( \frac{s}{c} \right)^{\frac{c}{c+s}}$$

**Remarque :** à l'optimum, les investissements sont dans le rapport inverse de leurs élasticités respectives :

$$\left( \frac{C_c}{C_s} \right)_{opt} = \frac{s}{c}$$

**Exemple :** compromis chauffage-isolation.

### ► Optimisation du coût global d'un système

De façon générale pour un système ou procédé, dont la variable est le flux énergétique consommé  $\overset{o}{E}$ , le coût global  $C_G$  s'écrit à partir de (9.41) sous la forme :

$$C_G = v_e \overset{o}{E} + \sum_i K_i \cdot v_i \overset{o}{E}^{-\beta_i} + C_o \quad (9.42)$$

$\overset{o}{E}_{opt}$  s'obtient par dérivation de (9.42) par rapport à  $\overset{o}{E}$  (et résolution numérique) ; l'indice  $i$  est relatif à chaque composant ; le premier terme rend compte de la consommation énergétique.

### e) Généralisation

L'optimisation économique est une optimisation multivariable, même si certaines variables, dont l'énergie, ont un rôle prépondérant comme il vient d'être vu.

L'approche économique a de surcroît montré que l'optimisation était multicritères (investissement, fonctionnement, global).

L'ingénieur se doit donc d'avoir une position prudente, les études (devant être validées) comportant certains paris sur l'avenir ; les études de sensibilité paramétrique n'en sont que plus importantes.

On retiendra avec P. Le Goff (Le Goff P.) l'existence d'un front de Pareto sur la caractéristique énergie-coût.

On voit clairement sur cette courbe un minimum de coût et un minimum de consommation énergétique. Entre ces deux valeurs se situe le front de Pareto.

Toute équivalence énergie-coût (selon diverses bases) fournit un optimum différent (3<sup>e</sup> optimum sur la courbe caractéristique).

Cette étude a été appliquée avec succès aux échangeurs de chaleur, en montrant que l'état actuel des connaissances et du savoir-faire laissait encore des marges conséquentes d'amélioration.

## 9.3.3 Quelques prolongements

L'analyse thermoéconomique précédente était une analyse au sens du premier principe énérgo-économique.

Or, on y voit immédiatement deux prolongements : le premier intégrant la valeur particulière de la chaleur, on peut développer une analyse exergo-économique ; le second tient compte des contraintes de plus en plus fortes de l'environnement : analyse environnementale ou environnementale, qui peut être couplée aussi à l'économie.

### a) Notions d'analyse exergo-économique

#### ► Existence d'un optimum exergo-économique

On sait que pour un système ou un composant, le bilan exergétique (en régime dynamique stationnaire) s'écrit :

$$\overset{o}{E}_{x_e} = \overset{o}{E}_{x_d} + \overset{o}{E}_{x_s} \quad (9.43)$$

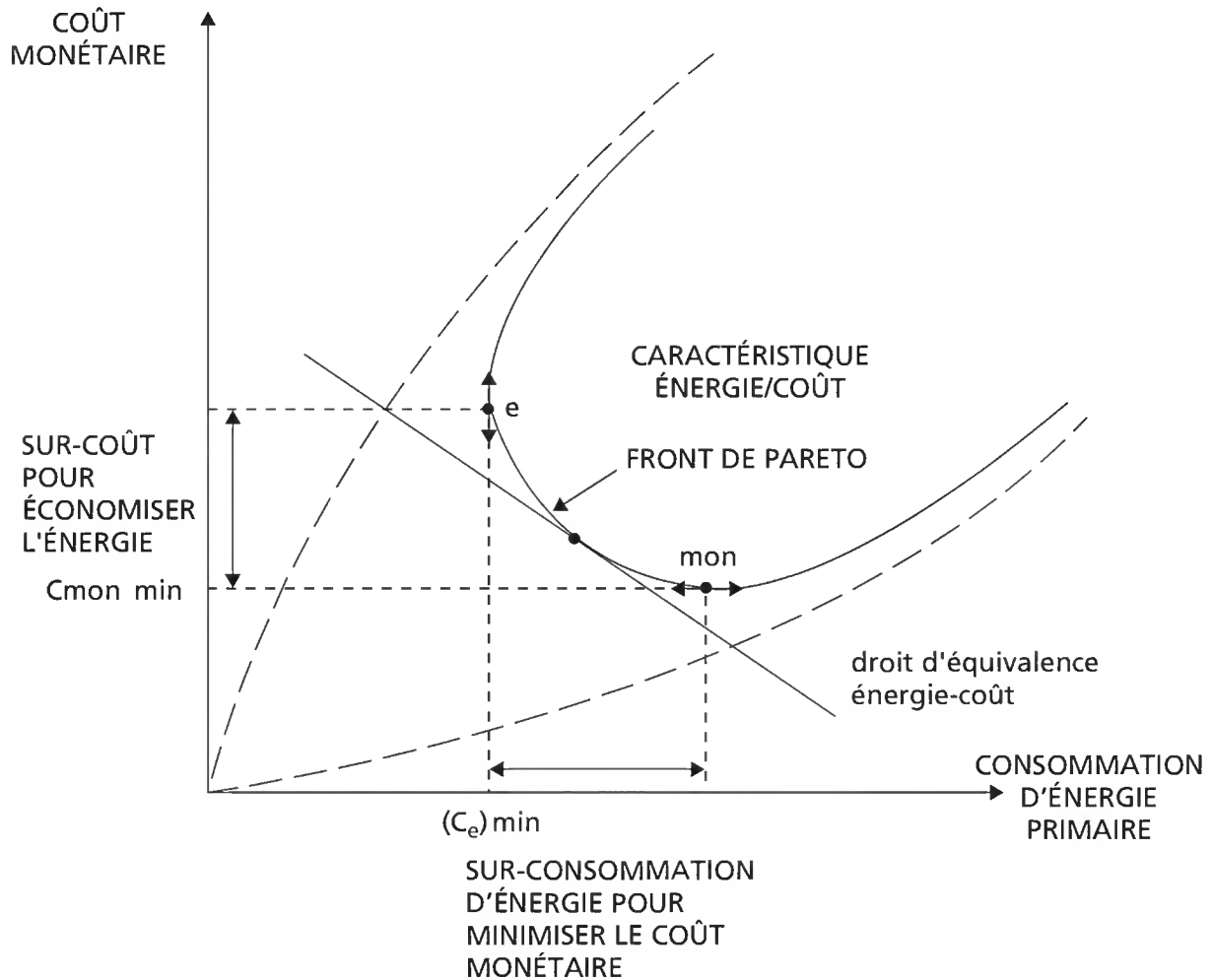


Figure 9.8 Courbe caractéristique énergie-coût

en entrée  $e$  sont les ressources consommées ou dépensées, en sortie  $s$  sont les produits ou utilités,  $\overset{o}{E}_{x_d}$  correspond au flux d'exergie dissipée ou détruite.

Le bilan exergo-économique sera équilibré si :

$$v_s \overset{o}{E}_{x_s} = v_d \overset{o}{E}_{x_d} + v_e \overset{o}{E}_{x_e} + C \quad (9.44)$$

$C$ , coût du système ou du composant (essentiellement investissement)

$v_i$ , valeur de chaque unité exergétique  $i$ .

Le coût  $C$  est une fonction décroissante de  $\zeta$ , le taux de dissipation de la transfor-

mation, avec :  $\zeta = \frac{\overset{o}{E}_{x_d}}{\overset{o}{E}_{x_s}}$ .

La représentation la plus simple du coût est donnée en fonction de deux paramètres (Benelmir R.) :

$$C = \frac{a \cdot \overset{o}{E}_{x_s}}{\zeta^b} \quad (9.45)$$

$a$ , paramètre économique ;  $b$ , paramètre énergétique.

**Remarque :** ces paramètres sont à préciser par corrélation ; il existe encore assez peu de résultats disponibles dans ce domaine.

Si on rapporte le bilan exergo-économique à  $\overset{o}{E}_{x_i}$  (flux exergétique utile ou de référence), il vient en combinant (9.45) et (9.44) :

$$v_s = v_e + v_g \cdot \zeta + \frac{a}{\zeta^b} \quad (9.46)$$

avec :  $v_g = (v_e + v_d)$ , valeur globale des ressources.

L'optimum exergo-économique en résulte en fonction de la variable  $\zeta$  :

$$\zeta_{opt} = \left( \frac{ab}{v_e + v_d} \right)^{\frac{1}{1+b}}$$

Il y correspond un minimum  $v_s$ .

#### ► Comparaison des optimums exergétique et exergo-économique

Cet exemple résulte d'une réflexion commune de l'auteur et de E. Iantovski (Iantovski E.) pour des systèmes énergétiques dont la cogénération.

On remarque que la taille de l'équipement est proportionnelle au flux des produits exergétiques, et inversement proportionnel aux pertes, soit à l'inverse de  $(1 - \eta_{ex})$ ,  $\eta_{ex}$  rendement exergétique de l'installation.

L'exergie constituant le système  $Ex_s$  est donc donnée par :

$$Ex_s = \frac{\overset{o}{E}x_s \cdot T}{C^2(1 - \eta_{ex})} \quad (9.47)$$

$C^2$ , paramètre positif ;  $T$ , durée de vie du système.

#### Optimum exergo-économique

Le bilan exergo-économique s'écrit conformément à (9.44) et en supposant  $v_d = 0$  :

$$v_s \cdot \overset{o}{E}x_s \cdot T = v_e \cdot \overset{o}{E}x_e \cdot T + v_s Ex_s \quad (9.48)$$

En combinant (9.47) et (9.48), on a :

$$v_s = v_e \left[ \frac{1}{\eta_{ex}} + \frac{v_s}{v_e} \cdot \frac{1}{C^2(1 - \eta_{ex})} \right]$$

L'optimum exergo-économique est obtenu pour :

$$\eta_{exopt} = \frac{D}{1 + D} \text{ avec } D = C \sqrt{\frac{v_e}{v_s}}$$

*Optimum exergetique*

L'optimisation exergetique nécessite la définition de la fonction à optimiser, ici le rendement exergetique total défini comme :

$$\eta_{ext} = \frac{\overset{o}{E} s_s.T}{\overset{o}{E} x_c.T + Ex_s} \quad (9.49)$$

Il y correspond une consommation exergetique spécifique par rapport à l'effet utile :

$$c_{ex} = \frac{1}{\eta_{ext}} = \frac{1}{\eta_{ex}} + \frac{1}{K} \quad (9.50)$$

avec :

$$K = \frac{\overset{o}{E} x_s.T}{Ex_s} \quad (9.51)$$

En injectant (9.47) dans (9.51), on voit que  $K = C^2(1 - \eta_{ex})$  ; d'où :

$$c_{ex} = \frac{1}{\eta_{ex}} + \frac{1}{C^2(1 - \eta_{ex})}$$

L'optimum exergetique se produit alors pour :

$$\eta'_{exopt} = \frac{C}{1 + C}$$

La conclusion est là aussi d'une multiplicité d'optimum, même si formellement la relation reste la même.

**b) Écologie – environnement**

À la considération économique précédente, s'ajoute depuis relativement peu de temps une préoccupation de préservation de l'environnement et des ressources.

La préservation des ressources a été abordée à l'occasion du paragraphe (9.3.2.b) : substitution et préservation des ressources.

La préservation de l'environnement a pris des dimensions importantes avec :

- la nécessité de la maîtrise des mises en décharge (recyclage, traitement des rebuts) ;
- la pollution des ressources en eau (présence de nitrates, phosphates : eutrophisation), voire la pollution thermique de l'eau favorisant certains développements de bactérie (légionellose) ;
- la pollution atmosphérique : ( $SO_2$ ,  $NO_x$ , puis  $CO_2$ ) ; trou de la couche d'ozone, pluies acides, modifications climatiques.

Tous ces phénomènes se traduisent dans un premier temps par des contraintes réglementaires évoluant avec la législation. Mais on voit aussi apparaître dans un second temps des approches de taxation (écotaxe) rejoignant alors les aspects économiques, qui se développera sans aucun doute de plus en plus à l'avenir.



Des tentatives de prise en compte « plus scientifiques » se font jour, dans la mouvance ACV (analyse du cycle de vie), et philosophie du développement durable ; quelques exemples seront apportés dans la troisième partie du livre.

Pour les aspects énergétiques, on se contentera ici de faire apparaître pour un système (énergétique) une surface caractéristique à trois dimensions : énergétique-économique-environnementale.

À chacune de ces dimensions peut être associée une courbe caractéristique à une dimension imposée. Il apparaît alors des minima de coûts énergétique, économique, écologique (voir figure 9.9).

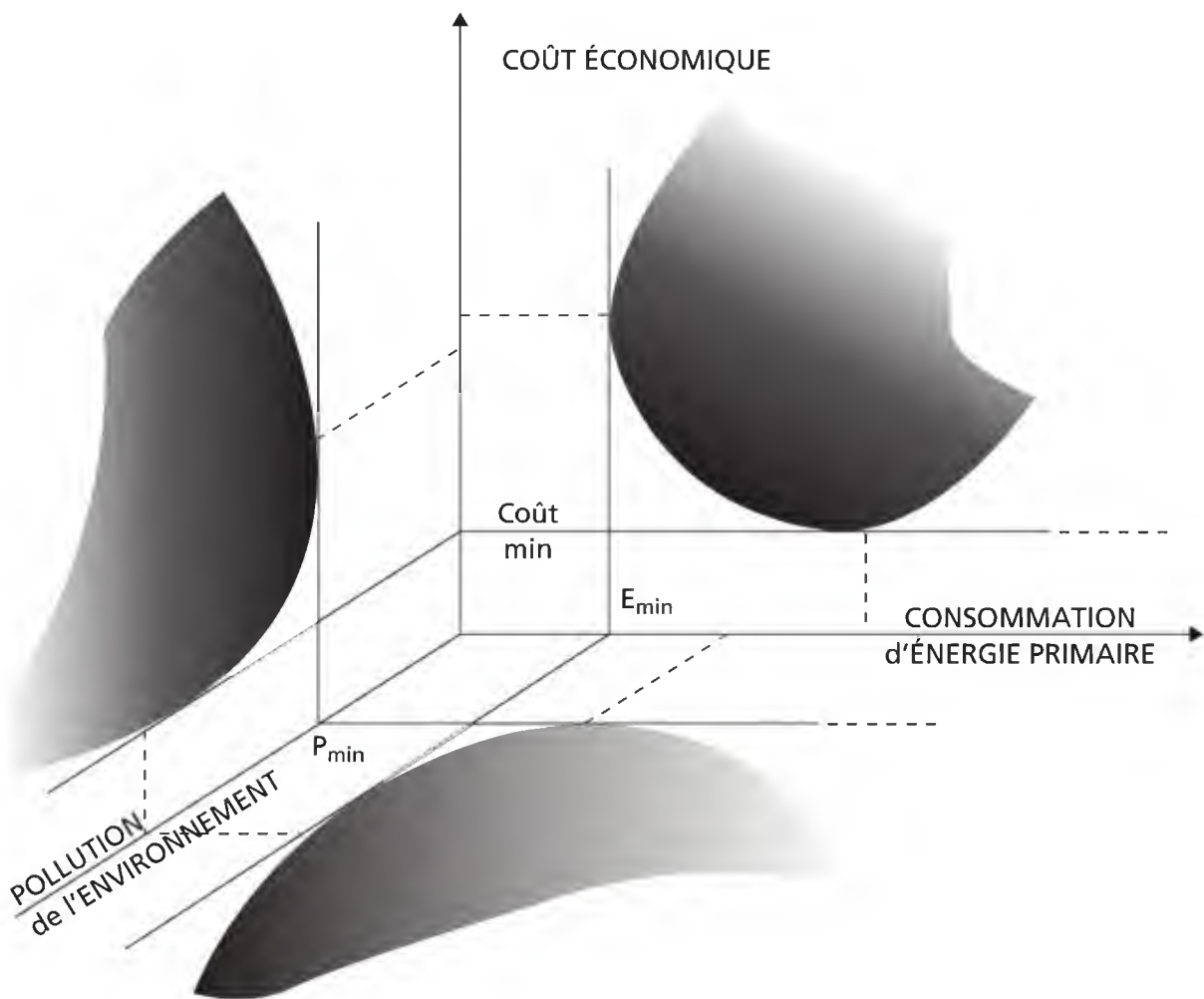


Figure 9.9 Courbes caractéristiques dans un espace à trois dimensions

On peut penser qu'il existe un optimum optimorum dans cet espace pour une fonction objectif reliant les trois coûts ; cela sera revu au chapitre 11.

**Remarque 1 :** le même genre de problématique s'applique selon l'auteur aux machines thermomécaniques, entre les trois dimensions EU (effet utile), DE (dépense énergétique), efficacité de la machine (qui peut inclure des contraintes environnementales) ; en effet, on cherche pour ces machines un



minimum de DE, un minimum de pollution P (MAX d'efficacité), MAX d'EU (minimum de dégradation d'énergie).

**Remarque 2 :** un ensemble de critères écologiques courants, mais sur base non économique est donné au paragraphe (11.2.5).

En conclusion, l'économie voit apparaître des contraintes d'environnement fortes qu'elle pourra intégrer sous une forme en devenir.

Ce chapitre a apporté les notions essentielles d'économie, pour chiffrage d'avant-projet par l'ingénieur. Elles restent assez peu enseignées en France comparativement à d'autres pays en Europe ou en Amérique (Bejan A., El Sayed Y.M.).

## 9.4 ÉTUDES DE CAS SUR L'OPTIMISATION THERMOÉCONOMIQUE

### 9.4.1. Optimisation d'investissement d'un ensemble pompe-conduite.

Une pompe doit délivrer un débit massique  $\dot{M}$  imposé de fluide à une distance connue du point de pompage. Conformément au tableau 9.2, on indique que le coût d'investissement de pompe est donné par :  $C_{IP} = k_p \dot{W}^p$ , avec  $p = 0,80$  ; le coût d'investissement du tube est supposé varié, comme le diamètre  $D$  :  $C_T = k_T D$ .

On recherche le minimum de coût d'investissement de cette installation.

La dépense d'énergie mécanique de la pompe  $\dot{W} = \dot{V} \Delta P$ .

À longueur de tube imposée, pour un fluide incompressible, la mécanique des fluides indique que :

$\Delta P \propto D^{-4}$  en écoulement laminaire

$\Delta P \propto D^{-4,8}$  en écoulement turbulent

On en déduit à utilité imposée  $\left( \dot{M} \right)$  et  $\rho = \text{cte}$  (masse volumique du fluide) :

$$\dot{W} = K D^{-4,4 \pm 0,4} \quad (9.52)$$

Les deux variables  $\dot{W}$  et  $D$  qui apparaissent dans les  $C_i$  sont liées par (9.52). On en déduit l'expression de  $C_T$  tube en fonction de la variable indépendante  $\dot{W}$  :

$$C_T = K_T \dot{W}^{-t}$$

$$\text{avec } t = \frac{1}{4,4} = 0,23.$$

Par dérivation du coût d'investissement total  $C_I = C_{IP} + C_T$ , par rapport à  $\dot{W}$ , on trouve aisément :

$$\overset{o}{W}_{opt} = \left[ \frac{t}{p} \cdot \frac{k_T}{k_p} \right]^{\frac{1}{p+t}} ; \left( \frac{C_T}{C_p} \right)_{opt} = \frac{p}{t} = 3,49$$

**Remarque :**  $D_{opt}$  est facilement calculé à partir de (9.52).

#### 9.4.2 Optimisation du coût global d'un ensemble pompe-conduite

Le problème est toujours à utilité imposée  $\left( \overset{o}{M} \right)$  ; par ailleurs, le nombre d'années de fonctionnement de l'installation  $N$  est donné, de sorte que le coût de fonctionnement sur la durée de vie de l'installation s'écrit :  $C_F = N k_F \overset{o}{W}^f$ .

On recherche le minimum de coût global  $C_G$ .

$$C_G = C_I + C_F$$

$$\text{Soit : } C_G = k_p \overset{o}{W}^p + k_T \overset{o}{W}^{-t} + N k_F \overset{o}{W}^f$$

On voit alors que l'équation à résoudre en  $\overset{o}{W}$  est non triviale (résolution numérique) (voir chapitre 11).

**Remarque :** le théorème des coûts partiels à rapport fixe ne vaut plus.

Si on suppose négligeable le coût du tube (ou imposé), la détermination de  $\overset{o}{W}_{opt}$  est de nouveau accessible analytiquement et traduit le meilleur compromis investissement de pompe, fonctionnement de l'installation.

Il vient par ailleurs :

$$\left( \frac{C_{Ip}}{C_F} \right)_{opt} = \frac{f}{p} \cong \frac{1}{0,80} = 1,25$$

**Remarque :** À  $D = \text{cte}$ , il est possible d'étudier la sensibilité à  $N$ , durée de vie de l'installation.

## BIBLIOGRAPHIE

- BEJAN A. *et al.*, *Thermal design and optimization*, John Wiley Editeur, 1996.
- BENELMIR R., *Optimisation thermo-économique des systèmes et procédés énergétiques*, Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Henri Poincaré, Nancy, novembre 1998.
- CHAUVEL A. *et al.*, *Manuel d'évaluation économique des procédés*, Editions Technip, 1976.
- EL SAYED Y.M., *The thermoeconomics of energy conversions*, Elsevier Editeur, 2003.
- GUILLET R., « Pour plus de solidarité entre le capital et le travail », ou de nouvelles chances pour l'emploi, L'Harmattan, 2004.

- HAYANI MOUNIR S., 1, *Modélisation d'une installation de concentration par évaporation avec compression mécanique de vapeur en présence de gaz incondensable*, Thèse de Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy, décembre 2002.
- HAYANI MOUNIR S. *et al.*, 2, Thermoeconomic study of a system for pollutant concentration with mechanical vapour compression, *Applied Thermal Eng.*, 2005, Vol. 25, p. 473-484.
- IANTOVSKI E., Communication personnelle de l'auteur, mai 1998.
- LE GOFF P. (1), Communication personnelle de l'auteur, juin 2002.
- LE GOFF P. (2), *Optimisation économique ou énergétique ou écologique des procédés industriels*, Conférence annuelle auprès des étudiants de DESS EMI, Université Henri Poincaré, Nancy, 2002.
- LE GOFF P. *et al.*, *Énergétique industrielle*, TEC et DOC, 1979, Tome 2, 3<sup>e</sup> partie, chapitre 3.
- LINTENBERGER D., KUMMEL R., Energy-dependent production functions and the optimization model "PRISE" of Price Induced Sectoral Evolution, *Int. J. Applied Thermodynamics*, 2002, Vol. 5, n° 3, p. 101-107.
- ROMARY D., Étude technico-économique de production et de distribution de chaleur et de force : application au tertiaire, Thèse de Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy, octobre 2001.

## Chapitre 10

---

# Modèles et simulation

### 10.1 INTRODUCTION

L'étude des systèmes et procédés énergétiques suppose une bonne connaissance préalable de la thermodynamique classique, ainsi que de la thermique et de la mécanique des fluides (voir chapitres 4, 5, 6 et 7) ; ces sciences sont de ce fait incontournables, voire associées dans de nombreux secteurs industriels à des barrières technologiques.

Pour illustrer le propos, quatre exemples sont donnés ci-après qui relèvent de domaines très variés, mais qui concernent notre vie de chaque jour : l'automobile, l'électronique, le bâtiment et le spatial.

#### 10.1.1 L'automobile

Les préoccupations d'économie d'énergie (et d'environnement) amènent actuellement à reconsidérer complètement certains concepts de base de l'automobile : mise au point de voitures peu polluantes et de faibles consommations (3 litres aux 100 km : facteur de diminution de 2 à 3).

Cette évolution influe profondément sur les bilans actuels, et impose de repenser certains concepts : bilan énergétique global du véhicule en relation avec son système de ventilation-conditionnement d'air (relation moteur, climatisation de l'habitacle, vitrages sélectifs chaud ou froid, recyclage d'air et humidité).

#### 10.1.2 L'électronique

Les appareils électroniques sont omniprésents dans notre vie courante (téléphonie, multimédia, informatique, contrôle-commande d'appareillages divers dont l'automobile). La satisfaction des besoins (fonctions) conduit à une intégration de plus en

plus grande des composants électroniques (miniaturisation des circuits) qui génère deux problèmes :

- à la fabrication (microsoudage) ;
- au fonctionnement, du fait de la dissipation d'énergie sous forme de chaleur ; d'où des contraintes de réalisation technique des circuits de refroidissement, avec nécessité par ailleurs d'évacuer la chaleur vers l'environnement (dispositifs passifs ou actifs) : la conception optimisée à cette échelle est un problème très actuel.

### 10.1.3 L'habitat

Les crises pétrolières répétées conduisent là aussi à des soucis d'économie d'énergie (chaleur et électrique) de plus en plus poussée, sans pour autant remettre en cause le confort (exigences en partie contradictoires). Il en résulte une pression constante via l'évolution des réglementations, et le problème à traiter est d'autant plus difficile qu'il fait intervenir une notion d'intermittence à l'usage et la variabilité dans le temps du climat : une maîtrise des aspects dynamiques (transitoires) s'impose alors.

### 10.1.4 Le domaine spatial

Contrairement aux trois exemples précédents qui relèvent du domaine commun, ce quatrième exemple est très particulier ; les spécificités essentielles tiennent à l'environnement spatial : vide, apesanteur, rayonnements. Les problèmes énergétiques sont alors aussi bien du domaine dynamique stationnaire (satellite en orbite), que du domaine d'un transitoire rapide (tir d'une fusée). La gestion de l'énergie et de la chaleur dans ces cas est essentielle.

### 10.1.5 Conséquence : du modèle vers l'optimisation

Lorsqu'on s'intéresse à des systèmes et procédés (énergétiques) complexes ou fonctionnant en régime varié, la modélisation devient une étape essentielle dans leur étude, ainsi que les liens nécessaires à la mise en forme informatique (et ce depuis vingt ans environ). Des systèmes complexes sont modélisés en composants (élémentaires) auxquelles les lois traditionnelles (fondamentales, analytiques) de la physique sont appliquées.

Des simulations sont possibles en prémices à une optimisation (chapitre 11) : c'est une étape indispensable, qui suit la modélisation ; cela vaut tant pour l'ingénieur que pour le physicien.

Pour étudier un système ou un procédé, l'ingénieur ou le chercheur s'appuie sur un ensemble d'outils conceptuels illustrés sur la figure 10.1.

Il apparaît sur cette figure deux approches :

- *une approche de type analytique*, basée sur l'analyse physique. Cette démarche consiste à élaborer des modèles de connaissance pour les composants ou processus élémentaires : on va du simple au complexe par assemblage. Cette méthode est facilitée par l'existence de moyens informatiques de plus en plus

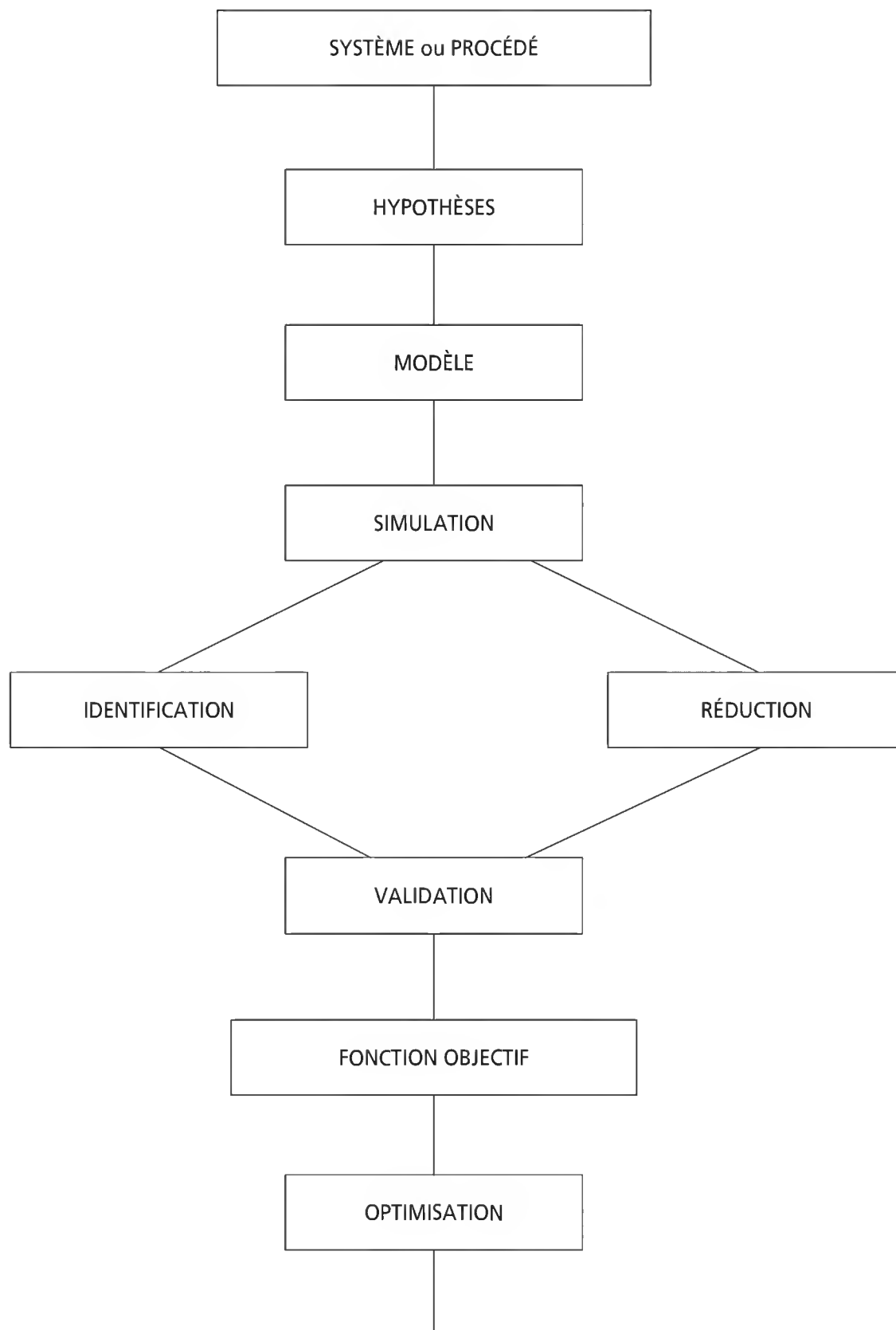


Figure 10.1 Du système réel au système évolué

puissants, mais elle est coûteuse en temps et en moyens ; elle est utilisable tant pour la conception, l'optimisation, la commande que la simulation.

- *une approche de type géométrique* (globale, phénoménologique), qui considère le comportement du système ou du procédé, par l'intermédiaire de ses interactions avec l'environnement (entrées et sorties). Ce type de modèle très compact ne fait pas ou peu apparaître la physique sous-jacente ; la démarche extrême est qualifiée de modèle « boîte noire ». Cette approche est courante en automatique, et permet la caractérisation rapide et la commande des systèmes et procédés, voire certaines simulations ; elle reste toutefois mal adaptée pour la conception et l'optimisation.

**Remarque :** entre ces deux approches existent des rapprochements et liens possibles, par exemple par réduction de modèle ; il est aussi possible pour un problème posé de combiner les deux approches.

## 10.2 MODÉLISATION

### 10.2.1 Définition

Le concept général de modèle est représenté par une entité contenant des informations sous une forme telle qu'elle peut être interprétée par un utilisateur à l'aide de règles précisément définies (exemple : modèle analytique ou analogique).

Apparaît ici la notion d'information et l'importance du mode de codage associé ; ce problème n'est pas trivial, et il illustre l'importance de la pluridisciplinarité dans l'ensemble des études réalisées, quelles qu'elles soient : la communication entre les diverses disciplines suppose alors une harmonisation et un ajustement des langages qui n'est pas encore acquis (la thermodynamique de par sa position peut participer de façon privilégiée à cet effort) (Elsayed Y.M.).

### 10.2.2 Hiérarchisation et types de modèles

#### a) Niveaux de modèle

Il ressort de l'ensemble des connaissances disponibles à ce jour une répartition générale des modèles disponibles, qui dépend surtout de l'application envisagée.

##### ► Niveau scientifique

Il s'agit là de modèles de connaissance, s'appuyant sur des lois physiques ; ces modèles sont riches en information (exemple : bilans énergétiques et massiques d'un système ou procédé).

##### ► Niveau technique

Ces modèles utilisent l'information pour deux usages : le premier est en vue de la conception d'un système ou procédé ; il sera encore un modèle de connaissance, mais dédié et ne cherchant pas l'exhaustivité. Le second est en vue du *fonctionnement* du système ou procédé. Il s'agit de contrôler et commander ; ce domaine se

satisfait généralement de modèles de représentation, conforme à l'automatique : il restitue dans un contexte (environnement) donné le fonctionnement physique, en se préoccupant peu de la signification physique des paramètres. C'est souvent le cas en régulation, maintenance (modèles « boîtes noires »).

De plus en plus, on voit apparaître *des modèles de tendances*, qui sont des modèles simplifiés (réduits) des modèles de connaissance, mais qui conservent un lien avec la signification physique des paramètres. Cela est très utile pour la maîtrise de la sûreté des systèmes (prévention des accidents), la maintenance préventive (prévention des pannes), l'optimisation paramétrique des systèmes et procédés dans le domaine de validité du modèle (hypothèses simplificatrices) : commande et fonctionnement hors régime nominal. La qualité essentielle du modèle est alors sa robustesse.

#### ➤ Niveau technologique

Le modèle sert alors à la *réalisation* pratique (matérielle) du système ou la mise en place des étapes du procédé.

#### ➤ Niveau économique

Le modèle est développé sur une base économique ; généralement les coûts sont les variables déterminantes. La fonction correspondante est une fonction de *gestion*.

**Remarque :** les considérations économiques, si elles restent marginales en première approche pour le physicien et le chercheur, sont indispensables pour l'ingénieur ; on voit alors la nécessité d'établir des liens entre les sciences physiques (la thermodynamique) et l'économie : cette démarche est courante dans les pays anglo-saxons ; elle l'est beaucoup moins en France. Ce livre tente en partie de pallier cette lacune (voir chapitre 9 et les développements qui suivront). Il apparaît alors de nouvelles équations d'état thermoéconomiques (Elsayed Y.M.).

#### ➤ Autres niveaux

Si les approches thermoéconomiques sont à ce jour assez clairement identifiées et formulées, il n'en est pas de même d'autres niveaux émergeant de façon plus récentes, mais néanmoins très importants pour l'avenir : il s'agit des aspects environnementaux d'une part (écologie) et sociaux d'autre part.

La prise en compte des impacts environnementaux de toutes les activités humaines entre maintenant dans une phase active, mais aux critères encore incertains. En revanche, les études d'impact vis-à-vis de l'humain semblent moins avancées, même si pour l'humanité on ressent la nécessité d'un *développement* (une évolution) *durable*.

#### ➤ Qu'est-ce qu'un bon modèle ?

Les divers niveaux répertoriés ci-avant montrent que l'objet du modèle doit être clairement identifié en premier lieu, à partir de quoi on recherchera un compromis entre :



- la complexité du modèle ;
- la durée des étapes de modélisation ;
- l'extension du domaine de validité (hypothèses) ;
- l'usage en simulation (optimisation).

**Exemples :** modèle de commande ou régulation : généralement modèle simple mais fiable ; modèle de conception ou de fonctionnement en régime nominal : modèle plus complet pour rendre compte de façon pertinente de l'ensemble des relations décrivant le système.

### *b) Types de modèles*

#### ➤ Modélisations de dimensionnement et de fonctionnement

Ces modélisations diffèrent par l'objectif à atteindre, mais elles relèvent toutes les deux de la modélisation fonctionnelle, qui sera principalement étudié dans cet ouvrage.

La modélisation fonctionnelle, ou modélisation système, consiste à modéliser le comportement du système dans sa globalité ; seule une analyse macroscopique (recherche d'optimum pour le fonctionnement global, étude de sensibilité paramétrique...) est réalisée aux interfaces entre les sous-systèmes (composants) constituant le système complet. Chaque sous-système (composant) est caractérisé par des grandeurs macroscopiques et un ensemble d'équations (le plus souvent) rendant compte de son comportement, sans analyse détaillée (par exemple par calcul 3D tridimensionnel) de comportement de chaque sous-système (composant).

La modélisation fonctionnelle est présente dans toutes les phases de développement d'un projet.

En avant-projet, elle est utilisée pour définir et choisir la valeur des principaux paramètres fondamentaux de fonctionnement du système.

En développement, l'analyse est la même qu'en avant-projet mais est plus détaillée : tous les paramètres fonctionnels du système sont calculés. Les limites de fonctionnement sont calculées et, à partir des résultats d'essais, les dispersions entre matériels et/ou entre essais sont analysées. Enfin, les résultats expérimentaux des sous-systèmes et du système complet sont progressivement pris en compte pour améliorer la précision des simulations (recalage par rapport aux essais) ;

En production, la modélisation fonctionnelle est utilisée pour le réglage, les prévisions et les exploitations systématiques des essais (vérification de l'absence ou recherche d'anomalie de fonctionnement liées à des pannes ou dispersions anormales).

Les exemples suivants sont relatifs au dimensionnement d'un moteur de fusée pour un régime de fonctionnement dynamique stationnaire nominal.

Dimensionnement et fonctionnement d'un composant : pour un composant donné, deux modes de calcul sont possibles en modélisation fonctionnelle :

1. Le dimensionnement détermine la géométrie de l'élément pour atteindre une performance connue.

**Exemple :** coefficient de perte de charge à  $\Delta P$  et débit massique  $\dot{m}$  imposés

$$\left( K = \frac{\rho \cdot \Delta P}{\dot{m}^2} \right).$$

2. Le fonctionnement correspond à la détermination des performances d'un élément dont la géométrie est imposée.

**Exemple :** perte de charge  $\Delta P$ , à coefficient  $K$  et débit massique connus

$$\dot{m} \left( \Delta P = K \frac{\dot{m}^2}{\rho} \right).$$

Calcul de dimensionnement pour un cycle moteur complet : dimensionner un moteur complet consiste à déterminer certaines caractéristiques géométriques et fonctionnelles de ses composants pour obtenir une performance globale prédéterminée (poussée, rapport de mélange, débit total...).

Un bouclage fonctionnel préliminaire à débits et pressions imposées permet de définir la performance attendue des composants principaux (turbopompe, chambre...). Chacun de ces composants est alors dimensionné indépendamment des autres, par une méthode qui lui est propre et qui détermine les grandeurs physiques utilisées par le modèle (solveur) comme paramètres et équations du problème à résoudre.

Calcul de fonctionnement pour un cycle moteur complet : le mode fonctionnement consiste à calculer la carte fonctionnelle du moteur (répartition des débits et pressions) et la performance globale (poussée, rapport de mélange...) à partir des caractéristiques géométriques et fonctionnelles de ses composants, par un calcul à partir du modèle du cycle thermodynamique (conservation de l'énergie, des débits, équilibre des pressions...).

En effet, la qualification d'un moteur requiert qu'il puisse fonctionner sur un domaine qui prend en compte des marges (coefficient de sécurité ou potentiel de croissance), aléas, imprécisions de réglage, et des dispersions (de fabrication de matériel, de réglage et d'interfaces).

Le point de fonctionnement pouvant se déplacer sur un domaine autour d'un point moyen, le but d'un calcul de fonctionnement est donc de déterminer la position du point de fonctionnement sur ce domaine.

Plusieurs types de calcul de fonctionnement sont possibles :

- En plus des caractéristiques géométriques et fonctionnelles fixées des composants (mode fonctionnement), on impose les paramètres de réglage (position des vannes) : le modèle calcule alors la répartition des débits et des pressions.
- En plus des caractéristiques géométriques et fonctionnelles fixées des composants (mode fonctionnement), on impose les performances globales recherchées : le modèle calcule alors la position des organes de réglage.

### *Disponibilités d'informations*

Dans les exemples traités ci-dessus, on a présupposé l'existence d'une information initiale sur les composants ; celle-ci résulte des expériences antérieures, de savoir-faire, (modèles existants, bases de données). Cependant, il ne faut pas négliger les interactions qui existent dans le système entre composants : cela est parfois plus délicat à prendre en compte, hormis la description classique des liaisons qui sera abordée.

On doit aussi profiter des informations disponibles sur le système lors de l'exploitation (information de fonctionnement), tout particulièrement lors du fonctionnement (ou test) en régime nominal, mais aussi hors nominal (essais et épreuves).

### ► Autres catégorisations de modèles

#### *Modèles statiques et dynamiques*

Les modèles statiques seront les plus utilisés ici, et en pratique. Ils permettent la simulation et l'optimisation statique qui correspondent bien aux deux options de dimensionnement et de fonctionnement en régime dynamique stationnaire de la modélisation fonctionnelle.

Les modèles dynamiques seront abordés, mais restent de traitement plus complexe, car est prise en compte la variable temps  $t$  (régime transitoire) : ils sont très importants pour la commande et dans un certain nombre de cas spécifiques, par exemple un vol de fusée.

#### *Modèles déterministes ou stochastiques*

De nombreux problèmes peuvent se traiter en utilisant les notions de probabilités et de statistiques (voir la thermodynamique statistique, ou certaines méthodes d'optimisation évoquées au chapitre 11). L'ouvrage considérera ici essentiellement l'option des modèles déterministes, les plus courants en physique classique.

#### *Modèles continus ou discrets*

La physique classique s'appuie sur l'outil mathématique des fonctions continues (et dérivables). Aussi, la modélisation de type continue sera privilégiée, au moins lors de la phase analytique (formelle) : traitement mathématique continu.

**Remarque :** certains modèles font apparaître toutefois des phénomènes discrets (flux de véhicules, dispositifs étagés).

Le traitement informatique impose à travers l'analyse numérique une discrétisation : les modèles seront alors discrets (par approximation et non par nature). Cette

phase numérique discrète sera alors utilisée : elle apparaît, par exemple, en commande numérique.

### *Modèles monovariables-multivariables*

Les modèles monovariables sont assez rares, ils n'en sont pas moins importants, comme il sera revu en optimisation (chapitre 11).

La majorité des problèmes du physicien ou de l'ingénieur sont multivariables, ce qui ajoute à leur complexité. La notion de variable est ici aussi fondamentale ; elle sera explicitée par opposition à la notion de paramètre du modèle. Par la suite, de nombreux exemples de problèmes multivariables apparaîtront et seront traités.

### *Modèles à paramètres répartis ou localisés*

Cette dénomination courante en automatique prête à confusion par rapport à la notion de paramètre du modèle introduit ci-dessus : un paramètre de modèle est une quantité ayant une certaine valeur supposée connue (par exemple  $T_o$ , température ambiante ;  $P_o$  pression atmosphérique), mais susceptible de variations dans le temps qui peuvent affecter le fonctionnement ou le dimensionnement du système (d'où l'intérêt de l'étude de sensibilité paramétrique).

Un modèle à paramètres répartis est un modèle physique dont la traduction mathématique prend la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles du temps et de l'espace.

**Exemple :** bilans énergétique et massique selon l'approche des milieux continus ; équation de la chaleur.

La forme mathématique complexe du problème induit des difficultés de traitement et des coûts de calcul souvent rédhibitoires pour la simulation des grands systèmes, ou la commande de systèmes à constantes de temps courtes (commande en temps réel).

Dans le cas des moteurs de fusée, l'état actuel des savoir-faire conduit à la réduction de dimension des modèles (modèles filaires), qui conduit à un modèle hybride (cosimulation).

Une autre façon de tourner la difficulté consiste à passer par des approximations numériques.

Un modèle à paramètres localisés est un modèle physique qui a pour correspondant mathématique un système d'équations différentielles, fonction de la variable temps ; ce type de problème correspond bien aux moyens de calcul et au savoir-faire actuellement disponible pour les grands systèmes (par exemple dans le domaine spatial, il permet d'envisager le traitement des phénomènes instationnaires ou transitoires).

De la même façon, on peut envisager l'étude du comportement en régime nominal d'un modèle unidimensionnel ou filaire.

### *Modèles non linéaires ou linéaires*

La grande majorité des modèles physiques aboutit à une formulation mathématique non linéaire. On verra que dans le cas des régimes dynamiques stationnaires, cela ne

crée pas de problèmes insurmontables : il existe des méthodes performantes tant de simulation que d'optimisation.

Toutefois, pour les très grands systèmes à contraintes de fonctionnement nombreuses (comme en pétrochimie) la réduction (restriction) aux problèmes linéaires permet une modélisation réaliste tant en termes de coût de modélisation qu'en termes de qualité (précision) des résultats obtenus ; il en est souvent de même dans le domaine de la commande des systèmes.

### *Modèles numériques ou analogiques*

Pour mémoire et de façon non exhaustive.

## 10.2.3 Les limites de la modélisation

La connaissance des caractéristiques physiques des composants d'un système permet dans certains cas (dont modèles linéarisés) de résoudre le jeu d'équations représentant l'ensemble des phénomènes régissant le comportement du système. Cependant, l'élaboration et la résolution d'un modèle de connaissance a des limites :

- limites de connaissance ;
- coût de mise en œuvre (temps et moyens, par exemple de calcul) ;
- difficultés de résolutions mathématiques et numériques : une grosse partie du travail peut relever plus de l'analyse numérique que de l'énergétique ; l'ingénieur ou le physicien doit se transformer en numéricien-informaticien. La conjecture veut que l'état actuel des méthodes numériques et informatiques doit conduire à un optimum de coût informationnel (minimum) entre la phase de modélisation et la phase de calcul ultérieure conformément au schéma de la figure 10.2 (Feidt M.).
- difficultés à accéder à des caractéristiques physiques fondamentales nécessaires et non disponibles (sauf mesures coûteuses).

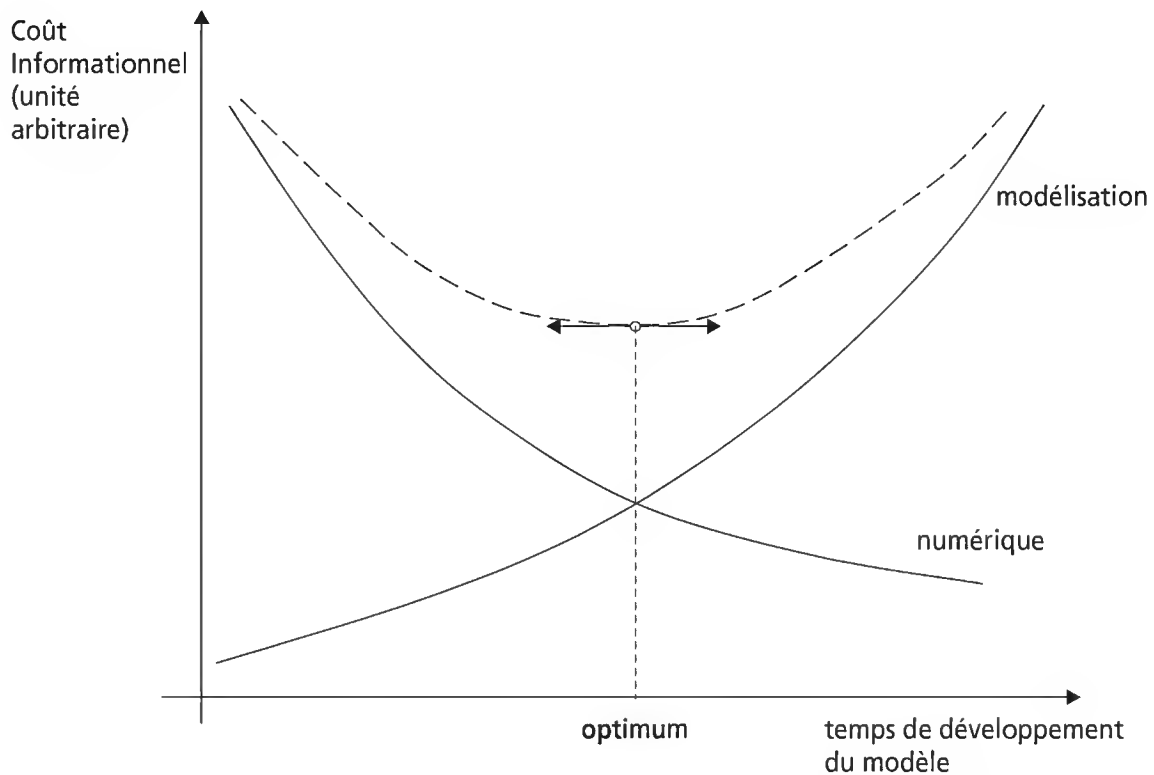
**Exemples :** caractéristiques physiques de mélanges fluides (mélanges ternaires + huile dans les machines à froid), solides (matériau semi-conducteur dopé et enrobé), de diffusion d'une espèce dans un mélange, etc.

- difficultés de traitement des informations résultant des simulations sur le comportement du système considéré : fichiers de grandes tailles (champ de température, de concentration, de vitesse...) obtenus par grand code de calcul. Ces résultats restent difficilement exploitables en temps court, en particulier pour le contrôle-commande. Il est nécessaire de disposer d'indicateurs (informations) plus synthétiques (cartographie ajustée).
- validité du modèle développé : celle-ci reste aussi à tester, sans assurance absolue.

## 10.2.4 Les étapes de la modélisation

La méthodologie de modélisation passe par quatre étapes successives :

- l'analyse morphologique et fonctionnelle du système ;
- l'analyse physique des composants et sa formalisation ;



**Figure 10.2** Existence d'un minimum de coût informationnel d'un modèle

- la construction du modèle ;
- l'analyse mathématique et numérique.

**a) L'analyse morphologique et fonctionnelle :  
méthodes de description d'un système**

Cette phase de modélisation a pour but de faire apparaître la structure interne du système et de le décomposer en un certain nombre d'éléments plus simples reliés entre eux (couplages). Les interactions du système avec l'extérieur (son environnement) doivent aussi être précisées. Plusieurs niveaux de décomposition peuvent apparaître et seront utilisés en fonction des besoins ou des objectifs. Le but essentiel de la décomposition est d'aboutir à des éléments simples pour lesquels on dispose *a priori* de connaissances en termes de modèles.

L'analyse morphologique doit aboutir à un *schéma descriptif* du système ou du procédé. La figure 10.3. donne un exemple de schéma descriptif d'une installation de cogénération.

Sur ce schéma apparaissent six composants reliés entre eux ; il apparaît une machine à froid à adsorption en tant que composant. Cette machine pourrait elle-même être envisagée comme un sous-système faisant apparaître un deuxième niveau de décomposition, puisque comme il sera vu (chapitre 15), elle comporte trois échangeurs de chaleur au minimum.

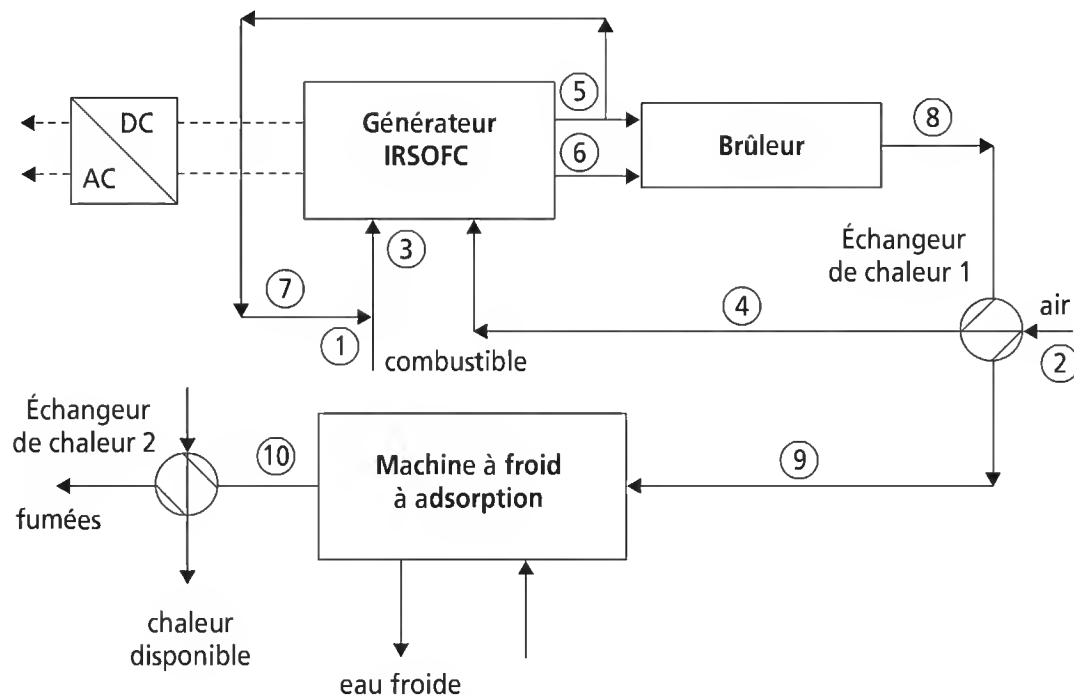


Figure 10.3 Schéma descriptif d'un système de cogénération

### b) L'analyse physique des composants et sa formalisation

La composition du système a conduit à des éléments pour lesquels on souhaite obtenir une représentation formelle, analytique, voire numérique, aussi proche que possible des phénomènes (mécanismes) mis en jeu : *a priori* des modèles existent soumis à un jeu d'hypothèses, dont on souligne l'importance.

Dans la suite de l'ouvrage, l'analyse physique conduira le plus souvent à une représentation analytique.

**Remarque 1 :** on indique l'existence d'autres méthodes de modélisation, dont par graphes de liaison (Ouldbouamama B.) ; l'introduction de cette méthode dépasse le cadre de cet ouvrage. On se contentera d'indiquer qu'il s'agit d'une méthode de représentation topologique des flux (d'énergie) entre éléments discrets du système. Cette méthode est donc proche de la thermodynamique, puisqu'elle s'intéresse à toutes formes d'énergie. Néanmoins, son usage reste surtout centrée à ce jour sur l'automatique.

**Remarque 2 :** à la modélisation des éléments, il faut rajouter la connaissance des fluides cyclés, voire des matériaux traités ou consommés.

### c) La construction du modèle

La construction du modèle est réalisée en établissant les liens des composants entre eux et avec l'environnement d'autre part : aux liens physiques, il y a lieu de substituer des liens informationnels (échange d'information) par les ports des composants. La repré-



sensation correspondante se traduit par un diagramme de liaison ; cette connectique fait l'objet de tests de cohérence du modèle (oubli de lien, connexions interdites...).

La construction du modèle aboutit à la génération du système d'équations associé avec un certain nombre de conditions, dont les conditions aux limites (frontières) et initiales classiques en physique.

### ► Variables et paramètres du modèle

Le développement des modèles fait apparaître un ensemble de grandeurs qui se répartissent entre variables et paramètres. Les considérations qui suivent s'appuient sur l'exemple simplifié d'une pompe à chaleur (figure 10.4).

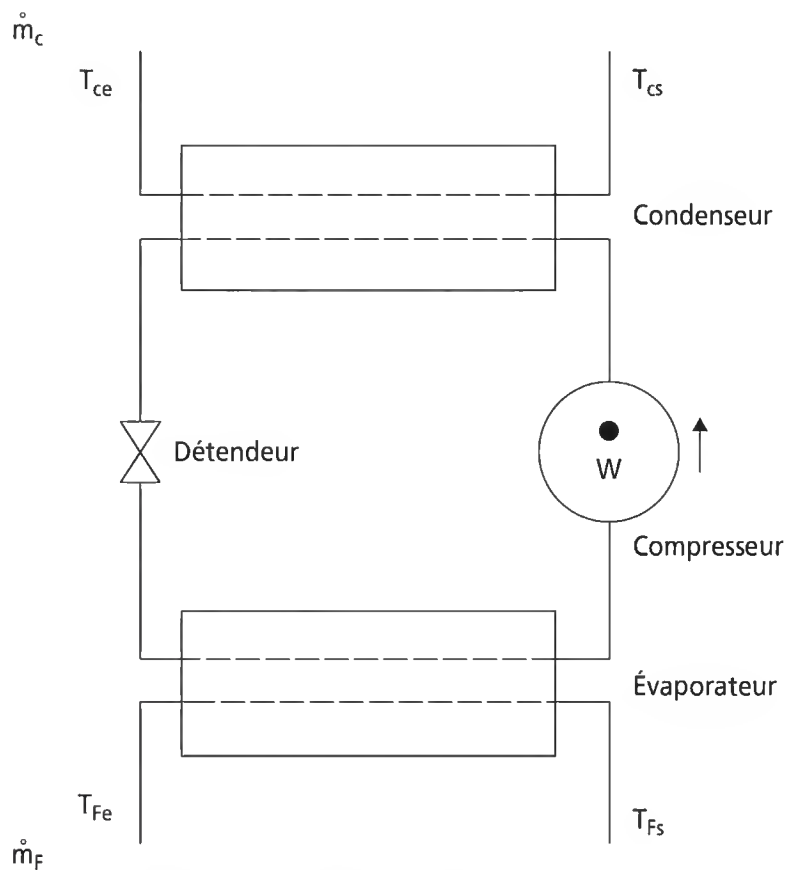


Figure 10.4 Un modèle simplifié de pompe à chaleur

Sur le schéma de la figure 10.4, il apparaît quatre composants pour la machine : deux échangeurs de chaleur, évaporateur et condenseur, un compresseur et un détendeur. Mais le module pompe à chaleur correspondant au modèle simplifié proposé ne fait apparaître que deux équations :

- l'équation de bilan énergétique de la machine (conservation de l'énergie) :

$$F_1 = \dot{m}_c C_{p_c} (T_{ce} - T_{cs}) + \dot{m}_F C_{p_F} (T_{Fe} - T_{Fs}) + \dot{w} = 0$$

- l'équation de définition du rendement de la machine au sens du premier principe :



$$F_2 = C_{op} - \frac{\dot{m}_c C_{p_c} (T_{cs} - T_{ce})}{\dot{w}} = 0$$

Il apparaît sur ces équations que le modèle ne tient pas compte de la nature du fluide intermédiaire (hypothèse physique), ni des effets des pincements, surchauffes et sous-refroidissements dans les échangeurs ; il est possible d'affiner la description (comme il sera précisé dans le chapitre 15), par utilisation du diagramme thermodynamique associé au fluide interne (figure 10.5.a).

La prise en compte des pincements peut se faire par un modèle intermédiaire (figure 10.5.b) ; le cycle correspondant fait apparaître les pincements  $x$  et  $y$ , mais il suppose négligeables les surchauffes et sous-refroidissements. Il remplace par ailleurs les fluides externes de capacités thermiques finies par des thermostats (hypothèse physique).

Dans les équations  $F_1$  et  $F_2$  du modèle figurent les grandeurs physiques du modèle ; elles peuvent faire apparaître de nouvelles hypothèses.

Dans ce cas,  $F_1$  n'est valable que si on introduit l'hypothèse d'adiabacité de la machine (pas de pertes thermiques). À cette hypothèse système, il faut ajouter des précautions sur les données thermophysiques : ici les chaleurs spécifiques massiques des fluides externes chaud et froid sont supposées constantes dans leurs intervalles de température respectifs  $[T_{ce}, T_{cs}]$ ,  $[T_{Fs}, T_{Fe}]$ .

On voit aussi sur l'exemple étudié l'existence de catégories pour les grandeurs du modèle.

Les variables d'entrée du modèle en exemple sont :

$$T_{ce}, T_{Fe}, \dot{m}_c, \dot{m}_F, \dot{w}$$

**Remarque :** les variables précédentes sont les variables d'entrée du système pompe à chaleur ; la même démarche vaut aussi pour les composants du système.

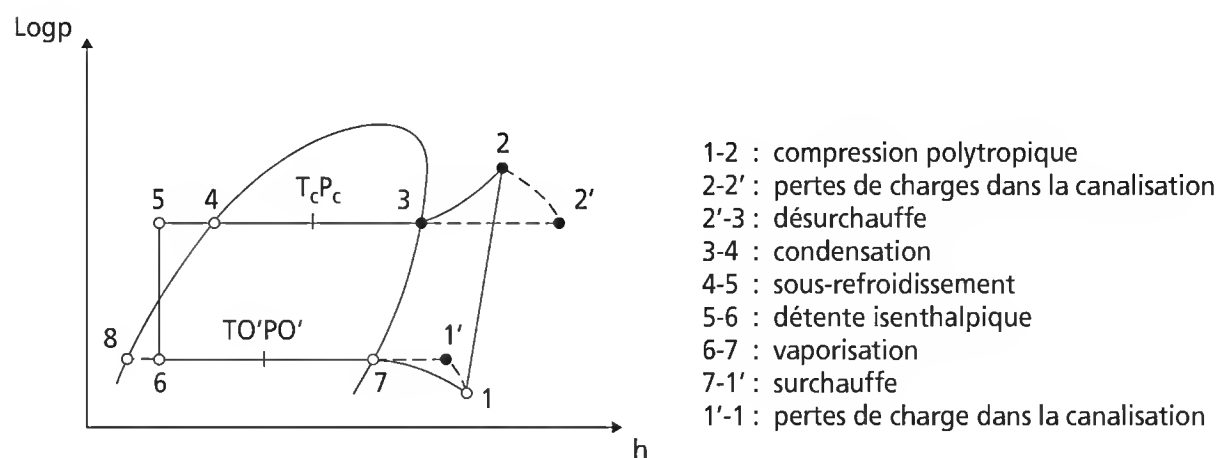
Les variables correspondantes de sortie sont  $T_{cs}, T_{Fs}$  ; souvent les fonctions objectifs du système figurent dans les grandeurs de sortie.

**Exemple :** pour un séchoir, la teneur en eau finale du produit (linge en sortie de sèche-linge) est une variable de sortie qui est un objectif pour le procédé ou la machine.

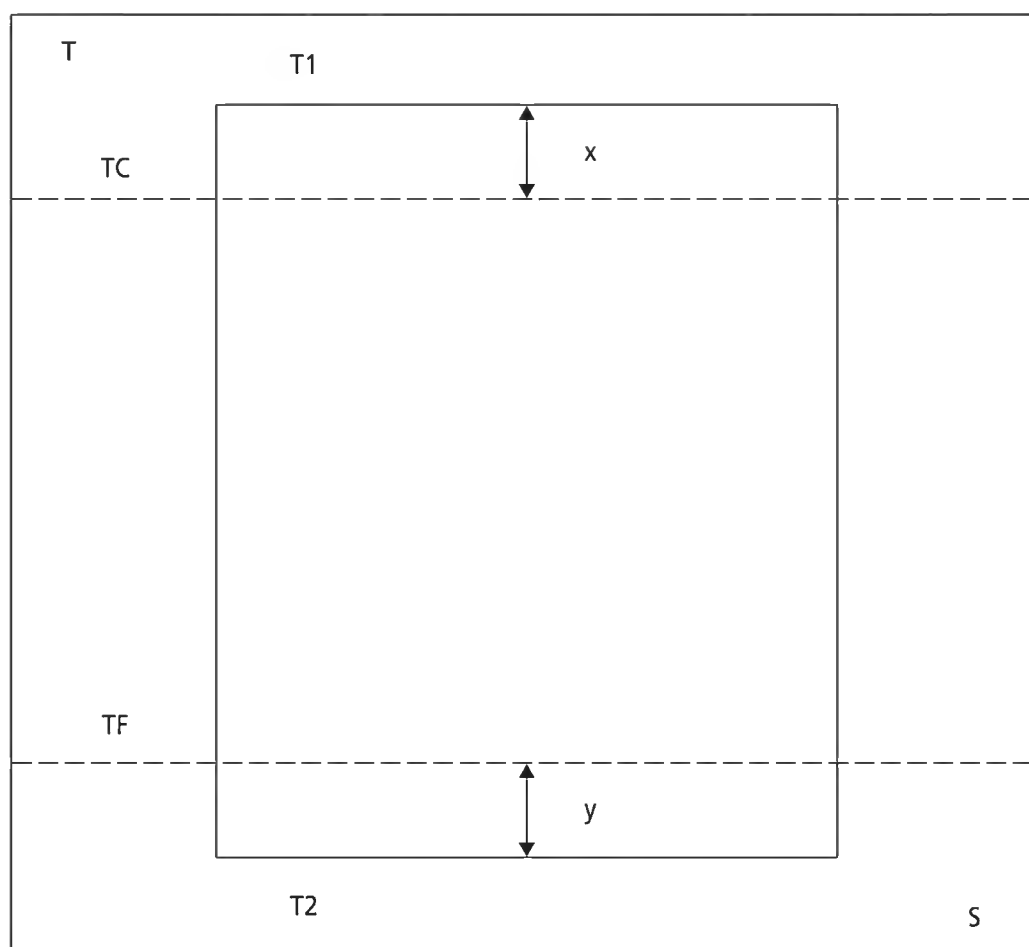
Les variables de commande sont des grandeurs influentes et accessibles pour la maîtrise de la machine ou du procédé.

**Exemple :** dans un séchoir cocourant à tapis, la température d'entrée d'air, et la vitesse d'avancement du produit à l'intérieur du séchoir permettent la maîtrise du séchage.

La pompe à chaleur de la figure 10.4 voit son fonctionnement affecté par  $\dot{w}$ , la puissance mécanique délivrée par le compresseur ; un modèle plus détaillé rempla-



**Figure 10.5 a)** Modèle de pompe à chaleur sur la base du diagramme thermodynamique de fluide interne.



**Figure 10.5 b)** Modèle endoréversible d'une pompe à chaleur en contact avec deux thermostats

cerait cette variable par la vitesse de rotation du compresseur  $N_c$  (compresseur à vitesse variable) (Haberschill Ph. *et al.*).

**Remarque :** les variables de commande sont souvent des variables d'entrée qui ont une influence significative, hormis sur la stabilité du modèle ; cela est généralement précisé par l'étude de sensibilité du modèle aux grandeurs étudiées.

Une variable d'un modèle peut être indépendante ou liée. Le cas le plus fréquent fait apparaître des variables liées ; les liaisons apparaissent du fait d'équations physiques ou sous forme de contraintes diverses (techniques, qualités...) sur les variables. Les contraintes sont de deux types : égalités ou inégalités.

Les variables intermédiaires résultent de la décomposition du modèle en modules (du système en composants). Dans la mesure du possible, le modélisateur aura intérêt à réduire le modèle sous une forme indépendante des variables intermédiaires, sauf intérêt de la connaissance de certaines de ces variables ou complexité mathématique dans l'élimination de ces variables.

**Exemple :** le modèle simplifié de pompe à chaleur (figure 10.4) fait apparaître deux fonctions  $F_1$  et  $F_2$ , dans lesquelles apparaissent le COP de la machine et  $\dot{w}$ . La relation  $F_2$  permet l'élimination de  $\dot{w}$  (variable intermédiaire dans ce cas) au profit de COP représentatif de la machine : l'élimination de  $\dot{w}$  (variable intermédiaire) entre  $F_1$  et  $F_2$  conduit à une relation  $F$  unique décrivant le système.

$$\dot{m}_c C_{p_c} (T_{ce} - T_{cs}) \left( 1 - \frac{1}{COP} \right) + \dot{m}_F C_{p_F} (T_{Fe} - T_{Fs}) = 0$$

### Paramètres du modèle

Paramètres constants : dans le modèle pompe à chaleur ci-dessus (relation F), certaines grandeurs sont constantes (à la précision physique près) :

- le COP caractéristique supposée constante de la machine ;
- les débits calorifiques des fluides externes  $\dot{m}_c C_{p_c}, \dot{m}_F C_{p_F}$ .

Paramètres fluctuants : dans les variables d'entrée de la pompe à chaleur,  $T_{Fe}$  la température d'entrée du fluide froid (source froide) est la température ambiante. Elle est de ce fait soumise aux aléas météorologiques (perturbations).

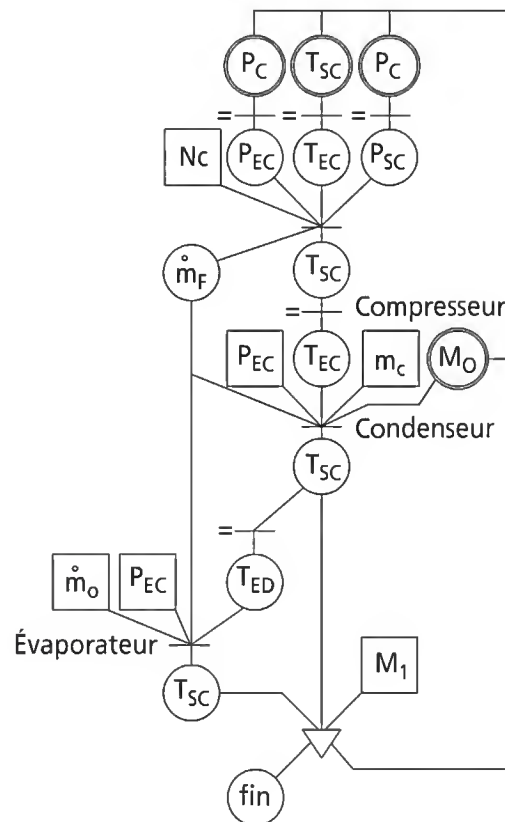
### Importance de la discrimination entre variables et paramètres

La construction du modèle en même temps qu'elle génère le système d'équations, introduit l'ensemble des grandeurs physiques correspondantes. Il est apparu deux grandes classes de grandeurs, les variables et les paramètres : le modélisateur doit être très soigneux dans ses choix sur ce point ; l'analyse de sensibilité peut être un guide précieux en cas de doute ou d'hésitation sur le choix.

La simulation de grands systèmes, contrairement aux problèmes pédagogiques simples, passe obligatoirement par l'outil informatique qui s'est vulgarisé depuis les années 1980.

Pour les grands systèmes (Ordonneau G. *et al.*) l'outil informatique peut traiter d'une partie de la formalisation (jusqu'au calcul formel), puis de la numérisation en utilisant des schémas numériques. Dans les deux cas, on utilise des solveurs.

L'automatisation de ces opérations passe par des organigrammes. La figure 10.6 montre un organigramme global d'un modèle de pompe à chaleur (Haberschill Ph.).



**Figure 10.6** Organigramme global de calcul associé à un modèle de pompe à chaleur

Sur cette figure on remarquera que les variables sont entourées d'un cercle (un **cercle** pour les variables à initialiser), alors que les paramètres du modèle (dont certains sont des variables d'entrée) sont entourés d'un carré.

➤ Bases de données

Toute étude suppose la saisie et le stockage de données : constantes physiques, propriétés de fluides et de matériaux (voir chapitre 6). On ne connaît pas toujours ces

propriétés sous forme analytique ; elles peuvent aussi être disponibles sous forme de tableaux et fichiers susceptibles de traitement mathématiques (interpolation, lissage).

### ► Bibliothèque de composants

#### *Composants de type module*

Cette bibliothèque comporte les éléments « prêt à l'emploi » qui sont rencontrés dans les systèmes et procédés et préexistent ; pour l'énergétique, il s'agit de :

- compresseur, turbine ;
- vanne ;
- turbine à vapeur ;
- chaudière ;
- échangeurs de chaleur, dont évaporateur, condenseur ;
- séparateur, mélangeur ;
- machine à froid, pompe à chaleur ;
- réacteur.

La plupart de ces composants des grands systèmes seront eux-mêmes modélisés dans la troisième partie de l'ouvrage en illustration des méthodes proposées. Les équations fonctionnelles plus ou moins complexes traduiront l'adaptation du choix du modèle au résultat attendu (voir l'exemple de la pompe à chaleur).

**Remarque :** aux modèles « standards » disponibles peuvent répondre des modèles spécifiques pour un besoin particulier de recherche ou de métier ; à ces modèles sont associées les équations de fonctionnement.

#### *Composants de type contrôle-commande*

Ces composants portent des appellations variables selon les utilisateurs. Ils permettent de satisfaire des consignes (débit, pression, température, etc.) ; dans le cas d'une commande, le paramètre piloté peut suivre à une certaine précision près, une valeur fonction du temps.

Ces composants peuvent aussi sous une version différente traduire des conditions aux limites (relations avec l'extérieur).

#### *Autres composants*

Pour la bonne marche de la simulation, d'autres composants de type outils informatiques sont adjoints : solveur, fichier données, fichier résultats. Ces composants apparaissent surtout lors de la phase finale d'informatisation du modèle.

#### **e) Mise en forme informatique du modèle**

L'ensemble des étapes précédentes peut être facilité par l'usage ou la mise en place d'outils informatiques spécifiques. De nombreux logiciels existent tant commerciaux que gratuits qui permettent, à travers les modèles générés, de réaliser des expériences numériques.

### ► L'interface homme-machine (IHM)

Cette interface permet de réaliser en interactif l'ensemble des étapes précédentes : réalisation du synoptique de l'installation permettant l'assemblage des composants et la gestion des ports entre eux (connectique et équations de liaison, par opposition aux équations de fonctionnement).

**Exemple :** dans le cas d'une installation de cogénération, avec chaudière récupératrice à un niveau de pression, le schéma de l'installation est donné sur la figure 10.7.a ; la figure 10.7.b est une représentation dans le diagramme enthalpique (T, h) des caractéristiques de l'eau et des fumées.

Ce diagramme est obtenu sous forme informatique via l'IHM (figure 10.8) (Cenusa V.).

Il apparaît sur cet écran la nécessité de renseigner le programme sur les fluides, les données, l'initialisation ; les options sous-jacentes sont des méthodes de représentation et de stockage des données et des informations.

### *Méthode de représentation et de stockage de données et d'informations*

Le tableau 10.1 montre, dans le cas de la pompe à chaleur PAC modélisée précédemment, que ce composant de système est représenté par un fichier, comportant un identifiant de la PAC dans le système, puis un numéro de la grandeur à valoriser (soit variable, soit paramètre) : dans ce cas de figure simple, il apparaît dix grandeurs. On notera la précision des unités utilisées dans le programme : cette indication est très importante. Il peut être nécessaire d'ajouter des informations sur les entrées-sorties du composant (informations utiles pour la connectique).

**TABLEAU 10.1** Tableau des grandeurs du modèle de PAC.

YAC i	
1	COP
2	Débit fluide condenseur (kg/s)
3	Débit fluide évaporateur (kg/s)
4	Température entrée condenseur (K)
5	Température sortie condenseur (K)
6	Température entrée évaporateur (K)
7	Température sortie évaporateur (K)
8	Travail du compresseur (kW)
9	CP du fluide au condenseur (EXT) (kJ/kg.K)
10	CP du fluide au condenseur (EXT) (kJ/kg.K)

YAC : numéro de la PAC

i : numéro du paramètre

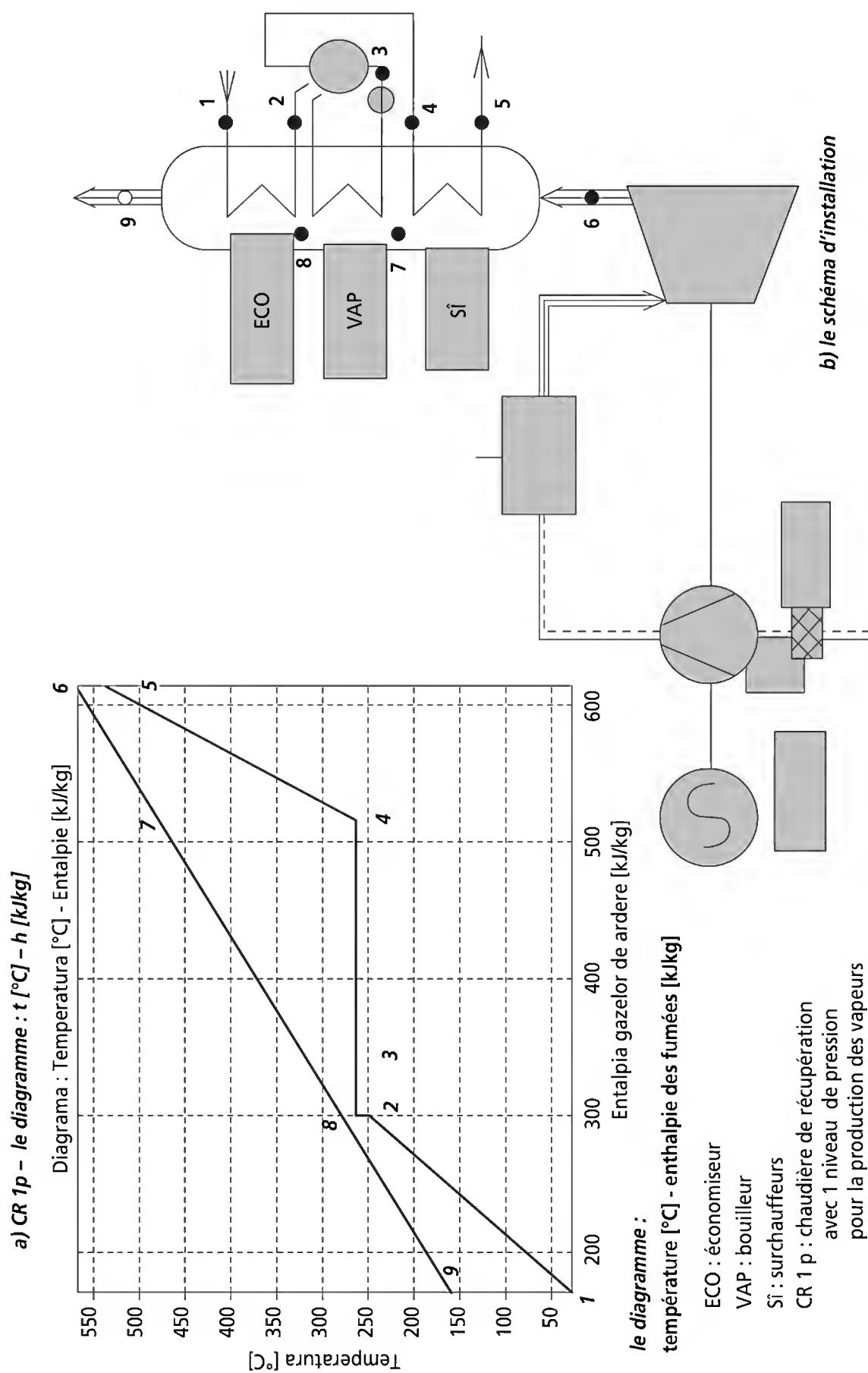
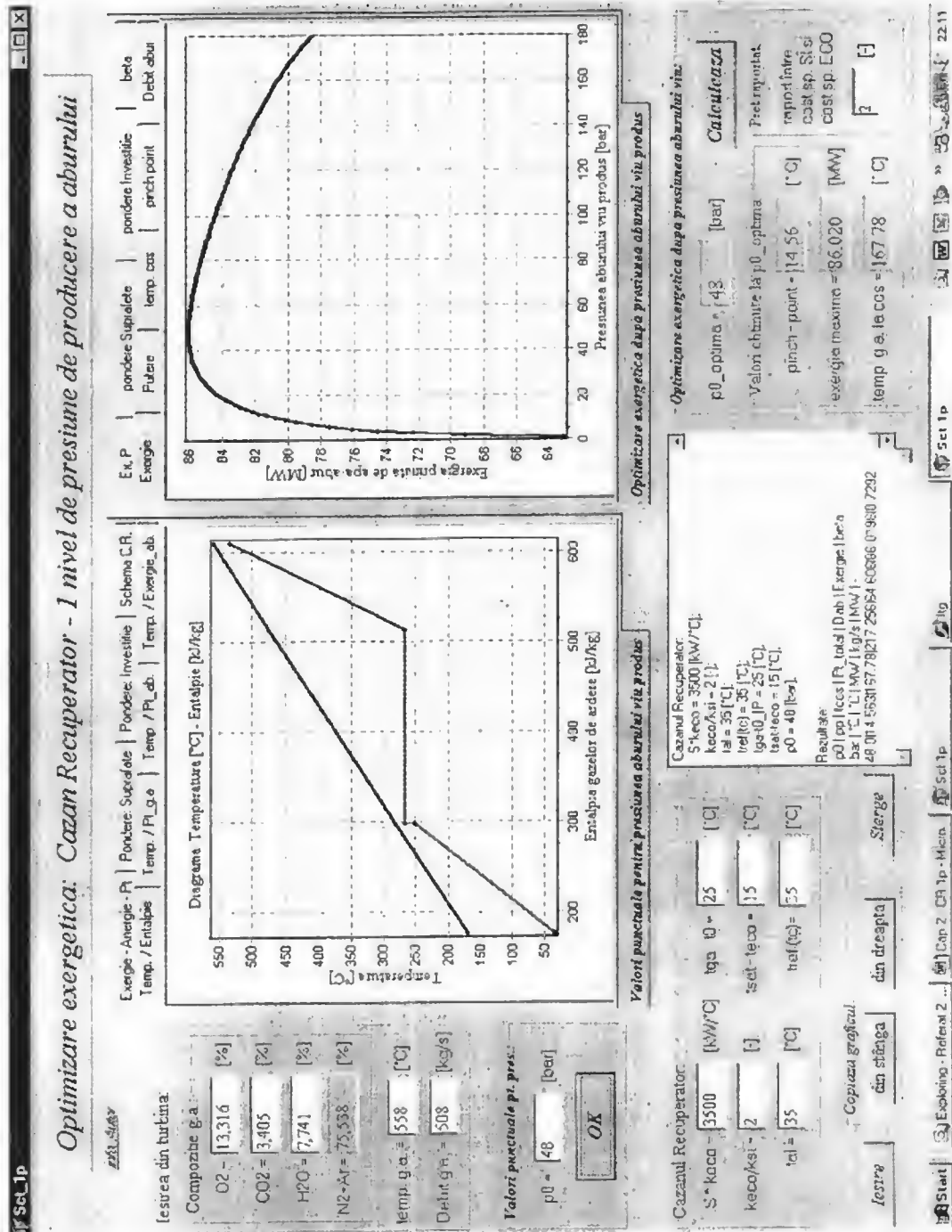


Figure 10.7 Installation de cogénération à chaudière récupératrice à un niveau de pression



# CR 1p – L'interface du programme de calcul



**Figure 10.8** Copie d'écran relative au modèle de l'installation de cogénération en roumain



*Tests de configuration et de valorisation du modèle*

Ces tests s'assurent de la cohérence du synoptique proposé et de la valorisation de l'ensemble des paramètres.

➤ **Le générateur automatique de modèle (GAM)**

Cette étape peut être réalisée en partie formellement ; la génération automatique du système d'équations précise alors les variables du problème et vérifie le bon dimensionnement du problème.

Après quoi, on peut passer à la phase calcul numérique.

Le modèle étant cohérent, un choix de méthodes numériques est effectué. L'adoption d'un solveur (par exemple de type Newton-Raphson) passe par trois états successifs :

- l'initialisation : un vecteur initial des inconnues est à valoriser (si possible au voisinage de la solution cherchée ; un écart maximum de 30 % est préconisé) ;
- matrice d'influence : calcul du Jacobien du système d'équations par rapport aux variables ;
- calcul itératif jusqu'à convergence selon un critère à préciser.

➤ **Visualisation-exploitation des résultats**

La visualisation des résultats peut se formater de deux façons :

- soit sous forme d'un fichier aux formats variés et exportables ; ces fichiers sont commodes pour le traitement de nombreuses informations ;
- soit sous forme graphique ; là encore, les formats sont variés. Les formes graphiques permettent souvent une approche plus synthétique des résultats.

Quels que soient les traitements faits, il ne faudra pas oublier les opérations de sauvegarde et de stockage si cela est nécessaire et utile.

➤ **Validations**

L'ensemble modèle et programme de calcul étant opérationnel pour réaliser des expériences numériques, il y a lieu de s'assurer de la pertinence de l'ensemble modèle-calcul-résultats.

Pour cela, en plus des tests précédents, doivent être mis en place des tests de contrôle et de validation des solutions obtenues ; ces tests revêtent deux formes essentielles :

- tests purement numériques à l'aide de fonctions choisies, pour s'assurer de la pertinence des algorithmes numériques mis en œuvre ;
- tests de validation physique : ceux-ci s'appuient généralement sur des situations limites simplifiées du problème physique posé : par exemple un régime dynamique stationnaire connu est une limite d'un régime transitoire.

Il est aussi possible de s'appuyer sur l'état de l'art existant pour la validation physique des modèles ; généralement, d'assez nombreux résultats obtenus en laboratoire sont disponibles, de même que des résultats sur systèmes industriels, même si cela reste insuffisant et à compléter. La figure 10.9 illustre cette étape de valida-

tion, qui est indispensable dans toute étude, d'autant qu'elle n'apporte jamais une assurance absolue.

### CR 1 p – La validation du modèle et du programme de calcul

Données fournies par le fabricant pour le régime de référence de la turbine GT10C :

- condition : ISO
- $P_b = 29\,100$  [kW]
- $q_{sp} = 10\,000$  [kJ/kWh]
- $D_{famees} = 91,1$  [kg/s]
- $t_6 = 518$  [°C]

Données calculées du programme ITG : composition molaire de fumées

$O_2 = 13,8263$  [%]    $CO_2 = 3,1734$  [%]    $H_2O = 7,2805$  [%]    $Ar + N_2 = 75,7198$  [%]

Figure 10.9 Validation de modèle et programme.

## 10.2.5 Un exemple de modélisation

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment modéliser simplement une pompe à chaleur. Il est apparu que cette machine comportait deux échangeurs de chaleur, un condenseur et un évaporateur. Ces deux échangeurs sont des composants du système, dont la description mérite d'être améliorée et approfondie.

Le plus souvent, les échangeurs sont utilisés sans changement de phase, contrairement à ceux de l'exemple pompe à chaleur (on reviendra sur ces échangeurs au chapitre 13).

On se contente ici de développer le modèle dynamique stationnaire générique global (OD ou phénoménologique) des échangeurs sans changement de phase.

### a) Schématisation et formulation du modèle générique

Il apparaît sur la figure 10.10 les deux modes de fonctionnement généraux d'un échangeur : fonctionnement à cocourant (figure 10.10.a), fonctionnement à contre-courant (figure 10.10.b).

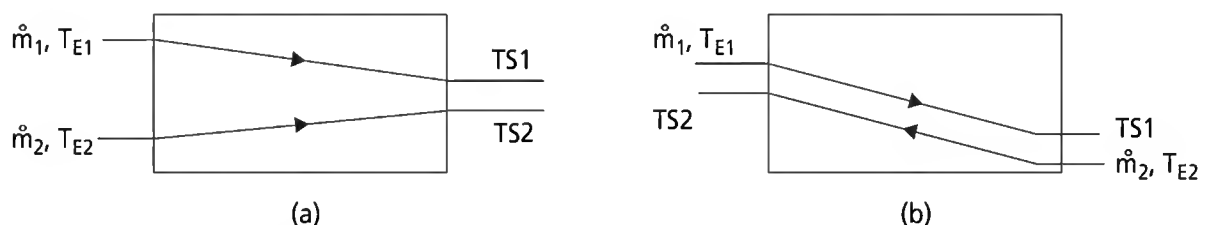


Figure 10.10 Modèle générique d'échangeur de chaleur sans changement de phase.

Un échangeur de chaleur comporte deux fluides, un fluide chaud noté  $c$  et un fluide froid noté  $f$ . Chaque fluide est caractérisé par son débit massique  $\dot{m}_i$  ; sa température d'entrée  $T_{ie}$ , sa pression en entrée  $P_{ie}$ , puis en sortie  $P_{is}$  : cet ensemble constitue les variables d'entrée du fonctionnement de l'échangeur.

Les variables de sortie correspondantes (inconnues) sont les températures de sortie  $T_{is}$ .

Les paramètres du modèle de fonctionnement sont des caractéristiques de l'appareil auxquelles on a accès par sa géométrie ( $A$ , surface totale de transfert de chaleur), par la connaissance des transferts de chaleur ( $k$ , coefficient surfacique global de transfert de chaleur). On peut accéder à cette dernière grandeur par la connaissance physique (utilisation des connaissances développées en thermique) ou par identification expérimentale.

Il en résulte le système des deux équations ci-après (méthode dite de la différence de température logarithmique moyenne) :

$$\dot{m}_c [h_c(T_{cs}, P_{cs}) - h_c(T_{ce}, P_{ce})] + \dot{m}_f [h_f(T_{fs}, P_{fs}) - h_f(T_{fe}, P_{fe})] = 0$$

$$\dot{m}_c [h_c(T_{cs}, P_{cs}) - h_c(T_{ce}, P_{ce})] = kA \cdot \Delta T_{\ln}$$

$h_i(T, P)$ , enthalpie numérique du fluide  $i$ , dans les conditions  $(T, P)$

$\Delta T_{\ln}$ , différence de température logarithmique moyenne.

Cette différence de température prend deux formes selon la configuration de l'échangeur :

$$\text{configuration co-courant : } \Delta T_{\ln} = \frac{(T_{ce} - T_{fe}) - (T_{cs} - T_{fs})}{\ln \left( \frac{T_{ce} - T_{fs}}{T_{cs} - T_{fe}} \right)}$$

$$\text{configuration contre-courant : } \Delta T_{\ln} = \frac{(T_{ce} - T_{fs}) - (T_{cs} - T_{fe})}{\ln \left( \frac{T_{ce} - T_{fs}}{T_{cs} - T_{fe}} \right)}$$

**Remarque 1 :** il apparaît nécessaire sur ce modèle de connaître les propriétés physiques des fluides : connaissance des  $h_i(T, P)$ .

**Remarque 2 :** la présentation du modèle a passé sous silence un certain nombre d'hypothèses et de conventions (choix) associés au développement. Parmi celles-ci, on note : l'adiabaticité de l'échangeur, la constance du coefficient surfacique global de transfert de chaleur sur toute la surface d'échange  $A$ , le choix d'une surface de référence  $A$ , à laquelle se réfère le coefficient  $k$ , le choix d'un sens de parcours pour l'échangeur (sens de parcours du fluide chaud par exemple).

**Remarque 3 :** à la modélisation générique précédente en chaleur sensible, peut être adjoint un modèle générique d'échangeur à changement de phase (chaleur latente) ; cela sera fait dans la suite du livre.

**Remarque 4 :** le modèle générique précédent peut être décliné sous forme de modèles particuliers ; on pense ici aux échangeurs liquide-liquide, aux échangeurs liquide-gaz (ou vapeur), aux échangeurs gaz-gaz. Cela sera développé par la suite.

### b) Représentation informatisée des données d'échangeur monophasique

Le tableau 10.2 représente le fichier associé à un échangeur qui se présente sous la forme d'une matrice à treize colonnes et deux lignes (pour 25 données de base).

TABLEAU 10.2 FICHIER DE DONNÉES RELATIVES À UN ÉCHANGEUR MONOPHASIQUE.

YEC i j	1	2	3	4	5	6	7
Fluide 1	Nature du fluide	Débit kg/s	Température entrée °C	Pression entrée bar	Enthalpie entrée kJ/kg	Température sortie °C	Pression sortie bar
Fluide 2	Nature du fluide	Débit kg/s	Température entrée °C	Pression entrée bar	Enthalpie entrée kJ/kg	Température sortie °C	Pression sortie bar

YEC i j	8	9	10	11	12	13
Fluide 1	Enthalpie sortie kJ/kg	Caractéristiques de l'échangeur Surface totale d'échange m <sup>2</sup>	Numéro entrée fluide	Numéro sortie fluide	CP	Circulation méthodique ou antiméthodique
Fluide 2	Enthalpie sortie kJ/kg	Coefficient d'échange global kW/m <sup>2</sup> .°C	Numéro entrée fluide	Numéro sortie fluide	CP	

On notera qu'un échangeur est un élément d'un modèle de système qui comporte ici trois indices : ECH ( $k, i, j$ ).

L'indice  $k$  est le numéro d'échangeur dans le système (identifiant), par exemple évaporateur 1, condenseur 2 dans la pompe à chaleur.

Les indices  $i$  et  $j$  correspondent respectivement aux caractéristiques de fluide chaud (froid), puis aux propriétés associées à ces fluides (ligne). On remarquera que les données des colonnes 9 et 13 sont des caractéristiques spécifiques de l'échangeur et non des fluides.

### c) Un modèle phénoménologique transitoire d'échangeur

Par opposition aux modèles de connaissance exposés ci-dessus et moyennant des hypothèses adéquates qui ne seront pas exposées ici par souci de concision (Jacquot C.), on peut utiliser un modèle semi-empirique pour représenter le comportement instationnaire d'un échangeur de chaleur soumis à des sollicitations de type échelon (échelon de température, échelon de débit).

Les réponses à ce type de perturbation en entrée d'échangeur se traduisent par des températures de sortie (variables intensives) variant avec le temps sous la forme :

$$T_{cs}(t) = \begin{cases} T_{cs}^o & \text{si } t < t_o \\ T_{cs}^\infty + (T_{ci} - T_{cs}^\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) + (T_{cs}^o - T_{ci}) \exp\left(-\frac{t}{\tau_c}\right) & \text{si } t > t_o \end{cases}$$

$$T_{fs}(t) = \begin{cases} T_{fs}^o & \text{si } t < t_o \\ T_{fs}^\infty + (T_{fi}^o - T_{fs}^\infty) \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) & \text{si } t > t_o \end{cases}$$

$t_o$  est l'instant de la perturbation sur le fluide chaud de la pompe à chaleur

$T_{cs}^o, T_{cs}^\infty$ , la température de sortie du fluide chaud à l'instant initial puis à l'équilibre final

$T_{ci}$  température intermédiaire du modèle (paramètre à identifier)

$\tau_L, \tau_c$  constante de temps aux temps longs, aux temps courts

$T_{fs}^o, T_{fs}^\infty$ , la température de sortie du fluide froid à l'instant initial puis à l'instant final

$\tau_f$ , constante de temps (unique du fluide froid).

La figure 10.11 montre de façon comparative l'évolution des résultats expérimentaux (enregistrements) par rapport aux courbes résultant du modèle proposé ; on note un bon accord, qui montre tout l'intérêt de la réduction de modèle d'une part (paragraphe 10.2.6), mais aussi et surtout de l'identification (paragraphe 10.2.7).

### d) Conclusion sur la modélisation

Un modèle ne constitue qu'une approximation plus ou moins développée de la réalité ; le but du modèle est de guider l'ingénieur et le physicien dans ses travaux. Un modèle ne saurait remplacer la réalité. Aussi, selon les utilisations prévues, on développera divers types de modèles (gradation du simple au complexe). Mais il faudra toujours s'appuyer sur l'expérience existante ou à réaliser de façon à assurer une validation aussi complète que possible du modèle proposé.

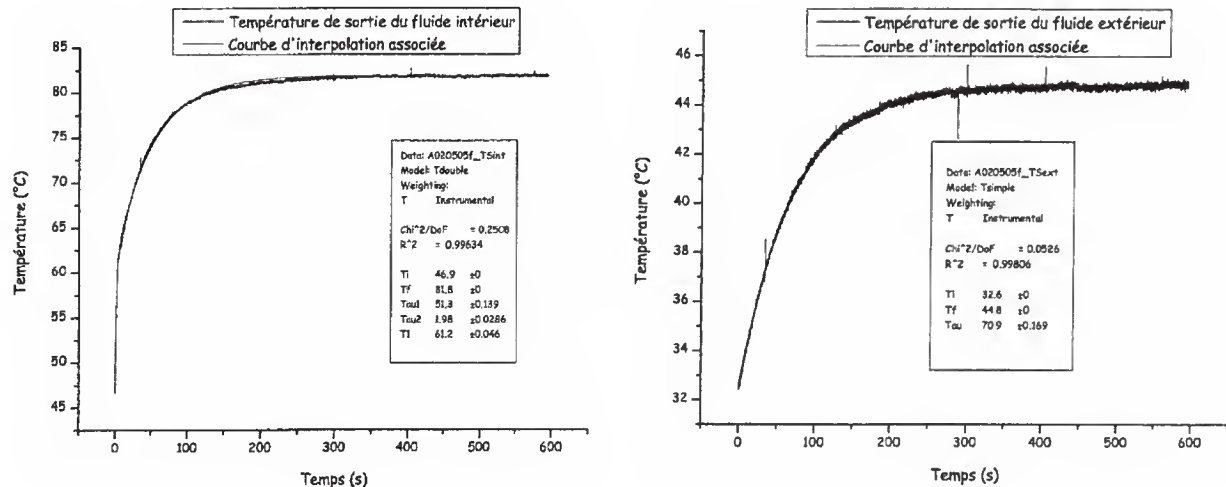


Figure 10.11 Évolution transitoire des températures de sortie d'un échangeur.

## 10.2.6 Réduction de modèle

### a) Les objectifs et les outils de la modélisation

On a vu qu'entre les modèles simples de contrôle-commande et les modèles de connaissance, il existait une place pour les modèles intermédiaires qui restent bien adaptés à la simulation et à l'optimisation de processus.

Le contrôle-commande fait de plus en plus appel à des modèles élaborés ; la contrainte principale qui apparaît est une contrainte en temps par rapport au contrôle ou à la commande.

Pour les grands systèmes, en revanche, c'est la complexité du modèle à traiter qui l'emporte. À ce jour, la limite est plutôt dans les moyens de calcul à mettre en place ; ainsi, dans le domaine spatial, il n'est pas envisageable actuellement de mettre en œuvre des modèles tridimensionnels instationnaires. La limite actuelle se situe dans le domaine des modèles filaires (1D) instationnaires.

D'où l'intérêt de la réduction de modèle. Celle-ci revêt deux formes principales :

- à partir d'expériences du modèle ;
- à partir de l'analyse dimensionnelle.

### b) Sensibilité du modèle à une grandeur

Le modèle mis en place, l'expérience numérique montre au modélisateur comment le modèle réagit suite à une modification de la grandeur. On observe ainsi une sensibilité plus ou moins grande à cette grandeur.

Cela permet, en l'absence de connaissance *a priori*, de classer les grandeurs en variable influente ou en paramètre du modèle, dont la valeur sera figée.

**Remarque :** une consigne même si elle influe de façon sensible, appartient de fait aux paramètres du système.

### c) Dimensionnement du modèle

L'analyse dimensionnelle fait partie des outils de modélisation qui permettent de réduire la taille des modèles ; l'étude des unités physiques des variables permet leur regroupement en nombres adimensionnels ; on réduit de ce fait le nombre de variables apparaissant dans l'étude par des regroupements aussi judicieux que possible.

Le théorème  $\pi$  de Vaschy-Buckingham (Comolet R.) illustre bien cette démarche. Il conduit en transfert de chaleur à des nombres qui seront introduits par la suite ; citons  $Nu$ ,  $Re$ ,  $Pr$  en convection forcée.

Nous utiliserons cette démarche dans la suite de l'ouvrage, en particulier pour les machines thermomécaniques ; dans les modèles de ces machines apparaît toujours une température de référence (généralement l'ambiante,  $T_o$ ). Pour une machine de dimensionnement donné, la géométrie conduit à une conductance de transfert totale

$K_T$ , qui est référence ; le flux d'énergie de référence en résulte :  $\dot{Q}_o = K_T \cdot T_o$ .

**Remarque 1 :**  $K_T$  a la dimension du flux entropique, dans le même cas dynamique stationnaire. De ce fait, l'adimensionnement général selon les deux principes fondamentaux de la thermodynamique est satisfait.

**Remarque 2 :** si au lieu d'un modèle de fonctionnement on considère un modèle de dimensionnement, alors soit l'effet utile ( $\dot{W}_o$  pour un moteur), soit la dépense énergétique est donnée ( $\dot{Q}_o$  pour un moteur) ; dans ce cas ces flux énergétiques deviennent références.

## 10.2.7 Identification des paramètres

### a) Les méthodes d'identification

Malgré le savoir-faire du modélisateur, il apparaît que la modélisation ne peut pas être parfaite par rapport au réel : la validation permet de juger du degré de perfection des calculs effectués et de la précision physique sur les données disponibles et collectées (incertitudes des résultats des mesures).

De plus, la connaissance physique des données n'est pas toujours (et même rarement) complète. Le défaut d'information, tout particulièrement pour les paramètres du modèle est un degré de liberté, en même tant qu'une contrainte nécessaire au développement du modèle qui impose la détermination des paramètres inconnus.

#### ► Les méthodes directes

Elles ne seront pas envisagées ici (Feidt M.). Ces méthodes basées sur l'analyse transitoire sont très communes en automatique (méthodes Strejc...) ; la réponse impulsionnelle est un transitoire courant.



### ► Les méthodes indirectes

Ces méthodes sont des méthodes paramétriques. Il en existe plusieurs variantes, dont la plus connue est la méthode des moindres carrés. Ces méthodes sont généralement plus efficaces que les premières citées.

Le synoptique général de ces méthodes est représenté sur la figure 10.12.

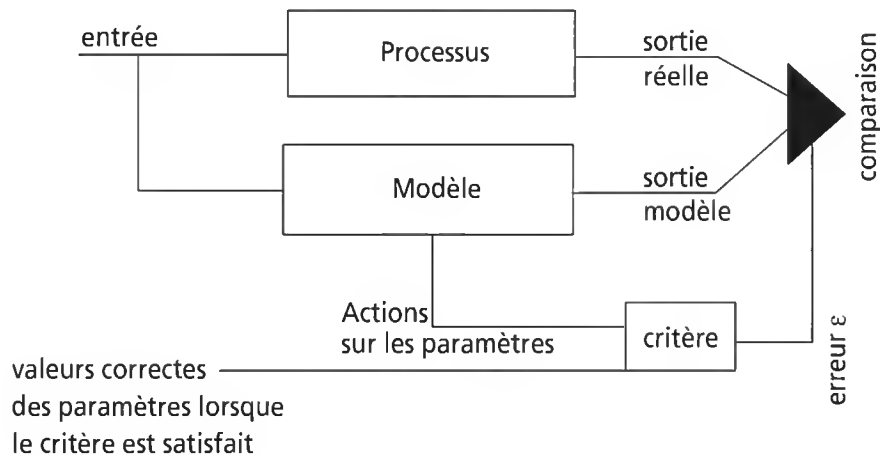


Figure 10.12 Synoptique général de méthode indirecte.

La comparaison des réponses réelles et du modèle pour une même entrée (éventuellement commande), montre l'existence d'un vecteur d'erreur  $\vec{e}$ , fonction des sorties et des paramètres  $P$ .

Le choix d'un critère, un certain « écart » entre le système (objet réel) et le modèle simulé, fournit la valeur optimale du vecteur paramètre  $\vec{P}$ , qui minimise le critère.

Le critère le plus courant est le critère des moindres carrés (éventuellement pondérés).

**Remarque :** les paramètres  $P$  sont dans ce cas les variables du problème d'optimisation, selon le critère choisi.

### b) La méthode des moindres carrés

#### ► Principe de la méthode

Cette méthode considère les erreurs du modèle par rapport à l'observation sur l'objet.

Soient :

$X$ , la valeur réelle d'une grandeur mesurée sur l'objet ;

$X_i$ , la valeur d'une expérience sur le modèle ;

$x_i$ , l'erreur du modèle par rapport à l'objet  $= X_i - X$  ;

$\bar{X}$ , la valeur la plus probable de  $X$ .



Si on suppose l'indépendance des erreurs sous l'effet des paramètres du modèle, la distribution de celles-ci satisfait aux principes de la statistique des grands nombres avec une densité de probabilité pour une erreur :

$$P(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$  est un paramètre de précision de la distribution gaussienne.

Aussi, la probabilité pour que  $x$  soit compris entre  $x_i$  et  $x_i + dx_i$  vaut :

$$P(x_i)dx_i = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_i^2} . dx_i$$

Pour  $n$  erreurs suite à  $n$  expériences, il vient :

$$\prod_{i=1}^n P(x_i) dx_i = \left( \frac{h}{\sqrt{\pi}} \right)^n e^{-h^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \prod_{i=1}^n dx_i$$

On voit aussi que :

$$\text{MAX} \left[ \prod_i P(x_i) \right] \Leftrightarrow \min \left[ \sum_i x_i^2 \right]$$

La valeur la plus probable  $\bar{X}$  minimise l'erreur du modèle par rapport à l'objet, il y correspond un jeu de valeur des paramètres qui n'est pas forcément unique.

$$\text{Remarque : } \bar{X} = \frac{\sum_i x_i}{n}$$

#### ► Ajustement paramétrique d'une fonction

C'est une illustration directe et très utile de la méthode des moindres carrés. Son application est courante pour l'étude des systèmes, mais aussi dans la recherche d'ajustement pour des données thermophysiques, comme il a été vu au chapitre 6. Cette méthode est aussi appelée méthode de Poincaré.

On recherche une fonction  $z$  de la variable  $X$ , à partir d'une série de  $n$  points  $(X_i, z_i)$ .

Dans le cas général, on suppose la fonction de la forme :

$$z = f(X, A, B, C, \dots)$$

$m$ , nombre de constantes (paramètres) dont dépend la fonction  $m \leq n$

Si on suppose les constantes connues à l'optimum, on sait que  $A, B, C, \dots$  sont telles que  $\sum y_i^2$  est minimum, avec  $y_i$  erreur à l'optimum (meilleure estimation).

$$y_i = z_i - z'_i$$

$$z'_i = f(X_i, A, B, C, \dots)$$

Sinon, le calcul est conduit à partir d'une estimation des constantes  $(A_o, B_o, C_o, \dots)$  ; ces valeurs initiales sont améliorées de façon à rejoindre l'optimum :

$$A = A_o + \alpha \quad B = B_o + \beta \quad C = C_o + \gamma \quad \dots$$

avec :

$$z'_i = z_i - y_i = \left[ f(X, A_o, B_o, C_o, \dots) + \alpha \frac{\partial f}{\partial A_o} + \beta \frac{\partial f}{\partial B_o} + \dots \right]_{X=X_i} \quad (10.1)$$

En posant :

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial A_o} \right]_{X=X_i} = \lambda_i \quad \left( \frac{\partial f}{\partial B_o} \right)_{X=X_i} = \mu_i \quad \left[ \frac{\partial f}{\partial C_o} \right]_{X=X_i} = \tau_i, \dots$$

et :

$$z_i - f(X_i, A_o, B_o, C_o, \dots) = \varphi_i$$

la relation (10.1) devient :

$$\lambda_i \alpha + \mu_i \beta + \tau_i \gamma + \dots y_i - \varphi_i = 0$$

L'explicitation de  $\sum_i y_i^2$  conduit à la condition nécessaire de minimisation sous la forme du système de  $m$  équations suivant :

$$\begin{cases} \sum_i \lambda_i (\lambda_i \alpha + \mu_i \beta + \tau_i \gamma + \dots - \varphi_i) = 0 \\ \sum_i \mu_i (\lambda_i \alpha + \mu_i \beta + \tau_i \gamma + \dots - \varphi_i) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Il en résulte les valeurs :

$$\{\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \dots\}$$

et donc :

$$\{A, B, C, \dots\}$$

### c) Exemples d'ajustements courants

Tous les ajustements ci-après sont donnés pour  $n$  couples de coordonnées  $(X_i, z_i)$  : ajustements monovariés, en fonction de deux paramètres d'ajustement identifiés  $a$  et  $b$ .

#### ➤ Ajustement linéaire

$$z = aX + b$$

$$a = \frac{\sum_i X_i \cdot z_i - \frac{1}{n} \sum_i X_i \cdot \sum_i z_i}{\sum_i X_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_i X_i \right)^2}$$

$$b = \frac{1}{n} \sum_i z_i - \frac{a}{n} \sum_i X_i$$

► Ajustement à une fonction puissance

Cet ajustement est déduit de l'ajustement précédent en remarquant que :

$$z = aX^b \Leftrightarrow \ln z = b \ln X + \ln a$$

► Ajustement à une fonction exponentielle

Cet ajustement est déduit de l'ajustement linéaire en remarquant que :

$$z = ae^{bx} \Leftrightarrow \ln z = \ln a + bX$$

$a$ , paramètre positif.

► Ajustement à une fonction logarithmique

La fonction ajustée étant  $z = a + b \ln X$ , l'analogie avec l'ajustement linéaire conduit à :

$$b = \frac{\sum_i z_i \cdot \ln X_i - \frac{1}{n} \sum_i \ln X_i \cdot \sum_i z_i}{\sum_i (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_i \ln X_i \right)^2}$$

$$a = \frac{1}{n} \left[ \sum_i z_i - b \sum_i \ln X_i \right]$$

**Remarque :** beaucoup d'autres ajustements existent ; on citera l'ajustement par fonction « spline » qui permet de rendre compte d'une fonction passant par  $n$  points et dont les  $n$  dérivées premières sont continues.

d) Conclusion sur l'identification

Les méthodes d'identification sont très utiles, tant dans l'identification de paramètres physiques que de fonctions.

Pour le premier cas, on rappellera la méthode de Wilson, qui permet de rechercher de façon graphonumérique des coefficients de transfert de chaleur (voire de masse) ; cette méthode possède de nombreuses variantes (Khalfi M.) très utilisées dans l'étude des échangeurs de chaleur.

L'identification de fonctions par la méthode des moindres carrés est utile pour le lissage (sous forme analytique) de données thermophysiques, et aussi l'identifica-

tion d'équations d'état. Les liens sont apparus avec la validation du modèle d'une part, la simulation et l'optimisation phases ultérieures à la modélisation d'autre part (paragraphe 10.3 et chapitre 11).

Une bonne sensibilité des paramètres à identifier est un gage de réussite dans l'identification.

## 10.3 SIMULATION DE SYSTÈMES ET PROCÉDÉS

### 10.3.1 Définition

La phase de simulation de système ou de procédé consiste à calculer des variables du modèle, à partir de la description mathématique, fournie lors de la modélisation. Les études de sensibilité paramétriques font partie intégrante de la simulation, et elles suivent les opérations de réduction de modèles et d'identification nécessaires à l'opérabilité.

Couramment, la simulation conduit à la résolution d'un système d'équations simultanées ; pour les systèmes instationnaires, le système est un système d'équations différentielles dans le plus simple des cas, avec des dérivées des variables par rapport au temps. Pour le régime dynamique stationnaire (la majorité des cas étudiés dans cet ouvrage), le système d'équations est un système d'équations algébriques simultanées linéaires ou non.

Dans la suite du paragraphe, on supposera que les performances des composants sont connues, de même que les propriétés thermodynamiques des fluides cyclés.

Deux modes de simulation principaux ressortent de l'ensemble existant :

- la simulation simultanée ;
- la simulation séquentielle.

### 10.3.2 Diagramme de flux

La figure 10.13 représente le schéma synoptique d'écoulement dans une pompe, composant comportant une entrée et une sortie.

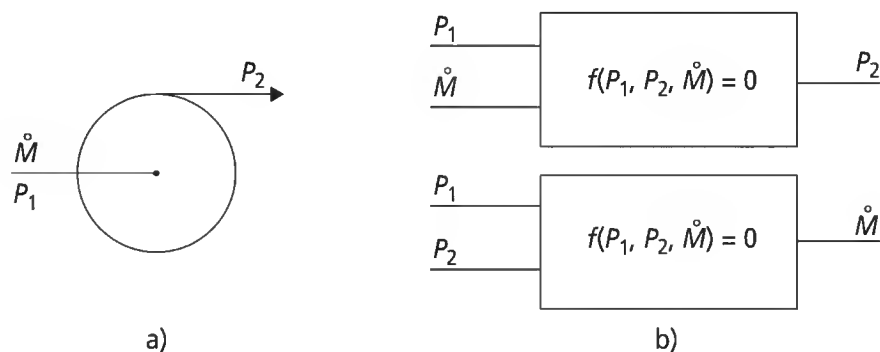


Figure 10.13 Simulation du fonctionnement d'une pompe.

Ce composant physique avec une entrée et une sortie (dipôle physique) correspond d'un point de vue modélisation à une équation algébrique liant les pressions d'entrée  $P_e$  et de sortie  $P_s$  au débit matière à travers la machine  $\dot{m}$  :

$$f(P_e, P_s, \dot{m}) = 0$$

**Remarque :** il serait possible de réduire le modèle en faisant apparaître  $\Delta P = P_s - P_e$  ; pour diverses raisons ( $P_e$  fluctuante), on peut vouloir la disposition d'un débit donné à une pression donnée : exemple, réseau d'air comprimé.

La simulation se traduit par trois diagrammes de flux, dont deux sont représentés sur la figure 10.13 ; ils correspondent aux deux solutions possibles, en réponse à une sortie imposée.

**Remarque 1 :** l'équation algébrique de fonctionnement en régime dynamique stationnaire peut être remplacée par un tableau de valeurs nécessitant interpolation ou lissage.

**Remarque 2 :** en automatique, la fonction qui relie la variable de sortie aux variables d'entrée est une fonction de transfert écrite sous forme d'équation différentielle.

### 10.3.3 Simulations simultanée ou séquentielle

Le passage d'un synoptique aux diagrammes de flux montre l'existence de deux types de simulation.

#### a) Simulation simultanée

La reprise de la problématique de la pompe à chaleur, sous la forme d'un refroidisseur, appareil utilisé industriellement, montre pour une installation à deux refroidisseurs, le passage du synoptique de l'installation (figure 10.14.a) au diagramme de flux associé (figure 10.14.b) (Van Houte V. *et al.*).

Le diagramme de flux est un diagramme en boucle ; il est caractéristique d'une simulation simultanée. Elle nécessite un traitement mathématique (itératif) approprié, qui est étudié ci-après.

#### b) Simulation séquentielle

Les diagrammes de flux et le synoptique de système satisfaisant à une simulation séquentielle ne font apparaître qu'un vecteur d'entrée et un vecteur de sortie (une entrée et une sortie dans les cas simples).

La simulation séquentielle est donc immédiate. Nous n'en dirons pas plus, puisque de tout temps, les problèmes pédagogiques illustrent cette démarche, de par la séquence des questions posées : on va des données initiales du problème vers la réponse finale.

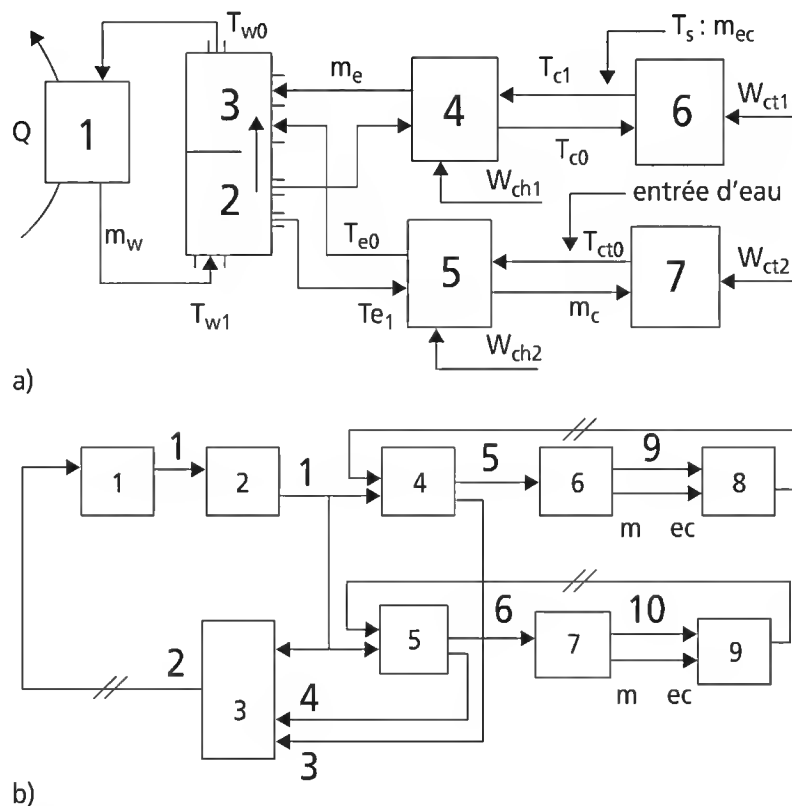


Figure 10.14 Installation frigorifique à deux refroidisseurs d'eau

### 10.3.4 Méthodes de résolution en simulation simultanée

Disposant des relations fonctionnelles et des connexions entre composants (donc entre variables), la simulation simultanée nécessite la résolution d'un système d'équations algébriques.

Les deux principales méthodes sont :

- la méthode de substitution ;
- la méthode de Newton-Raphson.

On ne développera pas ici en détail ces deux méthodes, ni leurs fondements ; le lecteur intéressé est renvoyé vers (Feidt M.).

#### a) Méthode de Newton-Raphson

On se contente ici de donner les étapes successives de la procédure itérative pour la résolution du système d'équations. Le préalable résulte de la phase de modélisation antérieure, qui permet d'aboutir à un système d'équations non linéaires bien posé à  $n$  inconnues,  $n$  équations, mis sous la forme vectorielle :

$$\{f_i(x)\} = \{0\} \quad (10.2)$$

► Étapes de la procédure itérative

- Choix des valeurs d'essai initiales pour les variables  $\{x_{je}\}$ . Ce choix n'est pas trivial.
- Calcul des valeurs de  $\{f_i\}$  correspondant à  $\{x_{je}\}$ .
- Détermination de toutes les dérivées partielles de toutes les fonctions par rapport à toutes les variables : matrice des dérivées partielles d'ordre 1.

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$$

Cette matrice peut être déterminée formellement (cas souhaitable), sinon numériquement, auquel cas la procédure peut générer des erreurs non négligeables.

- Le développement en série de Taylor à l'ordre 1 du vecteur fonction, autour du vecteur  $\{x_{jv}\}$ , vecteur solution vraie (ou exacte du problème, mais inconnue) conduit à :

$$f_i(x_{je}) \cong f_i(x_{jv}) + \sum_j \left[ \frac{\partial f_i(x_{je})}{\partial x_j} (x_{je} - x_{jv}) \right] \quad (10.3)$$

On remarquera dans (10.3), que les dérivées partielles sont calculées en  $\{x_{je}\}$ , seul vecteur d'état disponible (meilleure estimation à l'itération donnée).

Le système d'équations à résoudre est donc :

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x_{je}) \right\| \{x_{je} - x_{jv}\} = \{f_i(x_{je})\} \quad (10.4)$$

La résolution de ce système fournit le vecteur  $\{(x_{je} - x_{jv})\}$  ; connaissant  $\{x_{je}\}$ , il vient alors le nouveau vecteur  $\{x_{jv}\}$ .

- Test de convergence : ce test peut porter soit sur les valeurs du vecteur  $\{f\}$ , soit sur les valeurs du vecteur écart  $\{(x_{je} - x_{jv})\}$ .

Si la convergence est assurée, le calcul est arrêté, et le programme va vers la phase d'exploitation des résultats, par exemple écriture ou visualisation des résultats.

- Itération : si la convergence n'est pas encore atteinte, on détermine les nouvelles valeurs d'essai conformément à :

$$\{x_{je}\}_{\text{nouveau}} = \{x_{je}\} - \{x_{je} - x_{jv}\} = \{x_{jv}\}$$

Puis on fait un retour au point 2 de la procédure itérative.

**b) Exemple d'application de la méthode de Newton-Raphson**

Soit à résoudre l'équation :  $x + 2 = e^x$ .

On met cette équation sous la forme  $y(x) = x + 2e^{-x}$ .

On choisit une valeur d'essai  $x_e = 2$ .

On calcule  $y(x_e) = -3,39$ .

On recherche l'estimation de  $x_v = x_e - \frac{y(x_e)}{y'(x_e)}$ .

Numériquement :  $x_v = 2 - \frac{3,39}{1-e^2} = 1,469$

► Suite des itérations

TABLEAU 10.3 TABLEAU DES VALEURS SUCCESSIVES

$x$	2	1,469	1,208	1,152
$y(x)$	-3,39	-0,876	-0,132	-0,018

Le critère de convergence est ici une valeur de  $y(x)$  inférieure à 0,02 (ce critère n'est pas très bon).

► Représentation graphique

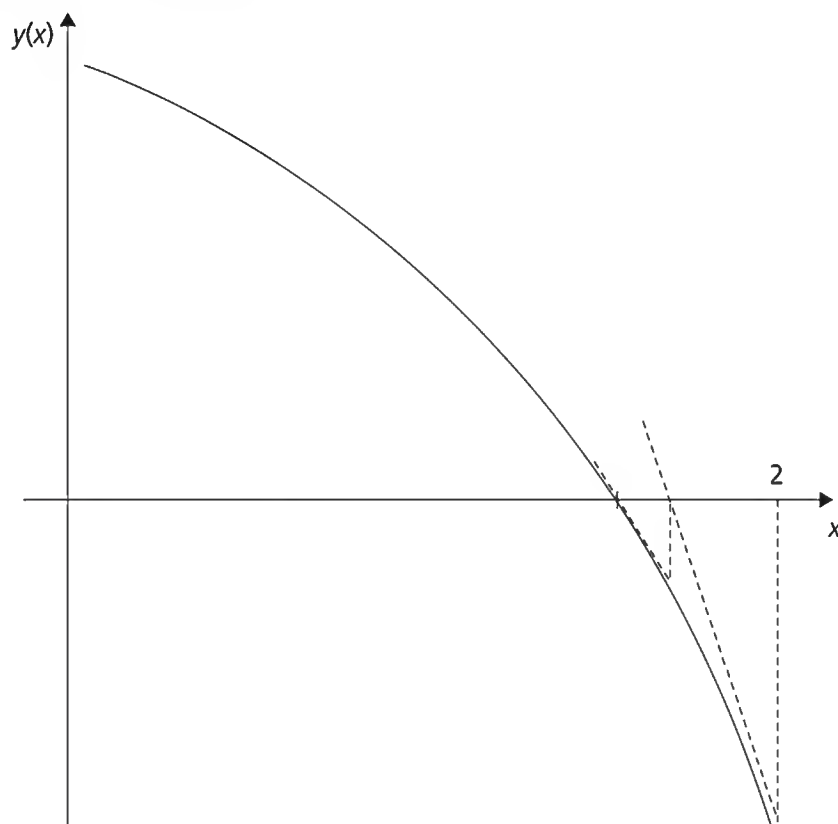


Figure 10.15 Représentation graphique de la méthode de Newton-Raphson

**Remarque :** il apparaît clairement sur le graphique que l'essentiel des difficultés provient du choix de la valeur d'essai initiale ; la forme de la fonction peut aussi être déterminante.



### 10.3.5 Conclusions sur la simulation

La simulation à partir d'un modèle est une phase essentielle et aussi utile en pratique (prévision de consommation énergétique, dimensionnement, sensibilité aux paramètres du système...). C'est une étape préalable dans l'optimisation de système (chapitre 11).

L'attention doit être portée sur la détermination des équations constitutives et leurs couplages.

La méthode de substitution est une méthode robuste, si on choisit pour variables d'entrée celles pour lesquels un écart important affecte peu les variables de sortie.

La méthode de Newton-Raphson peut présenter des difficultés liées à la recherche numérique (si imposée) des dérivées partielles, ou à la taille du système  $n \times n$  à résoudre (grands systèmes) ; dans ce dernier cas, il est possible de partitionner en sous-systèmes pour la résolution et faire un assemblage par substitution (méthode hybride).

## 10.4 QUELQUES LOGICIELS DE SIMULATION

### 10.4.1 L'état de l'art

Les logiciels de simulation numérique ont été, sur la période allant de 1960 à 1980, du domaine du spécialiste ; à partir de 1980, ils se sont développés vers le non spécialiste. Néanmoins, ce dernier doit toujours se poser au moins trois questions en préalable :

- Quels sont les résultats attendus de la simulation ?
- Quels sont les degrés de liberté accessibles lors de celle-ci ?
- Quand arrêter la simulation (en termes de temps, ou en termes de coût) ?

Comme il a été vu (paragraphe 10.2.4.e), tout logiciel (progiciel) de simulation fait apparaître trois étapes lors de son utilisation :

- la modélisation ;
- la simulation (expérience et calcul) ;
- l'analyse des résultats (interactive ou différée).

#### a) Phase de construction du système ou du procédé

Les tendances actuelles pour cette phase visent à une prise en compte forte de l'environnement dans la modélisation ; dans tous les domaines se développent l'analyse du cycle de vie (ACV), ainsi que l'intégration du système.

La capitalisation des connaissances est aussi une préoccupation majeure (développement des bibliothèques primitives : composants, données physiques et chimiques, données économiques..., systèmes experts, intelligence artificielle).

L'interfaçage avec des logiciels avals de conception assistée par ordinateur CAO est aussi en cours de mise en œuvre : couplage de logiciels de simulation avec des logiciels de dessin (par exemple CATIA de Dassault).

### *b) Simulateur*

Actuellement, l'analyse numérique par le solveur est complétée par des algorithmes de maillage automatique (par exemple GAMBIT), le maillage, opération longue en manuel, peut être auto-adaptatif.

L'utilisation du mode interactif permet le gel d'une expérience pour un examen particulier ou local, de même que la modification de paramètre, en cours d'expérience.

L'analyse multiphysique est fortement développée pour tenir compte de couplages physiques complexes (pluridisciplinarité des études). De même, les méthodes numériques sont envisagées de façon couplée (DF différences finies ; EF éléments finis ; VF volumes finis ; EI équations intégrales).

### *c) Résultats interactifs : laboratoire virtuel*

Les variables choisies pour examen peuvent apparaître sous forme de graphes, tableaux ou fichiers ; un traitement analytique est alors possible. De même, une animation peut être mise en place (nouvelle tendance) apportant plus de convivialité : cela est permis par un couplage des codes de calcul, avec la CAO, et la génération d'images de synthèse (les moyens informatiques restent conséquents). La communication par Internet amplifie les échanges.

En conception, le but est de diminuer le coût du développement par moins de prototypes ou de maquettes physiques.

## **10.4.2 Quelques applications et logiciels**

Les possibilités d'application et la disponibilité de logiciels sont très grandes. On indique ci-après quelques exemples qui proviennent de l'environnement immédiat (surtout français) et aussi de l'expérience de l'auteur.

### *a) La thermodynamique des solides*

Le développement de logiciel de simulation a sans doute pris son essor à partir de la mécanique des structures.

L'optimisation de forme de pièces mécaniques est une pratique courante ; les applications en métallurgie (fonderie) de même que dans l'industrie du verre sont nombreuses et font apparaître l'importance des transferts de chaleur sur les propriétés mécaniques.

Plus récemment, on a vu apparaître des voies nouvelles telles que les dissipations par vibration et acoustique (bruits de roulement pour les pneumatiques) et les dissipations d'énergie dans les chocs (domaine des transports).

### *b) Écoulement des fluides et transferts*

Même si elle ne remplace pas les études expérimentales (dont en soufflerie), la mécanique des fluides numériques est une réalité de tous les jours en laboratoire,

mais aussi dans le monde industriel. Le tableau 10.4 récapitule un ensemble des applications.

**TABEAU 10.4** APPLICATIONS DE LA SIMULATION DES TRANSFERTS EN FLUIDE

Quelques applications de la mécanique des fluides	
<b>Automobile</b> – aérodynamique externe – HVAC – habitacle – moteur  <b>Aéraulique</b> – ventilation – climatisation – transports de polluants – transports de particules – ateliers industriels  <b>Ingénierie</b> – hydraulique urbaine – station de pompage – cuve d'ozonation – cuve de filtrage – tête de forage  <b>Énergie</b> – échangeurs thermiques – combustion – four verrier – lit fluidisé	<b>Aéronautique</b> – supersonique – aérodynamique externe – combustion – statoréacteur – parachute  <b>Machines tournantes</b> – pompes-turbines – centrifugeuse – ventilateur – instationnaire – couplage parties fixe/mobile  <b>Environnement</b> – aéroréfrigérant – pollution atmosphérique – comportement au vent – hydraulique fluviale  <b>Médical</b> – valve cardiaque – écoulements sanguins

Les produits disponibles commercialement (dont Fluent) donnent accès aux cartes de vitesse, pression, températures, concentrations locales.

Les écoulements et transferts de chaleur et de matière, tant en régime dynamique stationnaire que transitoire sont étudiés, principalement par la méthode des VF, à l'aide de solveurs dédiés (trois solveurs).

Un site aval est disponible sur le sujet : [www.flow3d.com](http://www.flow3d.com).

### c) Systèmes et procédés

De nombreux logiciels de modélisation et de simulation de systèmes existent pour les systèmes mécaniques, électromécaniques.

AMESIM de la société Imagine est ainsi utilisé dans l'industrie automobile. D'autres logiciels, en accès libre, proposent la modélisation de grands systèmes, ou des systèmes physiques hétérogènes.

Modelica ([www.modelica.org](http://www.modelica.org)) est adapté aux domaines des applications en robotique, automobile et aérospatial comportant des sous-systèmes mécaniques, électriques, hydrauliques, du contrôle, puis de la génération et de la distribution de puissance, dont électrique.

Prosim SA propose un ensemble de logiciels ([www.prosim.net](http://www.prosim.net)), programmes permettant le calcul de propriétés thermodynamiques d'équilibres entre phases pour les corps purs et les mélanges ; le logiciel ARIANE permet la modélisation, l'optimisation et la gestion de productions énergétiques, par exemple la production de biogaz (domaine connexe à la biochimie).

D'autres logiciels sont plus ciblés vers la thermodynamique. En France, on citera Thermoptim ; de nombreux équivalents existent en Europe, donc CYCLE-TEMPO, développé par TNO (Verschoor M.S.E.) aux Pays-Bas (Institut des Sciences de l'Environnement, des recherches en Energétique et de l'Innovation). Ce logiciel a particulièrement été aménagé pour la modélisation des systèmes de réfrigération et à pompe à chaleur.

Enfin, depuis 1995, CYCLE PAD est un logiciel d'accès libre développé par C. Wu (Wu C. ; [cwu@gwmail.usna.edu](mailto:cwu@gwmail.usna.edu)) ; ce logiciel, malgré quelques lacunes, est très pédagogique.

D'autres logiciels sont dédiés aux échangeurs de chaleur, dont on a déjà noté l'importance cruciale dans les systèmes énergétiques ; le CEA par l'intermédiaire du GRETh (Groupement de Recherche sur les Echangeurs Thermiques) joue un rôle pilote en France sur ce thème avec les logiciels TRIO VF (pour les échangeurs compacts), CETUC pour les échangeurs à faisceau de tubes, et l'équivalent pour les échangeurs à plaques.

La simulation constitue donc les prémices à l'optimisation dont il sera question au chapitre suivant.

## BIBLIOGRAPHIE

- CENUSA V., *Contribution à l'amélioration du couplage thermodynamique entre l'installation de la turbine à gaz et l'installation de la turbine à vapeur dans les centrales électriques à cycles combinés gaz/vapeur*, Thèse en co-tutelle, UHP-UPB, 25 octobre 2004.
- COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides*, Paris, Tome II, 4<sup>e</sup> Édition, chapitre 7, 1994.
- EL SAYED Y.M., The mathematical formulation of inter-disciplinary communication, A thermodynamic/design example, *Int. J. Thermodynamics*, 2003, Vol. 6, n° 1, p. 1-11, March.
- FEIDT M., *Constrained static or dynamic optimization of energy systems and processes*, Proceeding ECOS 2003, Copenhagen, Denmark, June 30-July 2, 2003, p. 1263-1270.
- FEIDT M., *Thermodynamique et optimisation énergétique*, Tec et Doc, 2<sup>e</sup> édition, p. 205-209, 1996.
- FEIDT M., *Thermodynamique et optimisation énergétique*, Tec et Doc, 2<sup>e</sup> édition, p. 212-223, 1996.
- HABERSCHILL Ph., LALLEMAND A., Modélisation d'une pompe à chaleur eau-eau ; étude de la charge optimale, *Rev. Gén. Therm. Fr*, 1986, n° 290, p. 69-78.
- JACQUOT C., *Étude expérimentale d'un échangeur gaz-gaz instationnaire*, Rapport contractuel LEMTA, décembre 2005.
- KHALFI M., *Étude de l'influence de l'humidité de l'air sur le coefficient de transfert de chaleur d'une batterie froide en présence ou non de condensation*, Thèse de l'Université Henri Poincaré, Nancy, décembre 1998.
- ORDONNEAU G., Albano G., Masse S., *Carin's : a future versatile and flexible tool for engine transient production*, Proceeding of the 4<sup>th</sup> International Conference on Launcher Technology, Liège, Belgique, 2002.
- OULD BOUAMAMA B., *Les bonds graphs, approche système pour les procédés énergétiques*, Ecole de printemps Carnot II, Université Henri Poincaré, Nancy, 26-29 avril 2004.
- VAN HOUTE U., VAN DEN BULCK E., Modélisation des performances des refroidisseurs utilisant les procédures de résolution simultanée des équations, *Rev. Int. Froid*, 1994, Vol. 17, n° 3, p. 191-198.
- VERSCHOOR M.S.E., *Adapting CHP software to suit the modelling of heat pump and refrigeration systems*, Communication personnelle de l'auteur.
- WU C., *Intelligent computer aided design, analysis and improvement of cooling, heating and power generating systems*, Communication personnelle de l'auteur.

## Chapitre 11

---

# **Théorie de la valeur et optimisation**

### **11.1 DE LA SIMULATION À L'OPTIMISATION**

L'informatisation et les progrès dans les méthodes numériques ont permis, comme il a été montré au chapitre 10, d'analyser et d'étudier le comportement de systèmes complexes ; la modélisation la plus complète et la simulation peuvent conduire à l'optimisation s'il existe un ou des optimums.

#### **11.1.1 Généralités sur l'optimisation**

Il ne faut pas confondre optimisation et amélioration du système, ce qui semble trop souvent le cas. Néanmoins, il faut distinguer différents niveaux d'optimisation ; les deux niveaux principaux sont :

- L'optimisation par comparaison d'alternatives différentes (concepts) ; cette optimisation conduit à des choix entre des configurations différentes de systèmes ou de procédés. Elle est fondamentalement discontinue (optionnelle).
- L'optimisation d'une configuration donnée répondant à un schéma descriptif donné, auquel est associée une représentation mathématique de type continue par rapport aux variables du problème. C'est ce problème qui sera surtout considéré dans la suite.

Encore faut-il formuler le problème d'optimisation ; pour cela, il faudra préciser :

- un ou plusieurs critères ;
- les contraintes du problème ;
- le domaine de recherche de l'optimum.

Tout cela influe sur les méthodes nécessaires à l'optimisation ; d'où la méthodologie proposée, puis des exemples.

### 11.1.2 Mise en forme d'un problème d'optimisation

#### a) Vocabulaire

##### ➤ Critère et fonction objectif

Le problème d'optimisation le plus simple (de base) fait intervenir une fonction objectif (FO)  $y$ , ou fonction coût associée à un critère ; l'optimum recherché correspond à la solution la meilleure au sens de ce critère.

La notion de critère n'est pas une notion facile ; le choix est souvent délicat. Tellement délicat qu'on aboutit souvent à un ensemble de critères : on est alors conduit à une analyse multicritères. Cela sera développé par la suite.

Exemple : pour un séchoir, l'optimisation peut porter sur :

- la production du séchoir ;
- la qualité des produits ;
- la minimisation des frais fixes (investissement par exemple) ;
- la minimisation de la dépense énergétique ;
- la minimisation du temps de séchage ;
- la minimisation du coût global.

**Remarque :** Une FO peut être une contrainte ; par exemple dans le cas du séchoir, la qualité des produits.

Pour conclure sur cette définition de la fonction objectif, elle s'écrit sous la forme :

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$\{x_i\}$ , vecteur des variables de l'optimisation, de dimension  $n$  ; ces variables sont indépendantes en l'absence de contrainte.

$y$  sera fonction de critères pour lesquels le modélisateur bénéficiera de son intuition, de son expérience, et de l'état des connaissances.

##### ➤ Contraintes

Comme il a été dit ci-dessus, le problème posé doit satisfaire la plupart du temps à des conditions : ce sont les contraintes. Ces contraintes sont de deux types.

Les contraintes égalités s'expriment sous la forme mathématique suivante :

$$\{\phi_j\} = \{\phi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = \{0\}$$

les  $m$  équations correspondantes réduisent le nombre de variables indépendantes à  $(n - m)$  ; il faut donc que  $m < n$ , pour que la recherche d'optimum ait un sens.

Les contraintes inégalités s'expriment sous la forme mathématique suivante :

$$\{\psi_k\} = \{\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \leq \{C_k\}$$

$\{C_k\}$ , vecteur second membre ne comportant que des constantes.

**Remarque :** il n'y a pas ici de limitation *a priori* du nombre  $k$  de contraintes inégalités. Leur ensemble toutefois doit ménager un espace acceptable où rechercher l'optimum s'il existe.

La nature physique des contraintes est variée ; elle provient essentiellement de contraintes de fonctionnement (dynamiques ou pas) et de dimensionnement (tout système physique reste de dimensions finies (ici, dimension est pris au sens large), et enfin de modélisation.

### ► Variables d'optimisation

Le modèle fait apparaître des grandeurs se répartissant entre variables et paramètres.

Les paramètres sont des données de dimensionnement, puis de fonctionnement indispensables au modèle, comme il a été vu. Les autres grandeurs sont des variables du problème.

Ces variables appartiennent à un domaine physique (voire mathématique) qu'il y a lieu de préciser ; généralement, le domaine mathématique possible est plus large que le domaine physiquement acceptable (plus difficile à cerner). Les contraintes inégalités jouent ici un rôle majeur.

Les contraintes égalités suppriment des degrés de liberté au problème ; elles permettent de faire apparaître des variables intermédiaires (ou liées), qu'il est intéressant d'explicitier et d'éliminer dans la mesure du possible (phase de réduction du système mathématique à résoudre). Il en résulte au final un vecteur d'état des degrés de liberté du problème ; ce vecteur d'état comporte les variables d'optimisation.

### b) Les étapes de l'optimisation

On a vu que l'optimisation d'un système ou procédé était intimement connectée à la modélisation et la simulation. De ce fait, les étapes de l'optimisation peuvent se répartir comme suit.

L'analyse du problème a pour but de cerner le vecteur des variables d'optimisation. Ensuite, sont mis en place un critère et une FO. Il a été vu que si la fonction objectif est unique, la notion critère elle ne l'est pas ; la tendance actuelle est même à l'analyse multicritère, avec les difficultés qui y sont associées (voir paragraphe 11.2). Enfin, sont mis en place le modèle et les contraintes : traduction fonctionnelle et espace de recherche de l'optimum.

Ces trois phases rendent compte de la formulation analytique puis mathématique du problème dans son cadre physique.

Lors de la phase de simulation, les expériences faites sur le modèle conduisent alors à une formulation plus précise du problème visant à la simplicité (robustesse), mais aussi la pertinence (représentativité) du modèle, ainsi qu'à la diminution des temps d'exécution.



La simulation est alors intimement combinée aux phases de réduction de modèle, identification de paramètres, validation de modèles (voir paragraphes 2 et 3 chapitre 10).

La reconnaissance de l'existence d'un optimum est fondamentale à ce stade ; si elle est possible, elle se traduit par un gain de temps important.

L'analyse méthodologique a pour but le choix d'une méthode d'optimisation. Elle s'appuie sur :

- l'existence d'une ou plusieurs variables ;
- les contraintes et leurs types ;
- la forme de la fonction objectif : linéaire ou pas.

La mise en œuvre de la méthode retenue fait intervenir un critère d'arrêt à préciser.

**Remarque 1 :** souvent, l'optimum trouvé satisfait à une condition nécessaire, mais non suffisante ; il faudra alors compléter l'étude.

**Remarque 2 :** pour les grands systèmes, il est courant de réaliser l'optimisation de sous-systèmes ; cela ne conduit pas de fait à l'optimisation globale.

L'analyse des résultats a pour but précisément de pallier les insuffisances (voir remarques ci-dessous), mais aussi de valider physiquement les résultats mathématiques et informatiques obtenus (regard du chercheur et de l'ingénieur). Souvent, une étude de sensibilité de l'optimum obtenu est réalisée par rapport à des paramètres choisis.

### 11.1.3 Un exemple d'optimisation

On considère ici un procédé de séchage, qui est une opération courante dans le domaine industriel (agroalimentaire, céramiques, peintures...). De nombreux modèles ont été développés et sont disponibles dans la littérature, dont les séchoirs solaires.

L'optimisation d'un séchoir peut être une optimisation de conception (dimensionnement), ou une optimisation de fonctionnement (régime nominal). C'est cette seconde option qui est illustrée ici.

#### a) Critère et fonction objectif

Le critère retenu ici est un critère de profit maximum : critère de type économique, faisant appel à un modèle thermoéconomique : coût de séchage (main d'œuvre, investissement, transport, stockage), coût d'achat et de vente du produit.

#### b) Contraintes

Elles sont de deux ordres. Tout d'abord, il existe une contrainte de capacité de production : le séchoir étant un appareil existant, des limitations proviennent de son dimensionnement préalable.

Ensuite, on rencontre des contraintes de qualité du produit : la thermosensibilité impose des températures maximales de séchage :  $T_{\max}$ . La relation temps-température ne peut être quelconque (vitesse de séchage).

L'humidité résiduelle est bornée supérieurement (teneur en eau finale < teneur MAX).

Enfin, une contrainte de flux énergétique : le débit de combustible utilisé est limité supérieurement par le dispositif d'alimentation existant.

### c) Variables et paramètres

Les grandeurs physiques et économiques sont nombreuses (et interdépendantes pour partie).

Le critère économique retenu est une fonction de plusieurs variables d'optimisation potentielles qui sont des grandeurs sensibles. On notera le débit massique de produit sec, mais aussi la charge du séchoir par unité de surface du tapis d'alimentation en produit, voire la vitesse d'avancement du produit dans le séchoir (cette grandeur est accessible à la commande).

### d) Mise en place du problème

Le critère retenu, B, bénéfice de l'opération peut alors s'exprimer de façon simple sous la forme de la FO suivante :

$$B = A \cdot \overset{o}{M}_p - C \cdot \overset{o}{M}_F$$

$\overset{o}{M}_p$ , débit massique de produit sec

$\overset{o}{M}_F$ , débit massique de combustible (fuel)

A, C, paramètres fonction des divers coûts, et donc réajustables.

Il apparaît sur la FO ci-dessus que les variables naturelles du problème d'optimisation sont les débits massiques de produit sec et de combustible.

Remarque : d'autres critères sont possibles, en particulier sous une forme « normée » ; dans le cas du séchoir, ce pourrait être le bénéfice par kilogramme de produit sec (référence au produit), ou par heure de séchage (référence au séchoir et à son fonctionnement).

## 11.1.4 De la relation entre thermodynamique et optimisation

Le développement des sciences a montré que dans le domaine mécanique, le théorème de Maupertuis, aussi appelé principe de moindre action, fait apparaître un optimum dans un domaine qui a été prolongé récemment en mécanique des fluides, aussi bien pour les fluides incompressibles que compressibles.

Le même type de théorème existe dans le domaine de la physique, et plus particulièrement de l'optique (propagation des ondes) sous forme du théorème de Fermat.

Qu'en est-il dans le domaine thermodynamique ? (Feidt M.) Nous avons vu qu'en thermostatique la stabilité de l'équilibre est relié au minimum de fonctions particu-

lières ( $U, H, F, G$ ) ; à  $U$  et  $V$  donnés, il y correspond aussi le maximum de la fonction entropie  $S$ .

D'autre part, pour des situations hors équilibre, mais dans un voisinage restreint du point d'équilibre (souvent associé à l'approximation linéaire), le régime dynamique stationnaire (et donc contraint) satisfait à une condition de minimum de production d'entropie.

Ce point qui montre la singularité de la fonction entropie mérite considération ; la conjecture sur l'existence d'un principe général (thermodynamique) d'extremum est posée et constitue une préoccupation fondamentale de ce que nous appellerons la thermodynamique optimale.

À cet aspect fondamental, il y a lieu d'adjoindre les applications du monde de l'ingénieur tant thermodynamique (machines et procédés) que les prolongements actuels en thermoéconomie, puis analyse du cycle de vie (ACV) intégrant au moins les aspects environnementaux et durabilité.

Ces aspects tant fondamentaux qu'appliqués sont abordés et illustrés dans la troisième partie.

## 11.2 THÉORIE DE LA VALEUR ; CRITÈRE D'OPTIMISATION

### 11.2.1 Variables de valeur

Comme il a été vu, l'élaboration de modèles vise à une prévision des performances de composants, de machines, de systèmes et de procédés.

Les performances conduisent à divers types de problèmes et en conséquence de variables selon les domaines ; la pluridisciplinarité (problème multiphysique par exemple) induit des performances multicritères, à travers des variables de valeur ou de performance.

**Exemple 1 :** Cas général. Variables de coût ; vitesse ; puissance ; capacité ; poids ; encombrement. Ces variables sont des fonctions objectifs naturelles (simples) ; elles peuvent se combiner de façon complexe dans la FO globale.

**Exemple 2 :** Critères potentiels pour une automobile. Les points de vue peuvent être variés. On évoque ci-après des critères potentiels selon trois points de vue, tout en excluant certains critères potentiels très subjectifs.

**Point de vue du passager :** Place offerte (dont coffre), confort, sécurité...

On voit ici même que le critère confort peut lui-même comporter plusieurs index (par exemple température sèche, température humide, température radiative et vitesse d'air).

**Point de vue du constructeur et garage :** Bénéfice, temps de développement, coûts en infrastructure et de production, facilité de maintenance, impact environnemental ( $\text{CO}_2$ , recyclage du véhicule en fin de vie), image de marque...

**Point de vue de l'utilisateur (conducteur) :** Puissance du véhicule, couple moteur, consommation (laquelle ?), automaticité (BVA, boîte de vitesse automatique ; GPS, système de positionnement global), autonomie, facilité d'entretien (fréquence, coût), coût à l'achat, durée de vie du véhicule, possibilité de revente, disponibilité à l'achat, tenue de route, freinage...

### 11.2.2 Analyse multicritère

Il apparaît clairement dans les deux exemples ci-dessus des antagonismes entre les divers critères potentiels et une multiplicité qui nécessite un examen complet et minutieux, avant optimisation : généralement, l'optimisation sera donc multicritère.

Par souci de simplification pédagogique, la majorité des exemples traités relèveront d'un critère unique.

Certains critères potentiels peuvent ainsi être traduits sous forme de contraintes, dont on juge la sensibilité sur l'optimum.

Les critères dominants se répartissent entre trois grandes catégories : les critères scientifiques et techniques, les critères économiques et les critères écologiques.

Ils sont considérés ci-après.

### 11.2.3 Critères scientifiques et techniques

#### a) Grandeur conservative dans un système ou procédé

Le système ou procédé est une structure complexe (usine, machine, composant) qui est examiné en régime dynamique stationnaire par rapport à une grandeur physique  $G$ .

Vis-à-vis de cette grandeur, l'entrée fait apparaître une dépense  $\overset{o}{G}_d$ , la sortie un effet utile  $\overset{o}{G}_u$ , et le système connaît des rejets  $\overset{o}{G}_r$ , tels que :

$$\overset{o}{G}_d = \overset{o}{G}_u + \overset{o}{G}_r \quad (11.1)$$

**Remarque 1 :** il est possible d'adimensionner l'équation par rapport à une référence, soit l'effet utile (le plus courant), soit par rapport à la dépense énergétique ; on obtient dans ce cas, un facteur de rejet  $r_u$  ou  $r_d$ .

On notera que  $r_u$  est relié au rendement du système vis-à-vis de la grandeur  $G$  (au sens du premier principe de la thermodynamique) sous la forme :

$$r_u = \frac{1}{\eta_{IG}} - 1.$$

Aussi, pour une grandeur conservative, la maximisation du critère rendement correspond à la minimisation des rejets (préservation de l'environnement).

**Remarque 2 :** la relation 11.1 vaut pour les bilans-matière et aussi pour le bilan d'énergie.

## b) Particularisation à l'énergie

## ► Base enthalpique (premier principe de la thermodynamique)

La relation (11.1) particularisée aux flux d'énergie donne la même valeur aux flux d'énergie nobles  $\overset{o}{w}$ , qu'aux flux de chaleur  $\overset{o}{q}$  : (11.1) valorise l'énergie sur la base du principe de conservation, soit ici une base enthalpique pour le système ouvert.

## ► Base énergétique (second principe de la thermodynamique)

On a vu qu'un flux de chaleur est caractérisé par le niveau de température  $T$  auquel il est disponible (qualité de la chaleur).

Par ailleurs, le système est à considérer dans son environnement, qui est une ambiance supposée à  $T_o$ .

On rappelle alors que l'exergie disponible pour ce flux vaut :

$$\overset{o}{Ex} = \overset{o}{q} \left( 1 - \frac{T_o}{T} \right) \quad (11.2)$$

On voit alors apparaître la valeur de l'énergie calorifique sous forme du facteur de Carnot  $\theta = 1 - \frac{T_o}{T}$ .

**Exemple :** on dispose d'un fluide caloporteur à 160 °C, dans un environnement à 10 °C. Cette chaleur a pour valeur  $\theta = 0,39$ . Aussi, pour produire 1 kwh d'énergie noble, il faudra disposer dans ces conditions de 2,56 kwh thermique.

**Remarque 1 :** l'exergie associée à la chaleur fait intervenir un facteur de Carnot qui est positif lorsque  $T > T_o$  ; l'exergie s'écoule dans le même sens que le flux de chaleur. Lorsque  $T < T_o$ , le facteur Carnot devient négatif ; le flux d'exergie est de sens opposé au flux de chaleur.

**Remarque 2 :** l'exergie est une grandeur non conservative au même titre que l'entropie. De ce fait, le schéma de la figure 11.1 en régime dynamique stationnaire devient celui de la figure 11.2 pour les flux exergétiques. Il y correspond l'équation (11.3) :

$$\overset{o}{Ex}_d = \overset{o}{Ex}_u + \overset{o}{Ex}_p + \overset{o}{Ex}_r \quad (11.3)$$

$\overset{o}{Ex}_p$  flux d'exergie perdue (ou détruite).

## ► Divers critères exergétiques

Divers critères exergétiques existent ; il y a lieu ici d'être très attentif. La définition la plus courante est une extension de la notion de rendement au sens du premier principe ; on appellera rendement exergétique le rapport entre l'exergie utile et l'exergie dépensée :

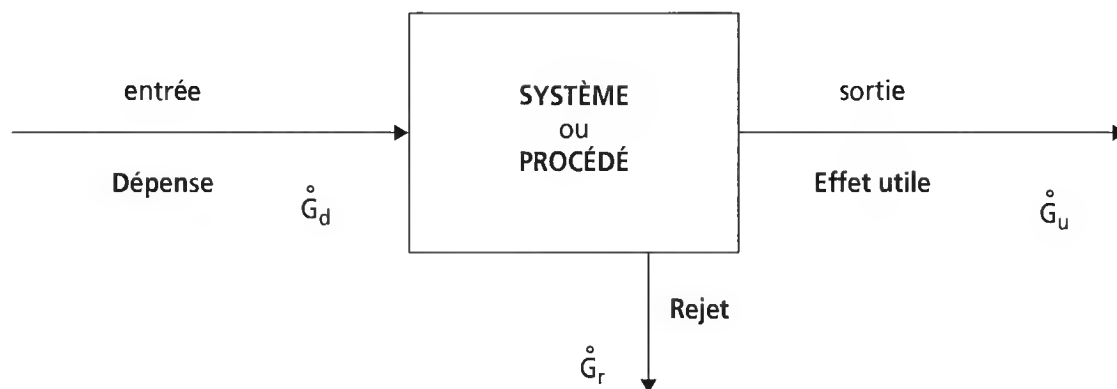


Figure 11.1 Schéma d'un système ou procédé observé sur une grandeur  $G$

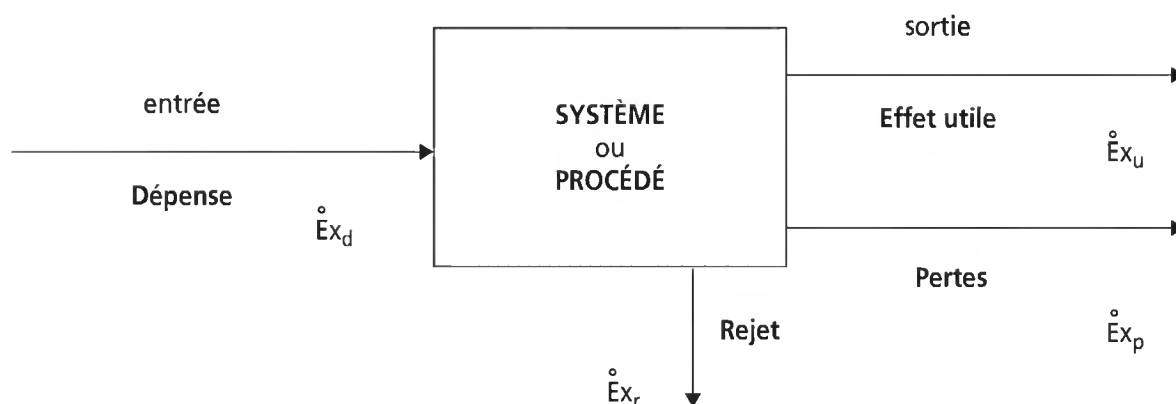


Figure 11.2 Schéma d'un système ou procédé observé sur la grandeur  $\dot{E}_x$ , flux d'exergie non conservative

$$\eta_{ex} = - \frac{\dot{E}x_u}{\dot{E}x_d} \quad (11.4)$$

Cette définition diffère fondamentalement de celle de Grassmann qui fait le rapport entre l'exergie de sortie, sur l'exergie d'entrée :

$$\eta_{exG} = - \frac{\dot{E}x_s}{\dot{E}x_e} \quad (11.5)$$

Brodiansky *et al.* (V.M. Brodiansky *et al.*) ont particularisé la notion d'exergie rejetée  $\dot{E}x_r$ , mais non utile (*transiting exergy*), de sorte qu'il apparaît de nouveaux rendements exergetiques :

$$\eta_{ex1} = \frac{\overset{o}{Ex}_s - \overset{o}{Ex}_p}{\overset{o}{Ex}_e} = \eta_{exG} - \frac{\overset{o}{Ex}_p}{\overset{o}{Ex}_e} \quad (11.6)$$

$$\eta_{ex2} = \frac{\overset{o}{Ex}_s - \overset{o}{Ex}_r - \overset{o}{Ex}_p}{\overset{o}{Ex}_e - \overset{o}{Ex}_r} \quad (11.7)$$

**Remarque :** le flux d'exergie rejeté et non utilisé n'en possède pas moins une certaine valeur. Les préoccupations d'intégration de système et valorisation des rejets conduisent alors à préférer la relation (11.6).

D'autres démarches conduisent à des définitions complémentaires (M. Feidt). Cela sera repris en troisième partie de l'ouvrage, à l'occasion de l'étude des systèmes de cogénération, et trigénération.

Dans ces systèmes, l'exergie chaleur des rejets thermiques est considérée pour valorisation ; les pertes exergetiques sont représentées par la non adiabacité du système.

### 11.2.4 Critères économiques

#### a) Bilan de valeur économique d'un système énergétique

En économie, le système transforme des biens à faible valeur propre, en biens plus utiles dits à valeur ajoutée. Pour réaliser cette opération, il faut mettre en jeu des processus coûteux nécessitant des informations, des énergies, et de la matière.

L'objectif du système ou du procédé est un bénéfice net maximum, qui correspond au minimum du coût opératoire (P. Le Goff *et al.*) ; l'expression en termes de flux d'énergie s'écrit :

$$\frac{\overset{o}{C}_o}{\overset{o}{E}_u} = r_u (\overset{o}{v}_d - \overset{o}{v}_r) - (\overset{o}{v}_u - \overset{o}{v}_d) \quad (11.8)$$

$\overset{o}{C}_o / \overset{o}{E}_u$ , coût opératoire (ou de fonctionnement) en référence à l'énergie utile

$(\overset{o}{v}_d - \overset{o}{v}_r)$ , perte de valeur pour l'énergie rejetée dans l'environnement

$(\overset{o}{v}_u - \overset{o}{v}_d)$ , valeur ajoutée pour l'énergie utile dans le système.

**Remarque :** le raisonnement particulier relatif à l'énergie, peut être généralisé à la matière.

### b) Prise en compte de l'investissement

L'exemple précédent est prolongé du point de vue énergétique, en considérant le contenu énergétique du système  $E$ , quantité d'énergie nécessaire à la mise en place du système.

Ce contenu énergétique correspond à un certain investissement initial  $I_i$ , associé à la valeur économique initiale  $v_i$ . Le système ou procédé fonctionne  $N$  années (durée de vie). Après quoi le système est démantelé puis partiellement recyclé et mis en décharge ; on associe au système en fin de vie une valeur unitaire finale  $v_f$  (euros / joule).

Le coût énergétique global du système en résulte :

$$C_G = N \cdot \overset{o}{C}_o + E(v_i - v_f) \quad (11.9)$$

**Remarque :** le coût global énergétique spécifique rapporté à l'énergie utile s'en déduit sous la forme  $C_G / \left( \overset{o}{E}_u \cdot N \right)$  ; il fait apparaître un contenu énergétique spécifique  $E / \left( \overset{o}{E}_u \cdot N \right)$ .

L'expression (11.9) montre que l'optimisation économique doit dans le cas général consister à rechercher le minimum du coût global.

Toutefois, on constate que, selon le point de vue, (utilisateur, vendeur...) d'autres critères sont utilisés tels que le minimum du coût d'investissement (ou du prix de vente), le minimum du coût de fonctionnement, même si ceux-ci sont moins pertinents dans l'absolu.

**Remarque :** de nouvelles tendances apparaissent dans la littérature, visant à compléter le critère économique retenu (de type extensif) par des considérations intensives : optimisation par analyse coût-qualité (I. Ionita).

### c) Un exemple économique : chauffage d'un habitat

Un habitat représente un certain volume à maintenir à la température sèche de confort désirée  $T_u$  (couramment 20 °C), par rapport à un environnement à une température  $T_o$ . Le chauffage se fait à partir d'une source thermique à  $T_d$  (chaudière), les fumées étant rejetées dans l'ambiance à une température  $T_r$ .

Si l'isolation thermique est imposée, le flux utile de chaleur s'en déduit et est fixé à  $\overset{o}{E}_u$  (figure 11.3).



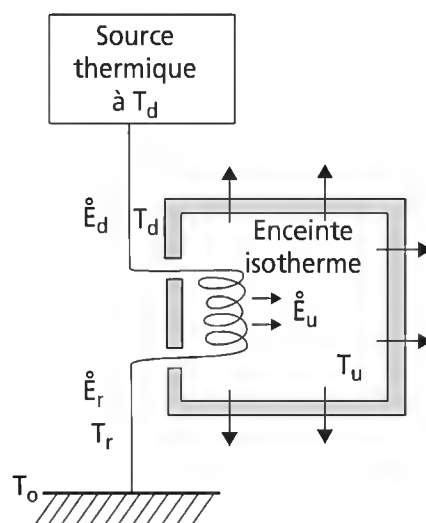
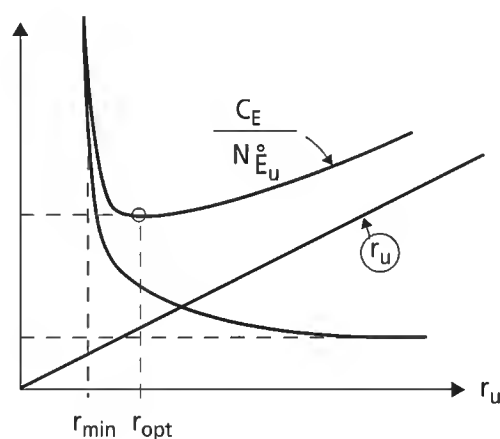


Figure 11.3 Schématisation du chauffage d'un habitat.

On sait que plus le système de chauffage est efficace, moins il y aura de pertes d'énergies dans l'atmosphère (rejet) ; par contre, l'efficacité énergétique croissante induit un coût d'investissement croissant. Il existe donc une valeur de taux de rejet  $r_u$  optimale conduisant à un minimum de coût global, conformément à la figure 11.4 (variable d'optimisation  $r_u$ ).

Figure 11.4 Coût global énergétique en fonction du taux de rejet de chaleur  $r_u$  d'un habitat.

**Remarque :** l'optimisation économique peut aussi être conduite en incluant l'isolation dans le système étudié ; il y a aussi dans ce cas un optimum, mais différencié et à une variable supplémentaire, l'épaisseur d'isolant.

### 11.2.5 Critères écologiques

Les préoccupations environnementales à un niveau mondial sont récentes, puisqu'elles datent d'environ dix ans (protocole de Kyoto, décembre 1997), pour les gaz à effet de serre, d'environ vingt ans pour la protection de la couche d'ozone (protocole de Montréal, 1987).

Les préoccupations écologiques sont de deux ordres : les préoccupations environnementales indiquées ci-dessus, mais aussi la raréfaction des ressources.

Ces deux points sont considérés ci-après.

#### a) Rareté des ressources

Le fait que notre monde soit un monde fini fait que les quantités de produits, matière, énergie qui nous sont accessibles restent limitées.

Ce point a été évoqué pour les combustibles solides (voir chapitre 2). Il vaut aussi pour des matières précieuses, ce qui influe sur leur valeur marchande ; par exemple, le platine, qui est un catalyseur très recherché, reste d'usage problématique pour les piles à combustible de type PEMFC (Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cell).

#### ► Indice de rareté

Pour une ressource non renouvelable, un critère courant est l'indice de rareté  $I_R$  :

$$I_R = \frac{\text{réserve connue et exploitable en l'état actuel de la technologie}}{\text{consommation totale annuelle}}$$

On peut aussi calculer le nombre d'années avant épuisement de la réserve, en supposant une consommation annuelle constante ; les résultats restent fluctuants selon les auteurs (voir chapitres 1 et 2).

On remarquera ici que le prix d'une ressource variant avec sa rareté (relation à l'économique), les réserves peuvent augmenter avec le coût de la ressource.

**Remarque 1 :** le flux de consommation d'énergie fossile reste très inférieur au flux de production de ces mêmes énergies, même avec un rendement de photosynthèse faible, de l'ordre de 1 %.

**Remarque 2 :** la pollution en milieu ambiant par l'activité humaine évolue de façon alarmante, principalement par sa perturbation du milieu atmosphérique.

#### ► Recyclage et écomatériaux

Pour pallier la raréfaction des ressources, les opérations de recyclage se développent sous des formes diverses, dont la cascade de recyclage, qui se termine par la mise au rebut ultime (déchet).

Cela vaut particulièrement pour les matériaux. Il y a lieu de remarquer que les matériaux à haute performance sont généralement très spécifiques et pas toujours aisément recyclables vu leur composition chimique ; la nouvelle tendance consiste à développer des matériaux dans une perspective de recyclage et de préservation des ressources et de l'environnement (écoconception).

L'indice de recyclage est alors utile : pourcentage de produit revalorisable en fin de vie.

**Remarque 1 :** il est apparu la notion de durée de vie de produit (durée finie).

**Remarque 2 :** on rejoint alors la notion d'analyse de cycle de vie (ACV). À titre d'exemple, l'analyse énergétique de cycle de vie peut être développée pour choisir un matériau conduisant au minimum de consommation d'énergie sur sa durée de vie (P.E. Fitch *et al.*).

### b) Critères environnementaux

Bien que la pollution puisse porter aussi bien sur l'atmosphère (ambiance gazeuse) que les mers (ambiance liquide) ou l'environnement minéral, l'effort de caractérisation et traitement se développe dans l'ordre indiqué ci-dessus ; on peut remarquer que les phénomènes de diffusion sont plus rapides en phase gazeuse, puis liquide, que dans le monde minéral.

#### ➤ L'ozone

L'ozone ( $O_3$ ) est un gaz à trois atomes d'oxygène. Toxique pour les organismes vivants (atmosphère des villes), il est utile au niveau stratosphérique, du fait de son interaction (blocage sélectif) avec les rayonnements ultraviolets (UVB) ; la concentration maximale en ozone se rencontre à une altitude comprise entre 25 et 30 km.

Un certain nombre de produits de synthèse utilisés par l'homme diffusent dans les couches stratosphériques où leur dissociation sous l'effet des rayonnements UVB provoque, par des réactions catalytiques complexes, la transformation d'ozone en oxygène moléculaire  $O_2$  et (ou) atomique.

Parmi les substances incriminées, le protocole de Montréal et ses amendements font apparaître les CFC, chlorofluorocarbures, les HCFC, hydrochlorofluorocarbures ; ces corps très utilisés dans le domaine des industries frigorifiques et de conditionnement d'air sont en voie d'élimination, au profit de nouveaux fluides dits naturels (voir chapitre 15) ou de nouvelles techniques de production de froid.

**Remarque 1 :** les rayons ultraviolets de la bande B (UVB), une des trois bandes de rayonnement UV, ont une longueur d'onde comprise entre 0,28 et 0,32  $\mu m$ .

**Remarque 2 :** les fluides de type HCFC et HFC (hydrofluorocarbures) sont dits fluides de transition ; ils doivent être remplacés à plus ou moins longue échéance.

#### ➤ Potentiel d'appauvrissement de l'ozone ODP

L'ODP (*Ozone Depletion Potential*) est un *indice relatif* du pouvoir de destruction de l'ozone par une substance chimique.

La substance de référence (arbitrairement choisie à 1) correspond à la destruction d'ozone provoquée par le R-11 (ou CFC11).

On peut considérer que le problème de l'appauvrissement en ozone est en cours de normalisation.

### ► Le réchauffement planétaire

Il n'en est pas de même pour le réchauffement planétaire ; l'activité humaine ajoute aux modifications naturelles du climat des perturbations directes ou indirectes. Les émissions directes sont relatives aux fluides émis (gaz), les émissions indirectes à l'énergie utilisée.

#### *L'effet de serre*

L'effet de serre représente le mécanisme global rendant compte du « forçage radiatif ». Il s'agit d'un effet sélectif chaud.. Le rayonnement qui vient du Soleil interagit avec l'atmosphère partiellement transparente aux rayonnements ; les rayonnements réémis par le sol ou à la surface terrestre décalés vers les longueurs d'onde de l'infrarouge ne retraversent pas la barrière atmosphérique (ils sont piégés, comme derrière la vitre d'une serre).

#### *Les gaz à effet de serre*

Les gaz atmosphériques qui contribuent à l'effet de serre sont la vapeur d'eau, le gaz carbonique ( $\text{CO}_2$ ), puis des gaz figurant à l'état de traces : le méthane, les oxydes d'azote, les CFC, HCFC, HFC. D'autres gaz interviennent encore, mais avec un effet moindre (citons les hydrocarbures).

#### *Le potentiel de réchauffement planétaire GWP*

L'index GWP (*Global Warming Potential*) est un indicateur relatif du pouvoir de réchauffement d'une substance présente dans l'atmosphère sur une période d'un siècle ; la référence est le gaz carbonique  $\text{CO}_2$ . Par définition, son GWP vaut 1 :  $\text{GWP}(\text{CO}_2) = 1$

À titre d'exemple, on indique :

$$\text{GWP}(\text{CH}_4) = 23 ; \text{GWP}(\text{R134a}) = 1\,300$$

#### *L'index TEWI*

Cet index TEWI (*Total Equivalent Warming Impact*), est plus complet que le précédent ; il permet pour un équipement donné de tenir compte :

- de l'effet direct du réchauffement atmosphérique dû au fluide cyclé, en incluant les conditions de pertes ou de fuites, ainsi que de récupération ;
- de l'effet indirect de réchauffement associé aux émissions de  $\text{CO}_2$  liées à l'utilisation d'énergie nécessaire au fonctionnement de l'équipement sur sa durée de vie.

La relation permettant le calcul du TEWI s'écrit :

$$\text{TEWI} = \text{GWP}_{100} \left[ M(1 - \alpha) + M \cdot f \cdot N \right] + E \cdot \beta \cdot N \quad (11.10)$$

$M$ , masse de fluide présente dans l'équipement (en kg)

$\alpha$ , fraction de fluide récupérée en fin de vie

$f$ , taux de fuite annuel

$N$ , temps d'utilisation en années

$E$ , consommation d'énergie en kwh

$\beta$ , quantité de CO<sub>2</sub> émise par kwh (selon l'énergie).

L'index TEWI est exprimé ici en kg de CO<sub>2</sub> sur la durée de vie de l'équipement. Il a été initialement développé pour les équipements frigorifiques ; il ressort des études récentes que, quel que soit le réfrigérant, les effets indirects sont prépondérants (M.W. Spatz) : l'efficacité énergétique est donc essentielle, pour ces machines, dans la préservation de l'environnement.

### c) Tentative de généralisation des critères précédents

Les paragraphes 11.2.5 a et b ont mis en évidence les insuffisances des critères écologiques actuels qui restent très particuliers.

#### ► Critère de nuisance d'un produit

L'analyse des flux permet de connaître l'évolution d'autres impacts que l'effet de serre. En appelant  $g_i$  l'intensité du polluant associé au débit-matière  $\dot{m}_i$ , il vient  $\forall_i$  :

$$\dot{G}_i = g_i \cdot \dot{m}_i \quad (11.11)$$

**Exemple :**  $g_i$ , concentration massique en ozone, en frigorigène (CFC, HCFC, HFC), en CO<sub>2</sub>, en SO<sub>2</sub> (anhydride sulfureux), concentration en No<sub>x</sub> (oxydes d'azote).

Pour des transferts en chaleur sensible, et en supposant le fluide considéré isobare à la pression atmosphérique, ainsi que la chaleur spécifique massique  $C_p$ , constante (non fonction de  $T$ ), on a :

$$g_i = C_p T_i$$

L'impact du polluant est défini par rapport à la situation naturelle du produit considéré, d'intensité  $g_{io}$ , qui est prise en référence ; les travaux du professeur Szargut (Szargut J. *et al.*) sont les plus complets à notre connaissance pour fixer cette référence.

L'introduction de la référence dans (11.11) conduit à :

$$\dot{G}_i = (g_i - g_{io}) \dot{m}_i + g_{io} \dot{m}_i \quad (11.12)$$

Cette relation conduit par division par  $g_i$  à l'expression du débit-matière :

$$\dot{m}_i = \left( 1 - \frac{g_{io}}{g_i} \right) \dot{m}_i + \frac{g_{io}}{g_i} \dot{m}_i \quad (11.13)$$

Dans (11.12), le premier terme correspond à la pollution, ou la raréfaction de l'élément considéré selon que  $g_i$  est supérieur ou inférieur à  $g_{io}$ .



Dans (11.13), on voit apparaître la généralisation du facteur de Carnot : la pollution thermique correspond à l'exergie perdue dans l'environnement pour  $T > T_0$ .

La pollution suppose une intensité maximale admissible (relevant de la réglementation)  $g_{\max}$ .

Le problème qui demeure reste la définition d'une unité commune entre les diverses grandeurs, et l'intégration dans le temps.

#### ➤ Ecoindex et analyse du cycle de vie (ACV)

L'exposé considère ici essentiellement les systèmes énergétiques, mais la méthodologie est plus générale.

Cet écoindex global, à défaut d'être absolu, intègre d'autres impacts que l'effet de serre. Généralement, quatre sortes d'impacts (particuliers, partiels) sont considérés :

- L'épuisement des ressources naturelles terrestres. Le minéral de référence (pour équivalence) le plus utilisé est l'antimoine Sb.
- Les changements climatiques (environnement gazeux atmosphérique). On a vu les index GWP et TEWI, pour les gaz à effet de serre (GES), qui se mesurent en kg CO<sub>2</sub> équivalent par kg de gaz émis.
- L'acidification (environnement solide). Une démarche parallèle à celle conduite pour le CO<sub>2</sub> conduit à retenir SO<sub>2</sub> comme référence (kg SO<sub>2</sub> équivalent par kg de substance émise).
- L'eutrophisation (environnement liquide). La pollution de l'eau provient des composés azotés ou NO<sub>x</sub>, et aussi des composés phosphorés ; si PO<sub>4</sub> est retenu comme référence, il vient kg PO<sub>4</sub> équivalent par kg de substance émise.

L'écoindex se présente alors comme une moyenne pondérée (qui reste à préciser) prenant en compte les impacts particuliers principaux : épuisement des ressources naturelles ; équilibre de l'écosystème ; santé humaine.

**Remarque :** il existe dans la littérature plusieurs écoindex.. Le problème reste encore ouvert, semble-t-il.

L'analyse de cycle de vie (ACV) propose une évaluation exhaustive de l'impact d'un système ou d'un procédé tout au long du cycle de vie de l'installation (du berceau à la tombe). Elle considère toutes les émissions produites pendant la fabrication des constituants de l'installation, pendant son fonctionnement, sa maintenance, puis son démantèlement (mise au rebut et recyclage).

On voit alors apparaître un écoprofil, avec une fonction objectif globale multicritère ; l'enjeu et la difficulté sont dans la définition de l'impact environnemental global (IEG). Les tendances actuelles de l'analyse multicritère sont abordées au paragraphe 11.2.6.

**Remarque :** d'autres nuisances essentiellement sensorielles (auditives, olfactives, visuelles) sont prises en compte désormais : auditive (transport dont aviation), olfactive (effluents gazeux chimiques : développement de « nez électroniques »), visuelles (fermes éoliennes).

### 11.2.6 Un exemple d'analyse multicritère

Cet exemple se réfère aussi aux systèmes énergétiques, pour lesquels on recherche une conception et un fonctionnement conduisant à une forte efficacité thermodynamique, un faible impact environnemental, et un coût acceptable. On voit donc que l'obtention d'une solution unique est impossible, vu les oppositions entre les objectifs.

La tendance européenne visant à un développement durable (DD) pousse à définir une écoefficacité qui s'articule autour de trois macrodimensions (thermodynamique, économique, écologique); chaque macrodimension peut comporter plusieurs indices (sous-dimensions): le problème est donc un problème multidimensionnel, avec pour conséquence la nécessité d'une normalisation des dimensions d'une part, et la détermination du poids de chaque dimension d'autre part.

**Remarque :** la macrodimension sociale-humaine peut être ajoutée, mais elle reste difficile à relier aux variables de conception.

On résume ci-après les principales méthodes en développement et on conclut par rapport à l'état de l'art.

#### a) Fonction utilité

Cette méthode multicritère est une méthode de pondération par rapport à chaque utilité  $i$  :

$$u = \sum_i u_i = \sum_i p_i f_i(x) \quad (11.14)$$

$f_i(x)$  est la FO associée à l'utilité  $i$ , de vecteur d'état  $x$

$p_i$  poids de la FO  $i$

**Exemple :**

$$u = \sum_j C_{fj} + \sum_j \sum_k C_{F_{kj}} + \sum_l C_{E_l} - \sum_m R_m$$

$C_{fj}$ , coût d'investissement du composant  $j$  (y compris charge et maintenance)

$C_{F_{kj}}$  coût de fonctionnement de la ressource  $k$  du composant  $j$

$C_{E_l}$  coût environnemental  $l$

$R_m$  revenu du produit  $m$

**Remarque :** la macrodimension économique présente l'avantage de ne faire intervenir qu'une base de valeur. Cela est considéré dans la méthode d'évaluation environnementale intégrée (IEA, *Integrated Environmental Assessment*) ; cette méthode internalise (taxes) les coûts environnementaux externes dans l'évaluation économique (modèle éco-environnemental).

On peut même ajouter la dimension sécurité dans le modèle.

La dimension écologique apportée par  $C_{E_i}$  différencie le modèle correspondant à (11.14) d'un modèle thermoéconomique. Le coût environnemental s'exprime sous la forme :

$$C_{E_i} = f_{Rl} \cdot k_{Rl} \cdot G_{Rl} \quad (11.15)$$

$f_{Rl}$  facteur de pénalisation du rejet l (pollution)

$k_{Rl}$  coût environnemental du rejet l

$G_{Rl}$  mesure de la pollution associée au rejet l

La relation (11.15) montre que la principale difficulté provient de l'évaluation des coefficients : sélection des indices et des poids ; disponibilité d'informations.

### b) Méthode du gradient agrégé

Cette méthode permet l'agrégation d'indice non homogènes sur une base normalisée (linéaire ou pas) ; dans le cas de système énergétique :

$$ACP_j = \left( \sum_i w_{ij} NI_{ij} \right) / \left( \sum_i w_{ij} \right)$$

$ACP_j$ , coefficient agrégé du composant j (ACP : *Agregated Coefficient of Power generation*)

$NI_{ij}$  index normalisé i du composant j

$w_{ij}$  poids de l'indice i du composant j

La normalisation pour chaque composant (ou pour le système) se fait sur la base de la plus grande (normalisée à 1), et de la plus faible (normalisée à - 1) des valeurs de chaque indice i ; l'indice de référence est associé à la valeur 0 ; si la référence est choisie de façon non linéaire (efficacité ; impact environnemental ; coût), cela introduit une dissymétrie (une préférence).

La meilleure solution correspond pour un composant j au maximum de  $ACP_j$ , pour un système au maximum de  $\sum_j ACP_j$ .

### ► Exemples d'indices thermodynamiques

$\eta_p$ , rendement au sens du premier principe

À même combustible, caractérise des systèmes différents par l'intermédiaire de

$T_{MAX}$ , la température maximale

$\eta_m$ , rendement au sens du second principe

À combustible différent, il permet de caractériser un même système.

**Remarque :** autres indices possibles pour un combustible : le PCI (pouvoir calorifique inférieur) ; l'exergie de combustion ; la température adiabatique de combustion  $T_{ad}$ .



Par combinaison, on introduit  $\varepsilon$  un indice qui caractérise un système utilisant un combustible :

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{T_o}{T_{MAX}}\right) \bigg/ \left(1 - \frac{T_o}{T_{ad}}\right) \quad (11.16)$$

**Remarque :**  $\varepsilon$  est le rapport de rendement de Carnot du système, sur le rendement de Carnot du combustible.

➤ Exemples d'indices économiques

- Le coût en capital (investissement) ;
- le temps de retour de l'investissement ;
- le coût du combustible ;
- la durée de vie de l'installation (ACV).

➤ Exemples d'indices écologiques

- Émission de polluants solide, liquide ou gazeux ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{NO}_x$ ,  $\text{SO}_2$ ) ;
- émission thermique ;
- humidité.

➤ Un exemple d'application

Les méthodes multicritères sont utilisées pour l'optimisation des systèmes de conversion avancée de l'énergie ou pour les systèmes utilisant des énergies renouvelables, de même que pour les systèmes standards servant de référence.

On résume ci-après les résultats d'une étude récente (A. Franco), comparant différentes configurations de centrales par la méthode ACP.

La comparaison porte sur cinq configurations de centrales à charbon avec une centrale de référence à cycle combiné à gaz (NGCC).

Les configurations de centrales à charbon avancées sont :

- les centrales ultra super critique (USC) ;
- les centrales à cycle combiné et lit fluidisé pressurisé (PFBC) ;
- les centrales à cycle combiné et gazéification intégrée (IGCC) ;
- les centrales IGCC à capture de  $\text{CO}_2$  ;
- les centrales à charbon pulvérisé (PCC).

Cette dernière catégorie constitue la référence basse des technologies ; la centrale NGCC constitue actuellement la référence haute des savoir-faire. Pour cette étude, la même valeur a été choisie pour tous les points, tant des macrodimensions que des indices.

La figure 11.5 montre comme attendu que la centrale NGCC possède le coefficient ACP le plus élevé (grâce à sa forte efficacité et son faible impact environnemental), mais les réserves de gaz sont moindres que celles de charbon.

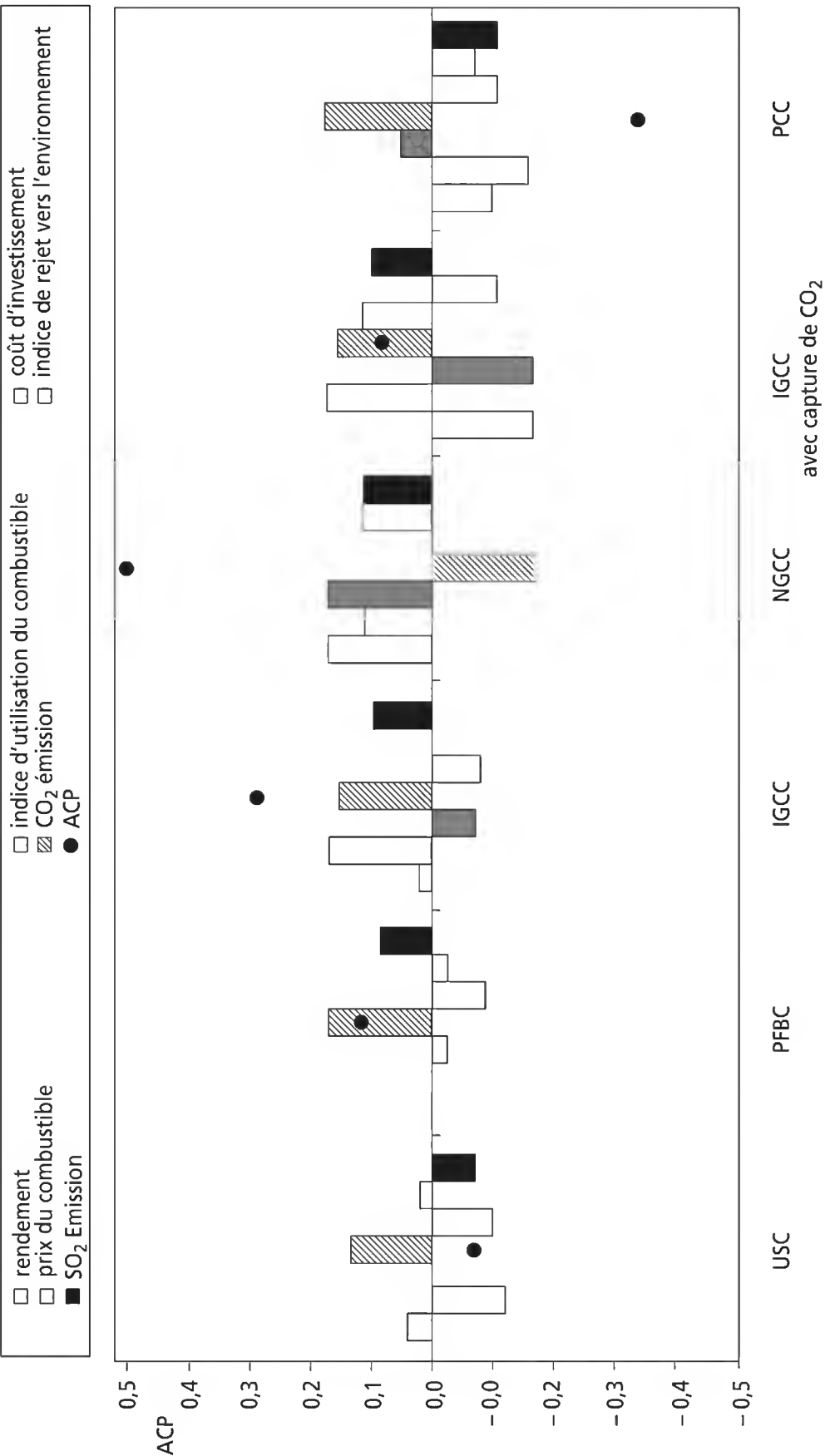


Figure 11.5 Comparaison de différentes technologies avancées de centrales à charbon avec une centrale à gaz à cycle combiné (NGCC, référence).

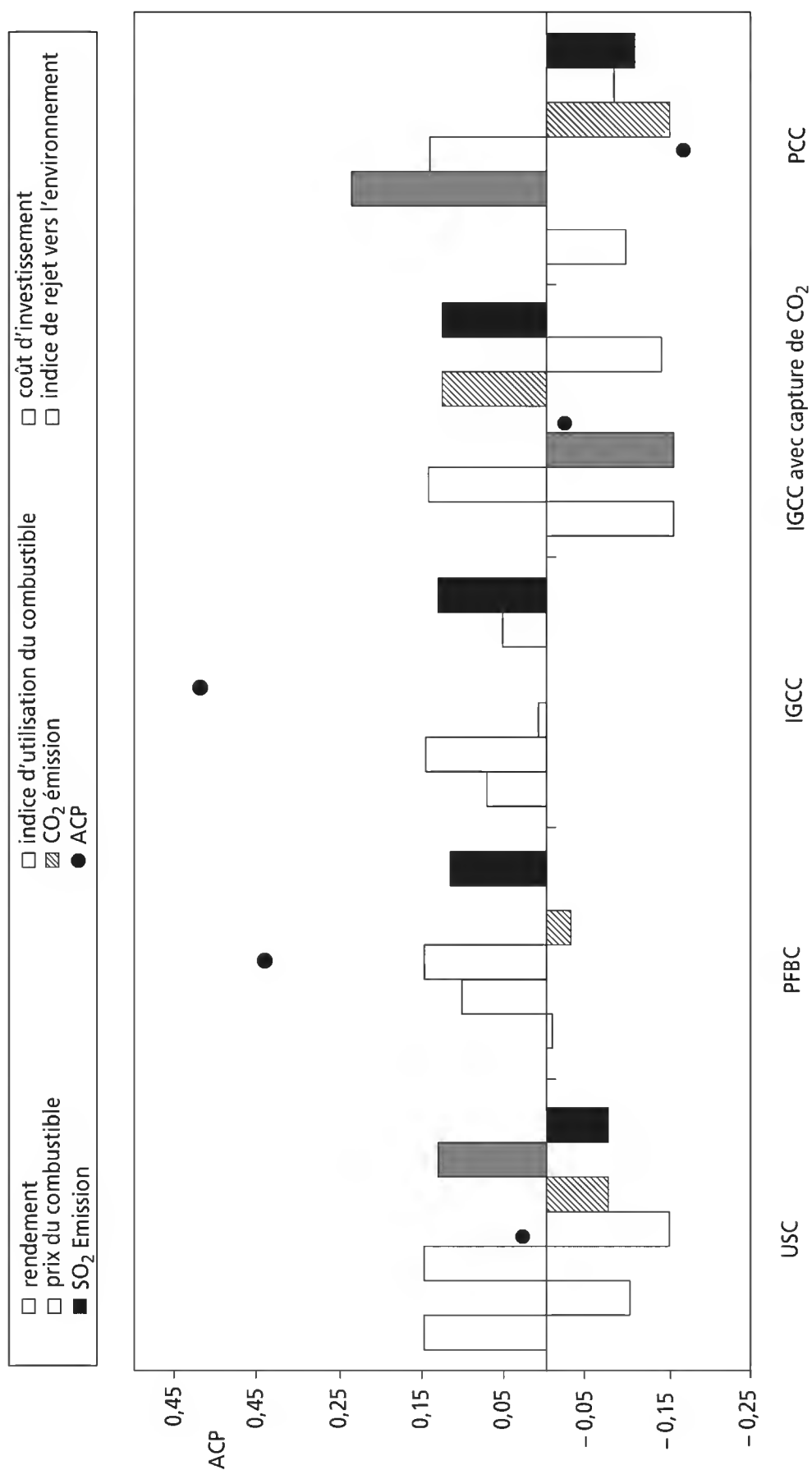


Figure 11.6 Comparaison des différentes technologies avancées de centrales à charbon entre elles.

La figure 11.6 compare uniquement les diverses configurations des centrales à charbon. Les résultats sont plus contrastés montrant les limites de la méthode, et l'intérêt de nouveaux développements, dont la fonction utilité comparée.

### c) Fonction utilité comparée $u_c$

Cette fonction  $u_c$  proposée par A. Franco entend répondre à la notion d'éco-efficacité, associée au DD préconisé en Europe : pour un système, on recherche en effet sur sa durée de vie le maximum de service (énergétique ou à même service énergétique  $W_u$ ), un usage minimum de ressources  $W_D$  et corrélativement un minimum d'impact environnemental (ou écologique).

La fonction utilité préconisée a une base exergétique, unifiant de ce fait la dimension thermodynamique et écologique :

$$U_c = W_u - Ex_p - \gamma W_D \quad (11.17)$$

$Ex_p$ , pertes exergétiques (physiques :  $T, P$ )

$\gamma$ , poids de l'énergie dépensée ; sa dimension peut être économique par rapport à l'énergie utile. Thermodynamiquement,  $\gamma$  est compris entre 0 et  $\eta_c$ , le rendement de Carnot (la valeur moyenne du rendement pour une turbine à combustion est de 0,30 ; pour une configuration à cycle combiné CC 0,50).

Le dernier terme de (11.17) vise à réduire la consommation. Reste à ajouter la composante environnement : soit  $\beta_p$ , le coût environnemental sur base exergétique (la base physique est différente pour chaque émission, comme il a été dit). Le nouveau terme est à retrancher de (11.17).

$$\beta_p = \sum_i e_{xch,i} [c_{ip} - c_{io}] \quad (11.18)$$

$i$ , indice de polluant ( $CO_2$ ,  $NO_x$ ,  $SO_x$ )

$o$ , environnement ( $H_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2O$ )

$c$ , concentration massique

$e_{xch}$ , exergie chimique spécifique massique

$\beta_p$  apparaît comme le coût exergétique associé à l'élimination des polluants, en rétablissant les concentrations de référence.

**Remarque 1 :**  $\beta_p$  diffère de l'exergie du combustible.

**Remarque 2 :** pour le gaz naturel,  $\beta_p \ll Ex_p$  ;  $U_c$  se résume à la relation (11.17) ; pour d'autres combustibles dont le charbon, la prudence est de règle.

### d) Conclusions

L'analyse multicritère apparaît comme la situation courante en optimisation. Deux méthodes ont émergé en ce sens pour les systèmes énergétiques : la méthode ACP avec des indices agrégés, la fonction utilité composée.

Cette dernière permet de préserver l'accès aux variables de conception. Le problème reste toutefois très ouvert et en gestation (choix des indices, poids, adimensionnement, homogénéisation).

Dans le cas d'utilisation de poids, on préconise l'égalité de ceux-ci, tant au niveau macrodimension, qu'au niveau indice ; par ailleurs, une étude de sensibilité à ces poids peut enrichir l'information.

## 11.3 L'OPTIMISATION

Dans tout ce qui suit, on suppose que la formalisation de la fonction objectif FO a été réalisée, suite à la modélisation et à la simulation et qu'il existe un optimum recherché.

### 11.3.1 Niveau d'optimisation

#### a) Niveau scientifique

Le plus souvent, il s'agit d'optimisation statique (voire dynamique), visant à optimiser un critère ou un objectif donné. Par exemple : minimum de création d'entropie dans une transformation thermodynamique ; minimum de temps de parcours entre un état initial et un état final (problème du brachistochrone).

Dans le développement qui suit, on considérera essentiellement des optimisations statiques.

**Remarque 1 :** un problème de commande optimale formulé de façon dynamique peut être résolu (éventuellement) après discrétisation par des méthodes statiques.

**Remarque 2 :** la sensibilité de l'optimum à des paramètres physiques est une recherche courante en pratique.

#### b) Niveau technique et technologique

##### ➤ Optimisation de conception

Il s'agit d'optimisation de performances ou de conception. Exemple : dans l'optimisation énergétique d'un séchoir, on vise à l'adiabatisation de celui-ci (isolation), et à la minimisation de la consommation énergétique par choix du procédé de chauffage (direct, recyclage d'air, pompe à chaleur...).

Cette optimisation est statique.

##### ➤ Optimisation dynamique

Il s'agit alors de gestion et de commande dans le temps du système. Ce même niveau se subdivise en sous-niveaux :

- contrôle-commande de régimes transitoires ou glissants : la commande directe suppose l'acquisition de données (variables d'états et variables de commande)

avec mise en œuvre de certaines stratégies entre le début et la fin du « cycle » considéré ;

- diagnostic de pannes et procédures d'urgence, avec critères particuliers et adaptation d'un modèle.

### c) Niveau économique

Ce niveau suppose le plus souvent une optimisation de type statique par rapport à une fonction objectif de type coût à minimiser. Des exemples seront fournis en partie 3 et voir chapitre 9.

**Remarque :** Le prix des énergies étant très fluctuant, il peut y avoir lieu de faire un suivi adaptatif, pour gérer au mieux des tarifs, les consommations dans le temps.

### d) Optimisation globale

Cette optimisation rejoint le paragraphe précédent 11.2, mais il introduit aussi la notion de système expert qui se développe lentement depuis environ dix ans (Sciubba E.) et qui vise à la gestion optimale de la connaissance (qui reste finie), en s'appuyant sur le savoir-faire de l'opérateur (en fonctionnement discontinu tout particulièrement) : la base de données s'enrichit au fur et à mesure des expériences, la technique de commande cumule alors connaissances théoriques et empiriques (apprentissage).

Les systèmes experts représentés schématiquement sur la figure 11.7 sont particulièrement utiles en maintenance et diagnostic d'alarmes et de pannes (sécurité) : par exemple, télédiagnostic (dépannage en ligne), même si certains diagnostics restent difficiles (acoustique...).

Les objectifs recherchés sont souvent le minimum de temps d'arrêt, et (ou) l'augmentation de productivité.

### e) Conclusion

Commande et optimisation sont donc intimement liées ; la première suppose un point de fonctionnement optimal (optimisation dynamique), alors que l'optimisation de conception (optimisation statique) recherche plus une configuration optimale de système. Ces deux points sont développés ci-après, mais plus particulièrement l'optimisation statique.

## 11.3.2 Optimisation statique

### a) Typologie des problèmes d'optimisation

#### ➤ Optimum local ou global

On remarquera tout d'abord que disposant d'une fonction objectif FO, il revient au même de maximiser FO que de minimiser ( $-FO$ ) sur le même espace  $\{x\}$  :

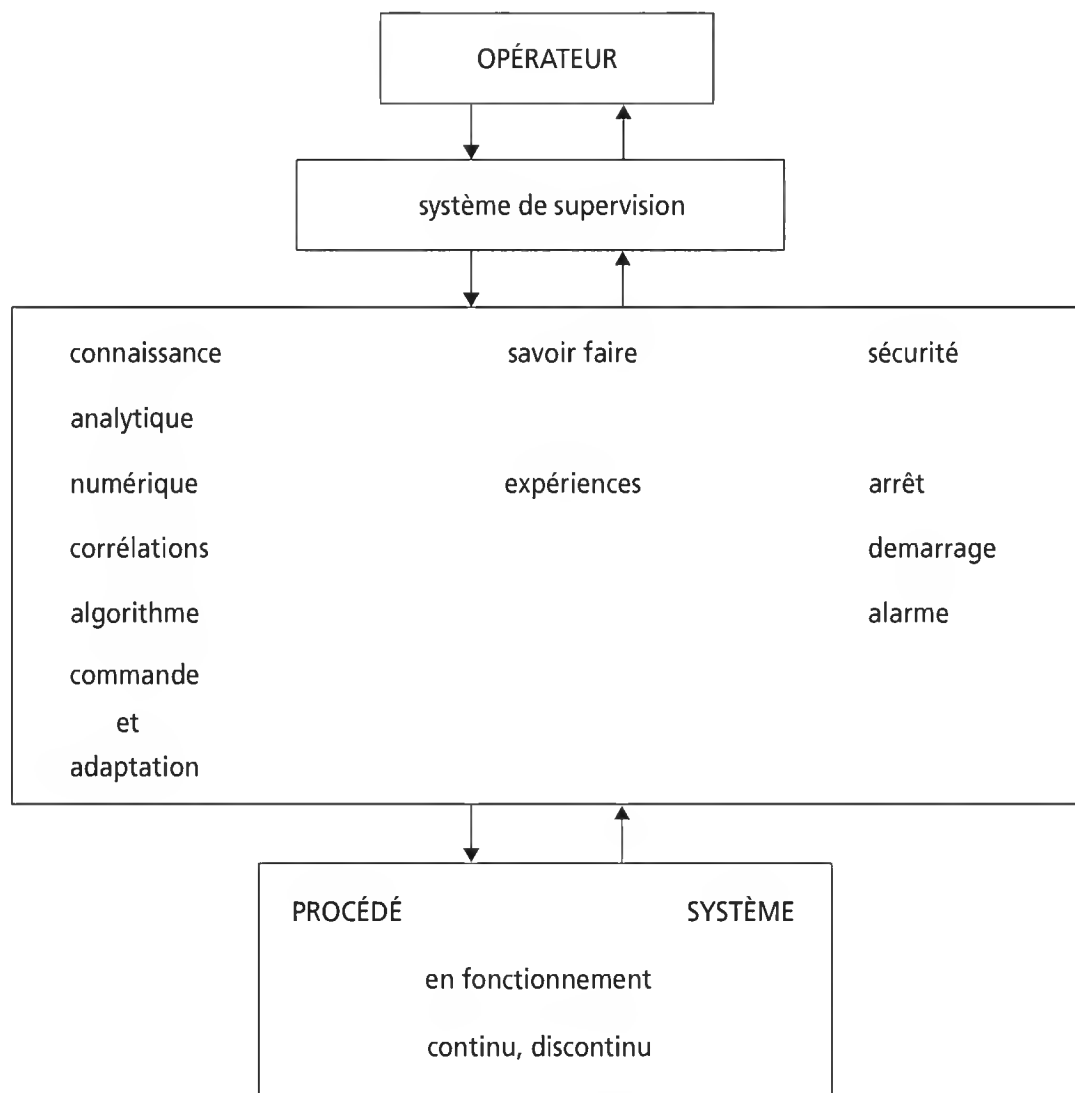


Figure 11.7 Représentation schématique de l'architecture d'un système expert.

$$\left| \text{MAX}(FO) \right| = \left| \text{min-}(FO) \right|$$

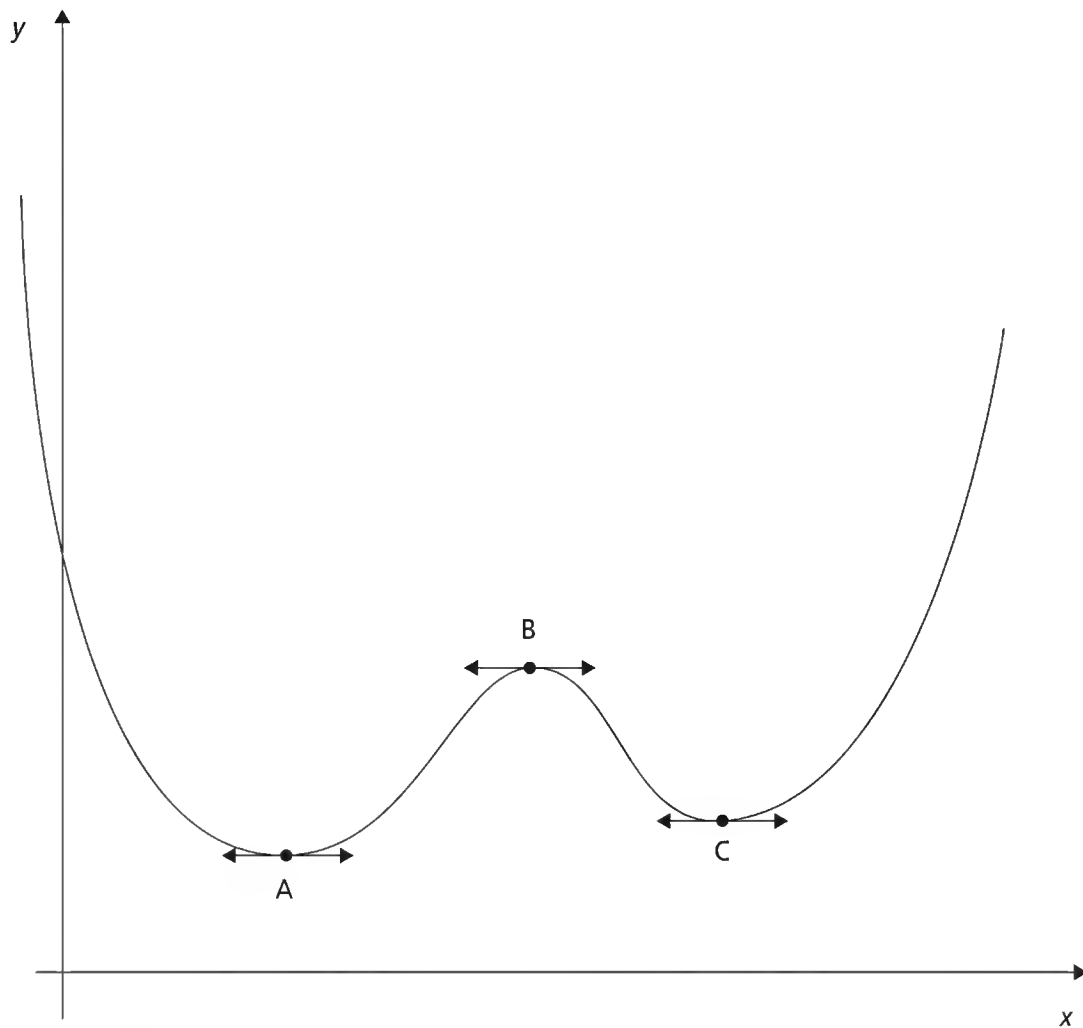
Il y a tout de même lieu de remarquer que selon la forme de la fonction, on peut définir deux types d'extremum :

- un extremum local qui n'est vrai que sur un voisinage  $V(x)$  donné.

**Exemple :** Sur la figure 11.8, B est un maximum local, C est un minimum local.

- un extremum global : cet extremum absolu est vrai sur tout l'intervalle de définition de la fonction.

**Exemple :** Sur la figure 11.8, le point A est un minimum absolu pour la fonction.



**Figure 11.8** Fonction à une variable  $y = f(x)$  présentant divers optimums.

Unimodalité : le cas le plus simple, auquel on se référera dans la suite, est celui d'une fonction, ne comportant qu'un seul extremum sur l'intervalle d'étude considéré.

#### ► Nature de la FO

Généralement, on suppose mathématiquement des fonctions continues différentiables du vecteur des variables  $\{x\}$  sur un intervalle ouvert. Il existe de nombreuses formes particulières pour la FO dont voici deux exemples :

- la forme quadratique (qui peut conduire à la programmation quadratique) (Feidt M.) ;
- la forme linéaire (qui peut conduire à la programmation linéaire (Feidt M.).

D'autres exemples montrent que le problème peut ne pas être aussi évident, même pour une fonction à une seule variable.



**Exemples**

$$f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$$

Il existe un minimum absolu en  $x = 0$ , où la dérivée de la fonction n'existe pas.

$$f(x) = x \text{ sur } [1, 2]$$

Le minimum se produit en  $x = 1$ .

**► Nature des variables**

Les variables de décision recensées dans le vecteur  $\{x\}$  seront le plus souvent des variables continues appartenant mathématiquement à  $\mathbb{R}^n$  ( $n$ , dimension du vecteur  $x$ ).

Toutefois, l'espace physiquement acceptable sera généralement beaucoup plus restreint, de même que l'intervalle de définition de la fonction mathématique  $D$  (par exemple du fait des contraintes).

Un certain nombre de problèmes feront aussi apparaître des variables discrètes.

**Exemple :** nombre d'étages de compression ou de détente, nombre de réacteurs ou d'échangeurs.

**Remarque :** certains problèmes feront même apparaître la recherche d'une fonction d'état optimale : profil de température dans l'espace et (ou) le temps (calcul des variations, programmation dynamique, principe du maximum sont des méthodes aboutissant à une trajectoire optimale dans l'espace des variables d'état).

**► Existence de contraintes**

L'optimisation sous contraintes revêt deux formes (voir paragraphe 11.1.3.b).

Les contraintes égalités réduisent le nombre de degrés de liberté du problème.

Les contraintes inégalités réduisent l'espace acceptable pour le vecteur d'état à l'optimum.

**Remarque :** En appelant  $x^*$  le vecteur d'état à l'optimum, on notera que certaines contraintes seront saturées (donc actives) à l'optimum :  $\phi(x^*) = 0$ . D'autres ne le seront pas ; elles peuvent alors être ignorées.

**► Les méthodes d'optimisation**

On distinguera trois grandes classes de méthodes.

*Les méthodes analytiques* ont pour origine la notion de dérivée ; elles se sont développées sous des formes plus abouties, le calcul des variations.

Des formes particulières existent, dont les programmations linéaires et géométriques (déjà citées) pour des formes particulières de fonctions continues, mais aussi discontinues (présence de variables de commande) : principe du maximum de Pontriaguine (Pontriaguine *et al.*).

Ces méthodes, vu leur importance générique et pratique, vont particulièrement être développées aux paragraphes 11.3.2.2 et 11.3.2.3.

*Les méthodes numériques* : en tout état de cause, la complexité des problèmes traités conduit à l'usage du calcul numérique, mais cet usage doit être repoussé au plus loin possible pour des raisons d'efficacité et d'analyse, et de coût en temps de calcul.

Les méthodes numériques de base sont les méthodes de recherche ; elles examinent en des points discrets la fonction objectif généralement multivariable. Elles sont bien adaptées lorsque les composants sont connus de façon discrète.

La programmation dynamique (Bellman R.E) ou optimisation dynamique procède par une série de processus discrets, et détermine une trajectoire optimale sous forme d'une fonction reliant des valeurs de variables d'état du système optimisé. Cette méthode relève des méthodes discrètes, mais évoluées.

*Les méthodes hybrides* sont très nombreuses. Elles supposent un minimum d'informations préalables sur les fonctions optimisées pour être utilisées valablement. En utilisant des particularités du problème traité, elles permettent généralement d'accélérer la convergence des calculs vers la solution.

Les nombreuses variantes existantes sortent du cadre de cet ouvrage ; seuls quelques exemples seront offerts pour montrer l'intérêt de la démarche.

Par contre, des approches récentes d'optimisation par de nouvelles méthodes seront abordées, vu leur potentiel de développement : les réseaux neuronaux, les algorithmes génétiques.

## b) L'essentiel des méthodes analytiques

### ► Minimum local sans contrainte d'une fonction développable

La fonction objectif  $y = f(x)$  est une fonction d'un vecteur variable d'état  $\{x\}$  telle que :

$$\left\{ f_{,x}^T \right\} \cdot \left\{ \delta x \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \delta x \right\}^T \cdot \left\| f_{,xx}^{(x^*)} \right\| \cdot \left\{ \delta x \right\} > 0 \quad \forall \delta x, x^* + \delta x \in V(x^*)$$

Le minimum local en  $\{x^*\}$  est associé aux conditions :

Condition nécessaire CN :

$$\left\{ f_{,x}^{(x^*)} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (11.19)$$

Condition suffisante CS :

$$\left| f_{,xx}^{(x^*)} \right| > 0 \quad (11.20)$$

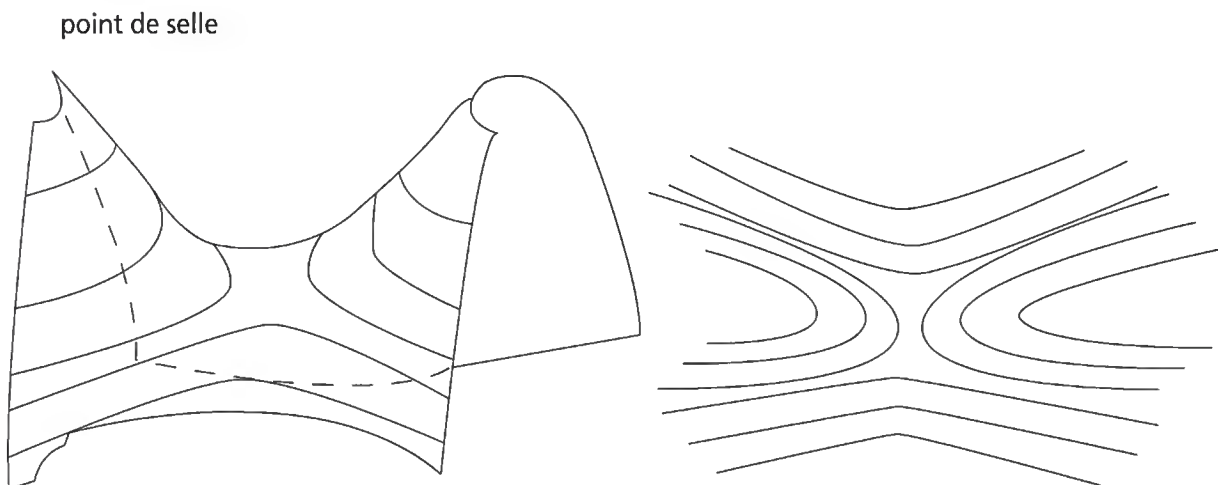
Cette dernière condition correspond à un minimum local strict.

**Remarque 1** : on indique la notation  $f_{,x} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$  ; de même  $f_{,xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ .

**Remarque 2 :** on rappelle que pour une fonction à une seule variable, on retrouve le résultat simple : CN,  $y'(x) = 0$  ; CS  $y''(x) > 0$ .  $y(x)$  fonction convexe par opposition à concave :  $y''(x) < 0$ ).

**Remarque 3 :** la matrice des dérivées partielles secondes  $\|f_{,xx}\|$  est aussi appelée Hessian du problème. La recherche des conditions suffisantes est généralement difficile lorsque le nombre de variables est supérieur à trois ; aussi, on préfère tester l'optimum numériquement dans son voisinage pour caractériser sa nature.

**Remarque 4 :** on prendra garde à l'existence de points selles, qui ne correspondent ni à un minimum, ni à un maximum (figure 11.9) ; ce point est aussi appelé point stationnaire. Un autre cas peut être gênant, en particulier numériquement, il s'agit de ce qu'on appelle une gouttière : dans ce cas, le minimum varie très lentement selon une direction.



**Figure 11.9** Représentations 3D ( $y = f(x_1, x_2)$ ) et 2D (lignes isovaleurs de  $y$ ) d'un point selle.

### ➤ Minimum local avec contraintes égalités

En optimisation sous contrainte, la recherche d'un minimum absolu impose que le domaine de recherche  $D$  soit convexe, comme la fonction objectif ; le domaine de recherche est convexe si toutes les contraintes sont elles-mêmes convexes (CNS). La figure 11.10 est une représentation 2D d'un domaine convexe (a) puis non convexe (b).

**Remarque :**  $C$  appartient à un domaine  $D$  convexe si  $\forall A$  et  $B$ , deux points appartenant à  $D$ ,  $C = \varepsilon.a + (1 - \varepsilon)b \in D$ .

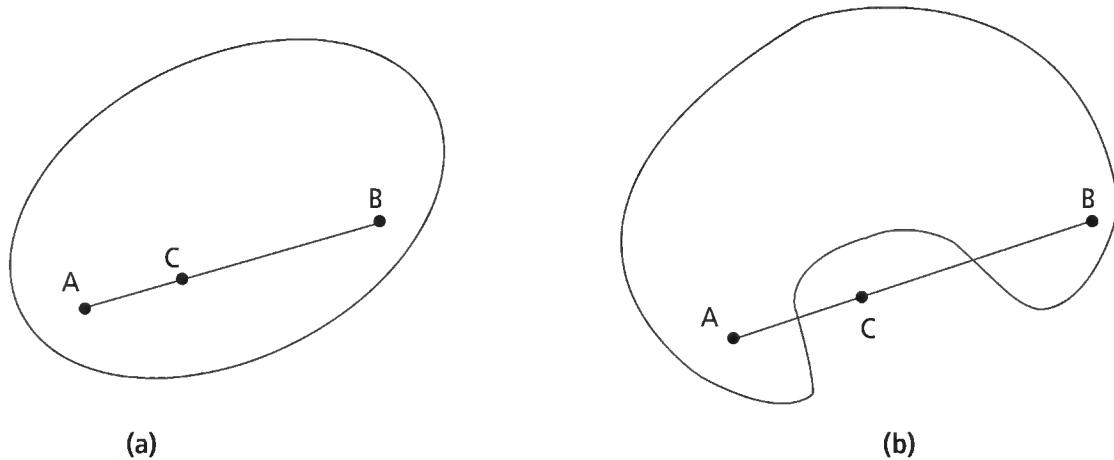


Figure 11.10 Représentation 2D d'un domaine convexe puis non convexe.

On aboutit alors à la méthode des multiplicateurs de Lagrange, qui peut être formalisée comme suit : la fonction objectif  $y$  admet un minimum local en  $\{x^*\}, \{x\} \in D$  tel que :

$$\text{CN : } f_{,x}(x^*) + \lambda_j \cdot \phi_{j,x}(x^*) = 0 ; \phi_j(x^*) = 0 \forall j \quad (11.21)$$

$$\text{CS de min local strict : } |f_{,xx}(x^*)| > 0 \text{ dans } E^* \quad (11.22)$$

Les  $\lambda_j$  sont les multiplicateurs de Lagrange du problème (autant de paramètres que de contraintes égalités).

$E^*$  est un sous-espace orthogonal au sous-espace défini par les vecteurs  $\Phi_{j,x}(x^*)$ .

**Remarque :** il serait possible de visualiser géométriquement les multiplicateurs de Lagrange, ainsi que de développer leur signification en termes de coefficient de sensibilité ; cela ne sera pas fait ici par souci de concision. Le lecteur est renvoyé vers la littérature sur ce point.

### ► Minimum local avec contraintes inégalités

Le raisonnement est une extension de l'approche précédente, en ce sens que les contraintes inégalités  $\phi_j(x) < 0$  (au sens strict),  $\phi_j(x) \leq 0$  (au sens large) sont activées ou non activées selon la position du vecteur d'état  $\{x\}$  (respectivement espace interdit, ou espace acceptable).

En appelant  $k$ , l'indice des contraintes activées (dont la variation est nécessairement inférieure ou égale au nombre total de contraintes inégalités), on définit donc un lagrangien augmenté comme suit : la fonction objectif  $y$  admet un minimum local en  $\{x^*\}, \{x\} \in D$  tel que :

$$L = FO + \lambda_j \phi_j + \mu_k \varphi_k \quad (11.23)$$

$\lambda_j, \mu_k$ , paramètres de Lagrange

avec CN (ou condition de Kuhn et Tucker) :

$$L_{,x}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

$$L_{,\lambda}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

$$L_{,\mu}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$

avec CS de minimum local strict :

$$L_{,xx}(x^*, \lambda^*, \mu^*) > 0 \text{ sur } D'$$

**Remarque :** les contraintes inégalités non actives à l'optimum peuvent être ignorées.

### Méthode des fonctions de pénalisation

Ayant une fonction objectif  $y(x)$  précisée et soumise à des contraintes inégalités, une méthode simple *a priori* consiste à définir une fonction objectif modifié  $FO_m$  telle que :

$$y_m(x) = y(x) + P(x) \quad (11.24)$$

$P(x)$  est une fonction de pénalisation à définir telle que  $P(x) = 0 \forall \{x\} \in D'$ .

Le choix de  $P(x)$  est plus problématique pour l'espace interdit, d'où l'insuffisance de cette méthode.

**Exemples :** Pour une minimisation :

- $P(x) = P_0$ , constante positive sur tout l'espace interdit (introduit une discontinuité de la FO).
- $P(x) = r(x)$ ,  $r(x)$  résidu (positif ou négatif) de l'écart entre la frontière du domaine permis et le point courant. Le cas le plus simple pour une contrainte inégalité  $\varphi_k(x) < 0$  est :

$$P_k = \delta_k [\varphi_k(x)]^2$$

avec :

$$\delta_k = 1 \text{ si } \varphi_k(x) \geq 0$$

$$\delta_k = 0 \text{ si } \varphi_k(x) < 0$$

La figure 11.11 représente un cas de minimisation avec une seule variable est une contrainte  $x < x_0$ . On voit que l'optimum avec pénalisation est à l'intérieur de  $D'$ , et que si le facteur de pénalisation  $\alpha$  (poids) augmente, l'optimum se rapproche de la frontière.

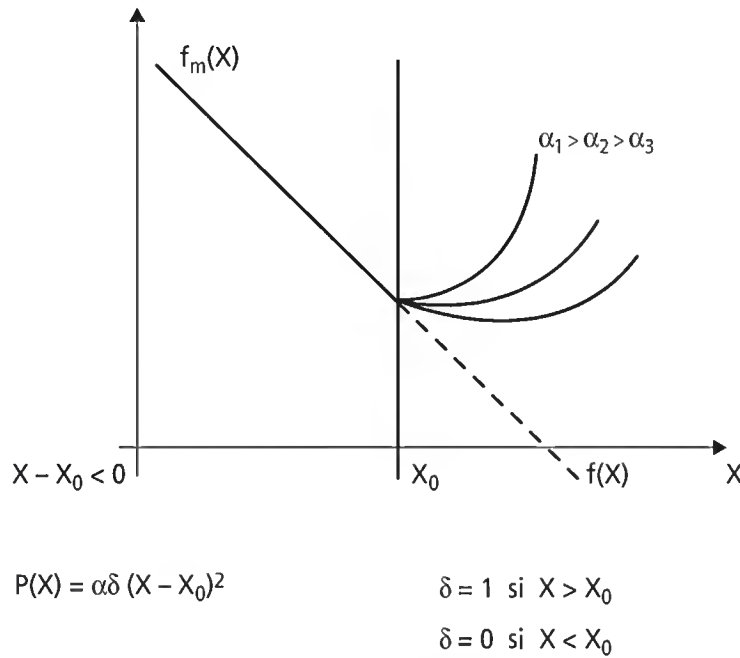


Figure 11.11 Minimisation monovariante avec une contrainte  $x \leq x_0$

**Remarque :** l'usage de facteur de pénalisation est commode en mode numérique interactif, où il est facile d'agir sur les valeurs pour satisfaire au plus près les contraintes. Toutefois, il est à remarquer que l'identité avec le problème contraint ne se produit que si  $\alpha \rightarrow \infty$  ; le problème numérique devient alors difficile à résoudre, car mal conditionné.

#### ► Quelques extensions du calcul variationnel

Aux résultats standard précédents, il y a lieu d'ajouter quelques prolongements très utiles dans l'étude énergétique des systèmes et procédés en vue de leur optimisation. Des exemples d'utilisation en sont fournis pour illustration dans la troisième partie de l'ouvrage. Aucune justification mathématique n'est faite, seuls les résultats sont indiqués.

#### Équation d'Euler

Le problème est de trouver parmi toutes les fonctions possédant certaines propriétés celle pour laquelle une intégrale prend sa valeur maximale ou minimale :

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

La fonction  $y(x)$  recherchée satisfait alors à l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

*Équation d'Euler modifiée*

Si de plus la fonction  $y(x)$  doit satisfaire la contrainte suivante :

$$C = \int_a^b G(x, y, y') dx$$

alors  $y(x, \lambda)$  est fournie par l'équation d'Euler modifiée :

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0$$

avec :  $H(x, y, y', \lambda) = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')$ , hamiltonien du problème.

**Remarque :**  $\lambda$  est un paramètre de Lagrange du problème ; il peut être obtenu en reportant  $y(x, \lambda)$ , fonction solution dans la contrainte  $C$ .

*Équation d'Euler-Poisson*

Cette extension de la méthode apparaît lorsque l'intégrale  $I$  dépend des  $n$  premières dérivées de  $y(x)$  :

$$I = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^n) dx$$

$y(x)$  satisfait alors à l'équation d'Euler-Poisson :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\partial F}{\partial y^n} \right) = 0$$

**Remarque :** si l'intégrale  $I$  dépend de  $k$  fonctions inconnues  $y_i(x)$  :

$$I = \int F(x, y_1, \dots, y_k, y_1', \dots, y_k') dx$$

alors le vecteur fonction  $\{y_i(x)\}$  satisfait à :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} \right\} - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i'} \right\} = \{0\}$$

*Intégrales à limites variables*

Soit une fonction objectif  $y(x)$ , qui s'exprime sous forme d'une intégrale dont les bornes dépendent de la variable d'état  $x$  sous la forme :

$$y(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t) dt$$



En admettant qu'il existe une dérivée partielle continue de  $x$  et de  $t \frac{\partial K}{\partial x}$ , on peut montrer que l'optimum de la fonction  $y(x)$ , par rapport à  $x$ , satisfait à la CN suivante :

$$y'(x) = b'(x).K[x, b(x)] - a'(x)K[x, a(x)] + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) dt \quad (11.25)$$

**Remarque :** ce résultat est obtenu par application de la règle de dérivation sous le signe somme, par la règle de dérivation des fonctions composées, par la règle de dérivation d'une intégrale fonction de la limite supérieure (ou inférieure).

► Une autre méthode essentielle : le principe du maximum

Le principe du maximum de Pontriaguine (Pontriaguine L. *et al.*) a une importance particulière dans le domaine analytique, puisque cette méthode permet l'intégration de systèmes différentiels à seconds membres discontinus ; cela est très important dans le domaine contrôle-commande, avec des applications à l'optimisation de trajectoire, mais aussi et plus récemment dans l'étude des systèmes énergétiques.

Le présent paragraphe donne les notions essentielles à l'utilisation de la méthode ; le détail et la justification sont dans la référence citée (Pontriaguine L. *et al.*). Un exemple à suivre illustre la méthode.

Notion de commande admissible : l'état de l'objet (système ou procédé) est fourni par le vecteur  $\{x\}$  de dimension  $n$  des variables d'état. L'évolution de l'objet est suivie par les variations du vecteur  $\{x\}$ , avec  $t$ , variable temps indépendante.

Le mouvement de l'objet dans l'espace des phases  $\left\{x; \overset{o}{x}\right\}$  est un mouvement *commandé* ou *contrôlé* par une commande  $\{u\}$  de dimension  $r$  ; les  $u_j$  sont les *variables de commandes*.

**Exemples :** position du papillon d'admission pour un moteur thermique ; gouvernail pour un navire.

**Remarque :** le domaine de commande  $U$  est souvent un domaine fermé fini de l'espace physique (quantité de combustibles, débattement de pièces mécaniques, tensions électriques...).

Le système ou procédé est étudié sur un intervalle de temps fini :  $t \in [t_i, t_f]$  ; la commande est un certain vecteur  $\{u(t)\}$ . L'hypothèse courante, qui sera utilisée ci-après, est d'une commande sans inertie.

Les commandes sont alors des fonctions quelconques discontinues par morceaux, à valeurs dans  $U$  ;  $\{u(t)\}$  peut subir des discontinuités de première espèce en un certain nombre de points  $\tau$  tels que :



$$\begin{aligned}
u_j(\tau - 0) &= \lim_{t \rightarrow \tau^-} u(t) ; u_j(\tau + 0) = \lim_{t \rightarrow \tau^+} u(t) \\
t &\rightarrow \tau^- & t &\rightarrow \tau^+ \\
t &< \tau & t &> \tau
\end{aligned} \tag{11.26}$$

et :  $u_j(\tau) = u_j(\tau - 0)$  en  $t = \tau$

Il en résulte la *commande admissible* :

Toute fonction continue par morceau  $u_j(t)$  dans  $[ti, tf]$ , à valeurs dans le domaine de commande  $U$ , satisfaisant à (11.26) aux points de discontinuités, et continue aux extrémités de l'intervalle de définition.

### Énoncé du problème fondamental

Système autonome régissant l'évolution de l'objet : l'évolution de l'objet sous l'action de la commande est régie par le système différentiel du premier ordre vectoriel suivant :

$$\left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = \{ f(x, u) \} \tag{11.27}$$

Le vecteur  $\{f\}$  est défini continu dérivable sur  $X$ , l'espace de  $\{x\}$ .

**Remarque :** le système d'équations défini par (11.27) est dit autonome si  $\{f(x, u)\}$  est un vecteur fonction non explicite de  $t$ .

Si  $\{u(t)\}$  est une commande admissible donnée, alors (11.27) correspond de façon biunivoque à un vecteur  $\{x(t)\}$  qui représente la trajectoire du mouvement sur l'intervalle de temps  $[ti, tf]$ , et ce quelle que soit la condition initiale  $\{x(ti)\} = \{x_0\}$ .

**Remarque :** s'il y a des discontinuités de première espèce, en des points  $t_k, t_k \in [ti, tf]$ , on trouvera la loi du mouvement permettant le passage successif de  $\{x(ti)\}$  vers  $\{x(t_1)\}$ , puis  $\{x(t_2)\}, \dots, \{x(t_k)\}, \dots, \{x(t_f)\}$  ;  $\{x(t)\}$  est le vecteur solution de (11.27), associé à la commande optimale  $\{u(t)\}$ , qui transfère l'objet de la condition initiale  $\{x_i\} = \{x(ti)\}$  à  $\{x_f\} = \{x(tf)\}$  avec  $\{u(t)\}, t \in [ti, tf]$ .

Soit  $f_o(x, u)$ , une nouvelle fonction définie, continue et ayant des dérivées partielles sur l'espace  $XUU$ . Etant donnés dans l'espace  $X$  deux points  $\{x_i\}$  et  $\{x_f\}$ , on cherche parmi les commandes admissibles  $\{u(t)\}$ , transférant l'objet de l'état initial à l'état final, celle (si elle existe) qui minimise la fonctionnelle :

$$J = \int_{ti}^{tf} f_o(x(t), u(t)) dt \quad (11.28)$$

$\{x(t)\}$  étant solution de (11.27) associée à  $\{u(t)\}$ , avec

$$\{x_i\} = \{x(t_i)\}, \{x_f\} = \{x(t_f)\}.$$

**Remarque 1 :**  $\{u(t)\}$  est appelée *commande optimale* ;  $\{x(t)\}$  répondant au problème fondamental est appelée *trajectoire optimale* ; c'est le résultat de l'optimisation.

**Remarque 2 :** Si  $f_o(x, u) = 1$ , il vient :  $J = (tf - ti)$  ; le problème fondamental consiste en une minimisation du temps de transfert entre  $\{x_i\}$  et  $\{x_f\}$  ; le problème est un problème de commande en temps optimal.

**Remarque 3 :** quelques propriétés des commandes :

Pour des systèmes autonomes, une translation des commandes ne modifie pas leurs propriétés.

Union des commandes : soit un ensemble fini de  $k$  points de l'espace  $X$ ,  $\{x_i\}$ , tels que le passage de  $\{x_{i-1}\}$  à  $\{x_i\}$  se fait avec l'optimum  $J_i$ , associé à  $\{u_i(t)\}$ , alors il vient  $\{u(t)\}$  tel que le passage de  $\{x_i\}$  à  $\{x_f\}$  se fait par union des commandes successives, avec l'optimum :

$$J = \sum_{i=1}^{i=k} J_i$$

Toute proportion de trajectoire optimale est également trajectoire optimale.

### Principe du maximum

On considère (11.27) et le système d'équations auxiliaires, par rapport aux variables supplémentaires  $\psi_i$  telles que :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{\alpha=0}^m \frac{\partial f_{\alpha}(x, u)}{\partial x_i} \cdot \psi_{\alpha} \quad (11.29)$$

Si on choisit une commande admissible  $\{u(t)\}$  correspondant au vecteur d'état  $\{x(t)\}$ , avec  $\{x(t_i)\} = \{x_i\}$ , (11.27) est linéaire homogène en  $\psi_i \forall$  les conditions initiales ; il en résulte qu'un vecteur  $\{\psi_{\alpha}\}$  unique est associé à la commande  $\{u(t)\}$  et à la trajectoire  $\{x(t)\}$  sur  $[ti, tf]$ .

Les  $\psi_{\alpha}(t)$  sont des fonctions continues, à dérivées partout continues en  $t$ , sauf en un nombre fini de points qui sont les discontinuités en  $\{u(t)\}$ .

Le regroupement des systèmes différentiels (11.27) et (11.29) en un seul système débouche sur la définition d'un hamiltonien  $H(x_1, \dots, x_n, \psi_o, \psi_n, u_1, \dots, u_r)$  :

$$H(\Psi, x, u) = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} \cdot f_{\alpha}(x, u) \quad (11.30)$$

Il en résulte :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} \quad (11.31)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (11.32)$$

Le choix arbitraire d'une commande admissible  $\{u(t)\}$ , et de la condition initiale  $\{x_i\}$ , conduit à la trajectoire correspondante  $\{x(t)\}$  satisfaisant à (11.31), puis de  $\{\psi(t)\}$  correspondant à  $\{u(t)\}$  et  $\{x(t)\}$  par (11.32).

**Remarque :** pour des valeurs constantes de  $\{\psi\}$  et de  $\{x\}$ ,  $H$  est fonction du seul vecteur paramètre  $\{u\}$ .

**Théorème 1.** Soit  $\{u(t)\}$  une commande admissible telle que la trajectoire correspondante  $\{x(t)\}$  résultant de (11.31), à partir du point  $\{x_i\}$  à  $t_i$ , passe par le point  $\{x_f\}$  à  $t_f$ .

Pour que la commande  $\{u(t)\}$  soit optimale, ainsi que la trajectoire  $\{x(t)\}$ , il est nécessaire qu'il existe un vecteur  $\{\psi(t)\}$  continu et non nul correspondant à  $\{x(t)\}$  et  $\{u(t)\}$  tel que :

1.  $\forall t \in [t_i, t_f]$ , la fonction  $H(\psi(t), x(t), u(t))$  des variables  $\{u(t)\}$  atteint au point  $\{u\}$  son maximum :

$$M(\psi(t), x(t)) = \left\{ u \right\} \in U \left[ H(\psi(t), x(t), u(t)) \right] \quad (11.33)$$

2. À  $t_f$  soient vérifiées les relations :

$$\psi_o(t_f) \leq 0 ; M(\Psi(t_f), x(t_f)) = 0$$

Conséquence : condition nécessaire pour la commande en temps optimal.

Sachant que  $f_o(x, u) = 1$ , il vient :

$$H = \psi_o + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \psi_{\alpha} \cdot f_{\alpha}(x, u)$$

En posant  $H'(\psi, x, u) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \psi_{\alpha} \cdot f_{\alpha}(x, u)$ , (11.31) et (11.32) deviennent :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial \psi_i} \quad (11.34)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial x_i} \quad (11.35)$$

À  $\psi$  et  $x$  fixés  $\{u\} \in U[\psi, x, u] = M'(\psi, x)$ , d'où :

$$M'(\psi, x) = M(\psi, x) - \psi_o$$

Les conditions 1 et 2 du théorème 1 conduisent alors à :

$$H'(\psi(t), x(t), u(t)) = M'(\psi(t), x(t)) = -\psi_o \geq 0$$

**Théorème 2.** Soit  $\{u(t)\}$  une commande admissible telle que la trajectoire correspondante  $\{x(t)\}$  résultant de (11.31), à partir du point  $\{x_i\}$  à  $t_i$ , passe par le point  $\{x_f\}$  à  $t_f$ .

Pour que la commande  $\{u(t)\}$  et la trajectoire  $x(t)$  soient optimales (au sens du temps optimal), il est nécessaire qu'il existe un vecteur  $\{\psi(t)\}$  continu normal, correspondant à  $\{x(t)\}$  et  $\{u(t)\}$  tel que :

1.  $\forall t \in [t_i, t_f]$ , la fonction  $H'(\psi(t), x(t), u(t))$  des variables  $\{u(t)\}$  atteigne au point  $\{u\}$  son maximum :

$$M'(\psi(t), x(t)) = \{u\} \in U[\psi(t), x(t), u(t)] \quad (11.36)$$

2. À  $t_f$  soit vérifiée la relation :

$$M'(\psi(t_f), x(t_f)) \geq 0$$

**Remarque :** si par ailleurs  $\psi(t), x(t), u(t)$  satisfont au système différentiel (11.34) et (11.35), ainsi qu'à la condition 1 ci-dessus, alors  $M'$  est constant de sorte que la condition 2 ci-dessus se vérifie  $\forall t \in [t_i, t_f]$ .

► Un exemple de contrôle optimal

L'exemple porte sur un contrôle optimal d'accélération-freinage : il s'agit d'une course automobile départ-arrêté, avec distance à parcourir en un temps minimum, avec arrêt sur la ligne d'arrivée.

Hypothèse : Pas de limitation en puissance du véhicule

Modélisation : Analyse des efforts (dynamique)

Action du sol sur les roues (représentation 2D)

$$\text{Roues avant : } \overrightarrow{F_{AV}} = \{2X_{AV}, 0, 2Z_{AV}\}$$

$$\text{Roues arrières : } \overrightarrow{F_{AR}} = \{2X_{AR}, 0, 2Z_{AR}\}$$

$X_{AV}, X_{AR}$  : composantes d'accélération ou de freinage du pilote.

Le premier théorème fondamental de la dynamique s'écrit :

$$M \ddot{x} = 2(X_{AV} + X_{AR}) \text{ avec } \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{Soit : } \ddot{x} = \frac{2}{M}(X_{AV} + X_{AR}) = u(t), \text{ loi d'évolution}$$

$M$ , masse du véhicule

$u(t)$ , fonction de commande

Contraintes : la condition de non glissement (loi de Coulomb) doit être vérifiée. Il vient alors :

- pour une phase de propulsion :  $|X_{AR}| < f(Z_{AR})$
- pour une phase de traction :  $|X_{AV}| < f(Z_{AV})$

**Remarque :** Pour un véhicule à quatre roues motrices, les deux conditions sont vérifiées simultanément.

Pour un véhicule à propulsion et conformément au schéma de la figure 11.12, on admettra :

$$0 < \frac{2X_{AR}}{M} \leq fg \frac{1-\alpha}{1-\beta f}$$

$$X_{AR} > 0 \text{ en accélération}$$

$$X_{AV} + X_{AR} \geq -\frac{M}{2} gf$$

$$X_{AV} < 0, X_{AR} < 0 \text{ en freinage}$$

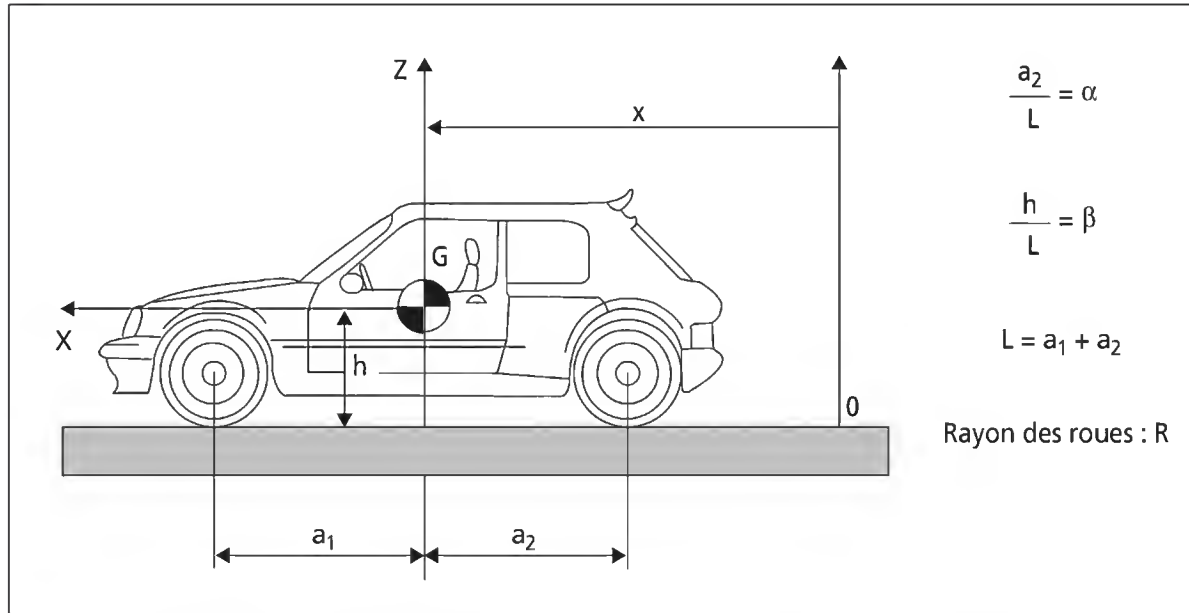


Figure 11.12 Départ et arrêt précis après avoir parcouru une distance  $d$  en temps minimum

avec :

$$\alpha = \frac{a_2^2}{L}; \beta = \frac{h}{L}; L = a_1 + a_2$$

Optimisation

– Mise en forme du problème

$$\Delta t = t_f - t_i = \int_{t_i}^{t_f} dt$$

avec :  $x_1 = x$  ;  $x_2 = \dot{x}$ , fonctions inconnues dans l'espace des phases, du système différentiel suivant :

$$\dot{x}_1 = x_2 ; \dot{x}_2 = \ddot{x} = u(t)$$

la commande doit satisfaire la contrainte :

$$-fg \leq u(t) \leq fg \frac{1-\alpha}{1-\beta f}$$

L'objectif est : trouver la loi de commande qui minimise  $\Delta t$ .

– Résolution

Hamiltonien du problème :  $H = 1 + \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 \cdot u(t)$

$$\text{Avec : } \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_1} = x_2 ; \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_2} = u(t)$$

**Remarque :** Ces équations sont les équations du mouvement restitué.

Puis :  $\frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$  ;  $\frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1$

**Remarque :** L'hamiltonien doit être tel que :

$$H(x_1^*, x_2^*, u^*, \psi_1^*, \psi_2^*) \leq H(x_1^*, x_2^*, u, \psi_1^*, \psi_2^*)$$

La résolution du système différentiel en  $\psi_2$  conduit à :

$$\dot{\psi}_1 = 0 ; \psi_1 = C_1$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 ; \psi_2 = -C_1 t + C_2$$

Alors  $u(t)$  minimise  $H$  si compte tenu de la contrainte sur  $u(t)$  :

$$\psi_2 > 0 \Leftrightarrow u(t) = -fg$$

$$\psi_2 < 0 \Leftrightarrow u(t) = \frac{1-\alpha}{1-\beta f} fg$$

**Remarque :** Pour l'application numérique, on supposera

$$(1-\alpha)/(1-\beta f) = 0,80.$$

– Mouvement dans l'espace des phases  $(x_1, x_2)$ , position-vitesse.

Dans la phase accélération :  $u(t) = 0,8fg$

$$\dot{x}_2 = 0,8fg ; x_2 = 0,8fgt + C_3 = \dot{x}_1 \text{ (vitesse)}$$

$$x_1 = 0,4fgt^2 + C_3 t + C_4 \text{ (position)}$$

**Remarque :** L'élimination du temps fournit l'équation du point dans l'espace des phases sous la forme :

$$x_1 = \frac{x_2^2}{16fg} + C_5$$

$C_5$ , paramètre correspondant au point de départ

$$C_5 = C_4 - \frac{5}{8} \frac{C_3^2}{fg}$$

Durant la phase de freinage :  $u(t) = -fg$

$$\dot{x}_2 = -fg ; x_2 = -fgt + C_6 = \dot{x}_1 ; x_1 = -\frac{1}{2} fgt^2 + C_6 t + C_7$$

**Remarque :** De façon similaire, l'élimination du temps fournit l'équation du point dans l'espace des phases sous la forme :

$$x_1 = -\frac{1}{2fg} x_2^2 + C_8$$

$C_8$ , paramètre associé au freinage.

– Stratégie optimale de pilotage

À  $t_i = 0$   $x_{1i} = -200$   $x_{2i} = 0$

$C_5 = -200$  : la courbe ne ramène pas en  $x_1 = x_2 = 0$  ; la courbe  $C_8 = 0$ , passe elle par l'origine ; elle correspond à la phase de freinage.

À l'intersection avec la précédente, intervient la commutation (passage de la phase accélérée à la phase décélérée). L'intersection se produit pour

$$x_1^* = -89\text{m}, x_2^* = -41,7\text{m/s (150km/h)}, t^* = 5,32\text{ s}, t_f^* = \Delta t = 1,8t^* = 9,57\text{ s}$$

Voir la figure 11.13 représentant la trajectoire optimale.

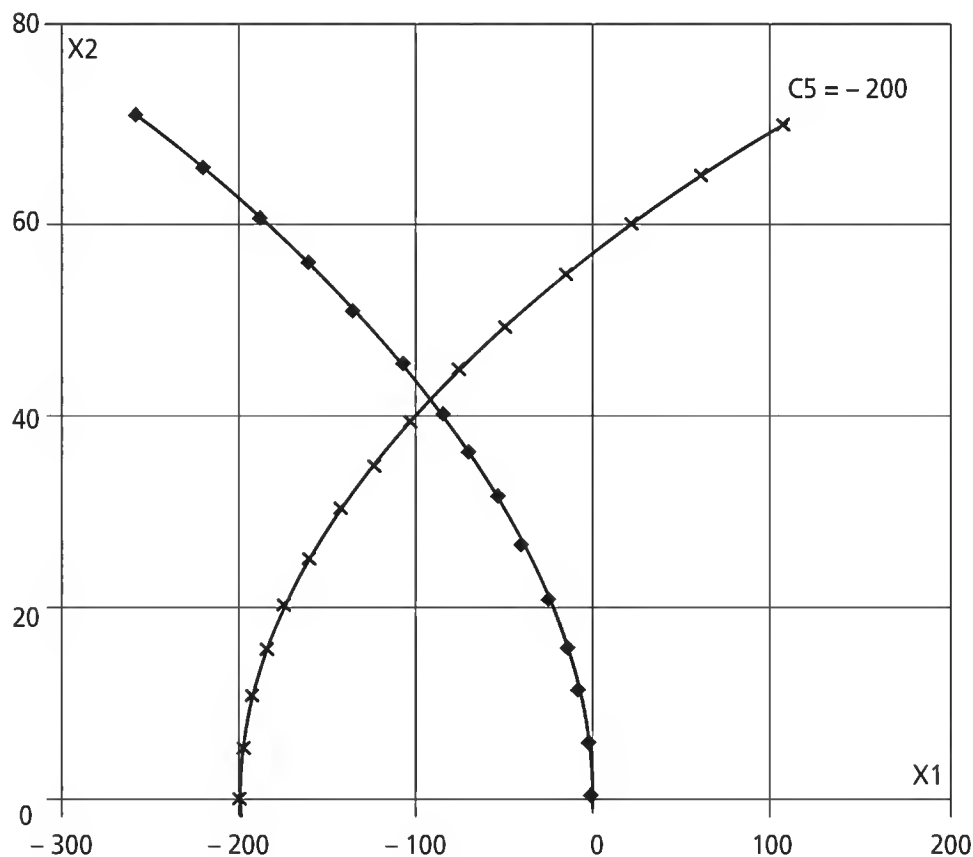


Figure 11.13 Trajectoire optimale dans l'espace des phases.

Conclusion : La stratégie de pilotage, dans le cadre de l'hypothèse conduit à :

- 1) une accélération à la limite de l'adhérence
- 2) un freinage au temps optimal, toujours à la limite de l'adhérence.

**Remarque :** Cet optimum diffère essentiellement de celui conduisant à la consommation énergétique minimale.



### ► D'autres méthodes de programmation mathématique

Parmi les autres méthodes de programmation mathématique, on citera :

#### *Les méthodes de programmation linéaire (LP)*

Ces méthodes sont bien adaptées à l'étude des grands systèmes. Des programmes leur sont dédiés. L'origine de cette méthode est liée aux travaux de G. Dantzig, qui l'a popularisé sous la forme qu'on trouvera par ailleurs (Feidt M.). Ces méthodes peuvent être mises en œuvre tant avec des variables réelles, que des variables entières LP, voire en mixant les deux types de variable (MILP).

#### *Les méthodes de programmation géométrique ou quadratique*

Ces méthodes introduites par C. Zener apparaissent comme plus particulières ; c'est une alternative intéressante pour des fonctions objectives polynomiales chaque fois que le degré de difficulté du problème est nul. On est alors ramené à la résolution d'un système d'équations linéaires.

**Remarque :** le degré de difficulté du problème DD est fourni par la relation :

$$DD = T - (N + 1)$$

$T$ , nombre total de termes de la fonction objectif et des contraintes

$N$ , nombre de variables du problème.

#### *Les méthodes de programmation non linéaires (NLP)*

Ces méthodes sont plus récentes. Elles permettent de traiter des problèmes non linéaires, ce qui est très courant. Elles connaissent de nombreuses variantes ; on citera : les méthodes de programmation linéaire ou quadratique successive ; la méthode de Rosen, performante si les contraintes sont linéaires ; la méthode de gradient réduit généralisé (GRG).

#### *Conclusion sur la programmation mathématique*

La mise en œuvre de ces méthodes est généralement un peu plus complexe et contraignante que les méthodes numériques ou algorithmiques, mais si la solution existe, la convergence est assurée avec une bonne précision.

Ces méthodes connaissent actuellement des développements conduisant à de nouveaux progrès, par exemple l'extension à l'étude de cas non convexes ; néanmoins, leur champ d'application privilégié reste pour le cas le plus complet (MINLP) (voir figure 11.14) conditionné par une FO et des contraintes convexes.

Deux exemples d'utilisation sont référencés ci-après à l'attention du lecteur : (Takashi *et al.*) pour la programmation linéaire, (Rajesh V.G. *et al.*) pour la programmation non linéaire.

Pour ceux qui voudraient approfondir le sujet, il existe de nombreux livres en mathématiques appliquées. On se contentera de donner référence d'une thèse récente soutenue à Lausanne, qui expose une synthèse récente sur le sujet et l'appli-

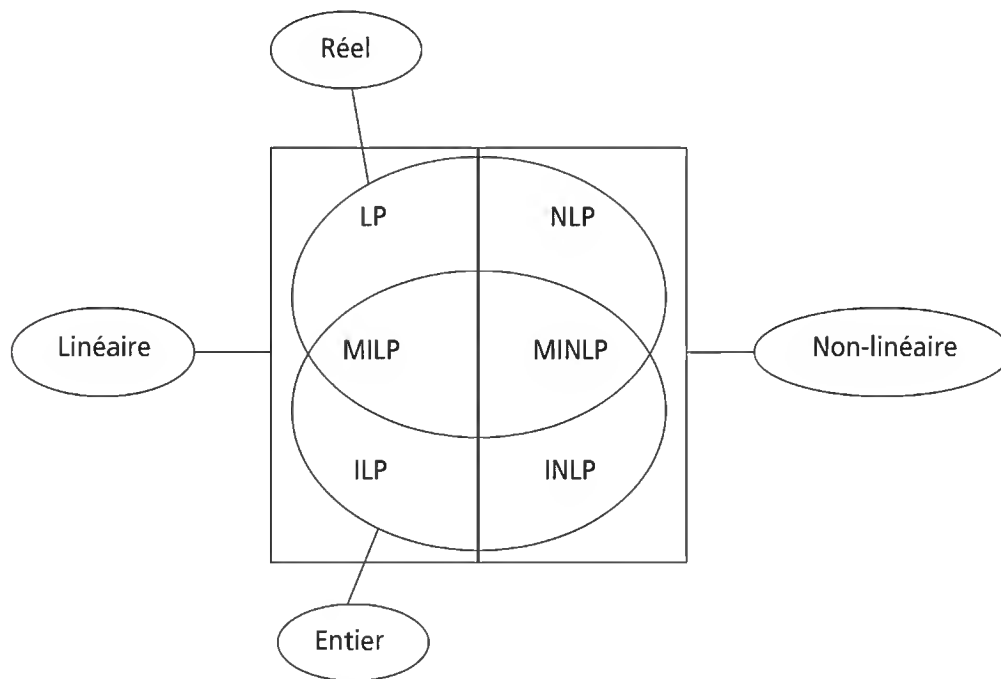


Figure 11.14 Classification des méthodes de programmation mathématique

cation à l'optimisation thermoéconomique des centrales d'incinération à cogénération (Olsommer B.).

### c) Notions sur les méthodes numériques

Le but n'est pas ici de maîtriser l'aspect numérique, qui est un monde en soit, mais d'appréhender l'ensemble des méthodes numériques disponibles, lorsque celles-ci deviennent nécessaires, et de fait, vu la complexité croissante des problèmes à traiter et la disponibilité de moyens de calculs informatisés de plus en plus puissants, la numérisation est souvent incontournable.

#### ► Catégorisation des méthodes disponibles

Il existe deux grandes classes de méthodes : les méthodes de recherche directe ou d'élimination qui ne nécessitent pas le calcul de dérivée de la fonction et les méthodes de recherche indirecte ou de gradient qui passent par le calcul des dérivées de la fonction.

L'ensemble de ces méthodes peut être utilisé quand le calcul analytique ne donne pas de solutions. Leur emploi reste toutefois peu satisfaisant, en ce sens qu'il existe une multitude de variantes disponibles : le choix peut alors se résumer à la disponibilité immédiate.

Contrairement aux méthodes analytiques, les méthodes numériques déterminent en premier lieu la valeur de la fonction objectif FO à l'optimum, pour conclure ensuite quant au vecteur des variables d'état associées, à un certain intervalle d'incertitude près (précision des calculs).

De ce fait, parmi les approches classiques, on a :

- les méthodes à une variable : par recherche exhaustive, par dichotomie, par la méthode du nombre d'or, par la méthode de Fibonacci ;
- les méthodes multivariables sans contrainte : par réseau, par exploration selon une variable, par gradient ;
- les méthodes multivariables avec contraintes : par fonction de pénalisation, par recherche le long des contraintes.

► Illustration des méthodes de recherche à une variable

*La recherche exhaustive (recherche simultanée)*

C'est la méthode la plus robuste et la plus simple ; elle s'applique aussi bien à des fonctions à optimum unique que multiples, sur l'intervalle d'étude initial  $I_o$ . Elle traite aussi bien de fonctions continues différentiables, que non différentiables, voire discontinues.

La procédure consiste à calculer la FO  $y$  en des points de la variable  $x$  répartis sur l'intervalle ouvert testé  $I_o$ . La répartition peut être aléatoire, équirépartie ou autre.

Le cas le plus simple est celui des points d'abscisse  $x$  régulièrement répartis (voir figure 11.15).

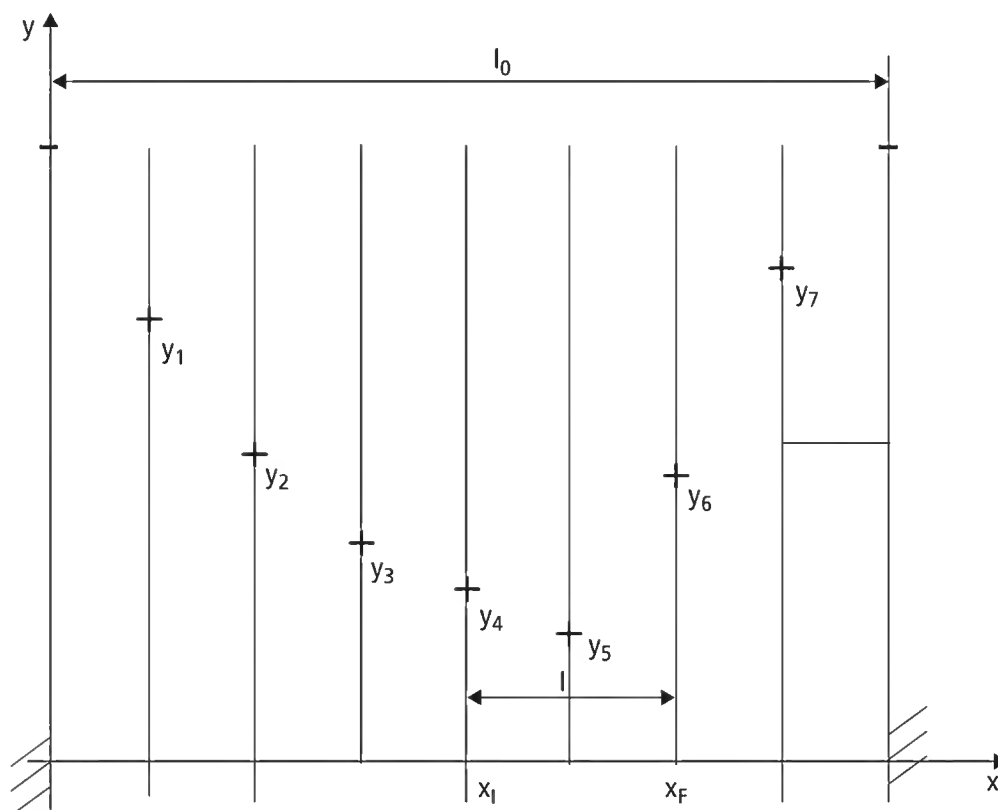


Figure 11.15 Recherche exhaustive d'optimum d'une fonction à un seul minimum sur  $I_o$ .

Si on divise l'intervalle initial en huit,  $y$  est calculé en sept points ; il en résulte  $\min y \in I = ]x_I, x_F[$  avec  $I = \frac{2I_o}{8}$ .

Par itération sur le nombre d'observations, on montre aisément que, après  $n$  observations simultanées, l'intervalle d'incertitude est :  $I_n = \frac{2I_o}{n+1}$ .

### Les recherches séquentielles

Parmi ces méthodes, on citera la méthode de dichotomie, la méthode de Fibonacci et la méthode du nombre d'or. Toutes ces méthodes supposent une fonction à extremum unique sur l'intervalle initial  $I_o$ . Ensuite les procédures conduisent à l'élimination d'un intervalle à l'aide de deux tests ; les méthodes diffèrent sur la position des deux tests.

Méthode du nombre d'or : pour illustrer la démarche, on expose ci-après la méthode de recherche du minimum d'une fonction monovariable, unimodale (minimum unique) sur l'intervalle  $]x_{\min}, x_{\max}[$  de la variable  $x$ .

Principe de réduction de l'intervalle : on place les deux points d'essais  $x_1$  et  $x_2$  dans  $]x_{\min}, x_{\max}[$  (voir figure 11.16).

Si  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , il reste  $]x_1, x_{\max}[$  ; si  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , il reste  $]x_{\min}, x_2]$

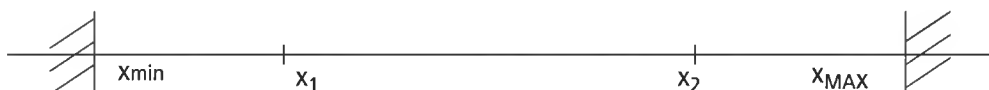


Figure 11.16 a) Principe de réduction d'intervalle

Choix des points  $x_i$  : l'objectif est la réduction la plus rapide de l'intervalle de recherche.

La procédure consiste à placer symétriquement par rapport au milieu de l'intervalle les points d'évaluation de  $y$ , puis à placer les points d'évaluation de façon à diviser l'intervalle de recherche dans le même rapport à chaque itération.

Deux cas de placement sont possibles :

1<sup>er</sup> cas :  $x_2$  à droite de  $x_3$  dans le nouvel intervalle

On montre que ce cas est sans intérêt ( $r$ , rapport de réduction = 1).

2<sup>e</sup> cas :  $x_2$  à gauche du point  $x_3$  dans le nouvel intervalle.

La condition de symétrie conduit à :

$$x_1 + x_2 = x_{\min} + x_{\max}$$

$$x_1 + x_{\max} = x_2 + x_3$$

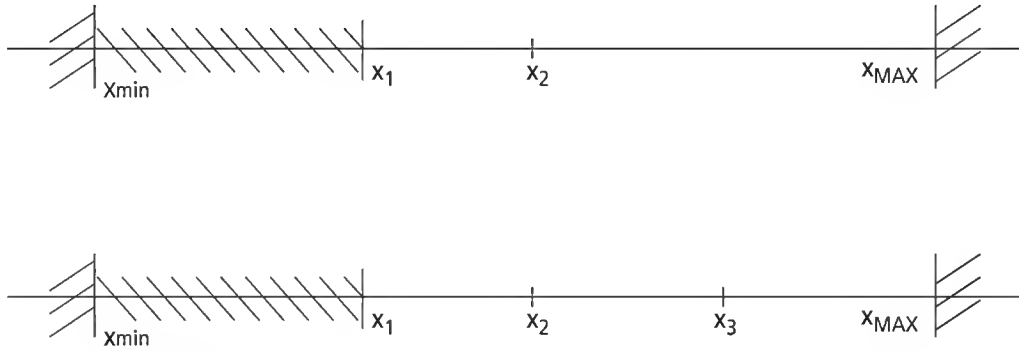


Figure 11.16 b) Placement des points ( $x_2$  à gauche du point  $x_3$ )

L'hypothèse de conservation du rapport  $r$  de division implique :

$$x_{MAX} - x_1 = r(x_{MAX} - x_{min})$$

$$x_3 - x_1 = r(x_{MAX} - x_1)$$

Il vient alors :

$$x_{MAX} - x_{min} = (x_{MAX} - x_3) + (x_3 - x_1) + (x_1 - x_{min}).$$

Soit après substitution :  $r^2 + r - 1 = 0$ .

Cette équation admet comme racine intéressante :

$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618 \text{ (l'inverse du nombre d'or, } \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 1,618) \text{ facteur de réduction de la recherche.}$$

Partant des deux premières évaluations, on a :  $I_2 = r \cdot I_o$  ; par itération pour  $n$  évaluations, on a :  $I_n = r^{n-1} \cdot I_o$ .

Quelle que soit la méthode, on a intérêt à réduire au plus l'intervalle initial  $I_o$ .

De nombreuses autres variantes existent (séquentielle à deux observations avec intervalles constants, approximation polynomiale, méthode de Fibonacci).

L'efficacité d'une méthode de recherche est indiquée par son facteur de réduction d'intervalle  $F.R_n = I_o / I_n$ ,  $n$  correspondant aux nombres d'évaluation (coût en calcul).

En négligeant les infiniment petits, on montre que  $F.R_n$  s'exprime comme indiqué dans le tableau 11.1 pour les principales méthodes recensées.

TABLEAU 11.1  $F.R_n$  DES PRINCIPALES MÉTHODES DE RECHERCHE MONOVARIABLES

Méthode de recherche	Exhaustive	Dichotomie	Nombre d'or	Fibonacci
$F.R_n$	$\frac{n+1}{2}$	$2^{n/2}$	$r^{n-1}$	$F_n$

Les deux méthodes du nombre d'or et de Fibonacci sont très voisines et, à même rapport de réduction, nécessitent moins d'expériences que la méthode de dichotomie.

**Remarque 1 :** le calcul de  $F_n$  se fait à partir de la connaissance de la suite de Fibonacci, telle que :  $F_0 = F_1 = 1$  et  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

**Remarque 2 :** les méthodes à une variable peuvent être une étape de calcul dans un problème multivariable, comme on va le voir ci-après.

#### ► Illustration des méthodes de recherche à plusieurs variables sans contrainte

##### *Méthodes de recherche directe*

Ces méthodes sont une extension des méthodes de recherche directes à une variable. On remarquera toutefois en préambule que la recherche exhaustive serait très coûteuse en calcul ; à titre d'exemple, un système comportant quatre composants à dix variables différentes pour chaque composant conduit à  $10^4$  combinaisons possibles.

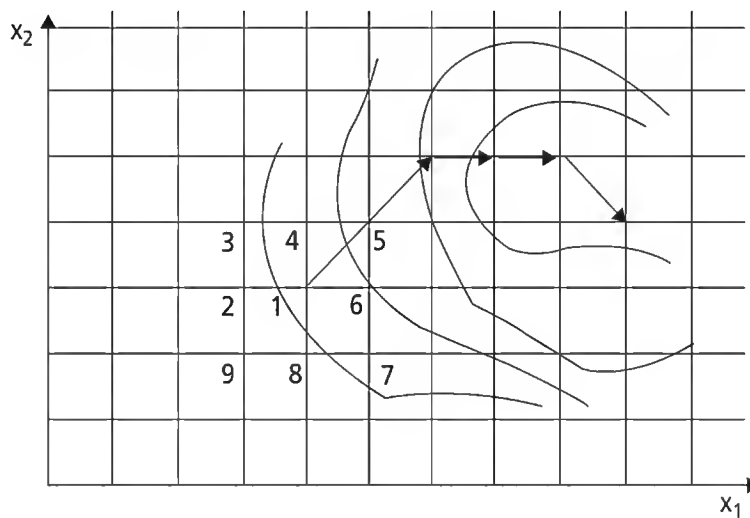
À la méthode simultanée, on préférera des méthodes séquentielles.

Méthode de réseau séquentielle : la figure 11.17 illustre cette méthode sur un exemple bidimensionnel. La figure 11.17 comporte les lignes isovaleurs de la F.O.  $y$  qui est de fait la troisième dimension.

En partant du point initial 1, on teste les valeurs de  $y$  pour tous les points voisins immédiats ; pour la recherche d'un minimum, le point de plus faible valeur devient le centre de la recherche (nouvelle solution) jusqu'à ce que ce point ne bouge plus (convergent à la précision de la grille près). Il est alors possible de reprendre localement une grille plus fine pour mieux localiser l'optimum.

**Remarque 1 :** la sauvegarde en mémoire des informations à ré-utiliser augmente l'efficacité de la méthode.

**Remarque 2 :** le nombre de calculs élémentaires pour une méthode de réseau séquentielle est d'autant plus faible par rapport à la méthode exhaustive que le nombre de variables augmente.



Recherche séquentielle en 2 D

Figure 11.17 Illustration 2D d'une recherche séquentielle

Des variantes à la méthode de réseau existent ; il s'agit en premier lieu de la *méthode par alternance de variables*. Cette variante utilise les méthodes de recherche à une variable ; la fonction objectif est optimisée par rapport à chaque variable en séquence, jusqu'à convergence au sens d'un critère à préciser.

On recensera ensuite les méthodes de Hooke et Jeeves, Powell, et du simplexe ([www.multisimplex.com](http://www.multisimplex.com)). Le lecteur est renvoyé vers les ouvrages spécialisés pour plus de détail (Feidt M.).

### Méthodes de recherche indirectes

Ces méthodes qui utilisent le gradient se déclinent en deux catégories.

Les méthodes de premier ordre : dans ce cas, la FO est approchée par sa dérivée (tangente) et le déplacement vers l'optimum s'effectue selon la direction orthogonale locale.

La méthode de plus grande pente est la méthode de base. Elle peut demander un grand nombre d'itérations pour les systèmes mal conditionnés. La méthode du gradient conjugué est une variante améliorée.

**Remarque :** le conditionnement parfait suppose une hypersurface de type hypersphère dans l'espace des variables pour les isovaleurs de la FO ; la qualité du conditionnement se mesure par le paramètre de conditionnement C, rapport des valeurs propres min et MAX du hessien du problème.

Les méthodes de second ordre utilisent les termes d'ordre 2 dans le développement local, et intègrent donc l'influence de la courbure locale (approximation quadratique de la FO). Il s'agit principalement de la méthode de Newton et des méthodes dérivées (Davidon-Fletcher-Powell ; Broyden *et al.*).



Malgré leur intérêt, on rappelle que ces méthodes qui nécessitent le calcul des dérivées secondes peuvent être coûteuses en calcul.

Pour conclure, on dira qu'il n'existe pas de méthode idéale, que le plus souvent il faut initialiser le calcul aussi près que possible de la solution recherchée (mais inconnue), et que quoiqu'il en soit, le savoir-faire et l'expérience de l'utilisateur restent les facteurs essentiels.

### ► Illustration des méthodes de recherche à plusieurs variables avec contraintes

Il existe deux grands types de méthodes. Là encore les variantes sont très nombreuses. On se contentera d'indiquer les deux principaux types de méthode, à savoir :

- La méthode des fonctions de pénalisation, ramenant le problème à un problème sans contrainte. Ce cas a déjà été examiné dans le paragraphe 11.3.2.b (du point de vue analytique) ; nous n'en dirons rien de plus.
- La méthode de recherche le long d'une contrainte, qui va être résumée ci-après.

On rappelle au préalable qu'il est fondamental de réduire autant que faire se peut la taille du problème à résoudre en détectant et supprimant si possible les contraintes inégalités inactives dans la résolution et en éliminant les contraintes de type égalité qui permettent d'explicitier une variable liée, en fonction de variables indépendantes.

#### *La méthode de recherche le long d'une contrainte*

Cette méthode est une succession de trois procédures de façon séquentielle. La première étape consiste à partir du point d'essai à rejoindre une des contraintes ; une fois sur la contrainte, on peut soit rechercher à atteindre une autre contrainte le long de la précédente, soit rechercher à atteindre l'optimum de la FO, le long de la contrainte.

Dans les deux cas, si la contrainte initiale n'est pas linéaire, le déplacement se fait tangentiellement à la contrainte au point local, et nécessite donc une opération de retour sur la contrainte.

**Procédure itérative d'optimisation.** Du point d'essai on se dirige vers la première contrainte, par la méthode choisie, à la précision désirée près.

Une fois sur la contrainte, on se déplace tangentiellement à celle-ci, vers la seconde contrainte choisie, à la précision désirée près.

On itère sur la procédure précédente de la contrainte  $i$ , vers la contrainte  $(i + 1)$ , jusqu'à la dernière contrainte.

De ce point, on se déplace le long de la dernière contrainte en optimisant la fonction objectif, à la précision désirée près. La procédure reprend alors à l'étape 1, jusqu'à convergence.

En conclusion, on peut dire que les méthodes de recherche le long des contraintes sont bien adaptées aux problèmes multivariables avec contraintes. Les procédures de base ont été examinées dans ce paragraphe pour leur mise en œuvre. Cela n'exclut



pas des méthodes plus élaborées (Davidon : contraintes linéaires ; Rosenbrock : méthode du complexe).

#### d) Un aperçu des méthodes statistiques et évolutionnistes

##### ► Quelques méthodes statistiques

Ces méthodes procèdent par évaluations successives et recherchent des solutions quasi optimales, pour un coût de calcul raisonnable.

Elle sont fondées sur la remarque qu'il vaut mieux parfois une solution approchée d'une observation réelle (programmation heuristique), qu'une solution exacte d'un modèle approximatif faute de connaissance (programmation mathématique).

*La méthode de recuit simulé* : cette méthode repose sur une analogie avec l'influence du refroidissement d'un matériau sur son état final ; elle fait intervenir la

comparaison d'un nombre aléatoire avec un facteur de type Arrhénius  $\exp\left(\frac{y - y_k}{T}\right)$ .

*Les réseaux neuronaux* sont des outils statistiques apparus en 1986 pour l'analyse de données numériques et la construction de modèles non linéaires.

Cette méthode tient compte de la différence essentielle existant entre des études en laboratoire et des études industrielles ; en effet, pour des systèmes complexes, les comportements sont fortement non linéaires et la modélisation ne conduit pas toujours à une validation possible, faute de connaissance ne serait-ce que par manque de données ou de lois physiques. On cherche alors avec peu de variables d'entrée, à réaliser la prédiction des variables de sortie, avec le minimum de calcul et validation des évolutions.

Le vecteur des variables de sortie  $\{y(x)\}$  est exprimé comme une combinaison pondérée (poids  $w$ ) de gaussiennes des entrées  $\{x\}$ , sommée sur les nœuds du réseau.

On minimise l'erreur quadratique par rapport au vecteur de sortie, en ajustant les paramètres de centrage et d'écart-type en chaque nœud du réseau.

Cette méthode permet donc à partir de données, d'aller vers la solution physique et/ou d'améliorer le plan d'expérience. L'application récente en a été faite dans le domaine du froid (évaporateur, machine de Brayton, machine à absorption-éjection, refroidisseur classique) ; les sorties sont alors le COP, la température de sortie ou la puissance mécanique consommée... Cette méthode semble prometteuse en contrôle adaptatif et prédictif.

On indique un logiciel disponible sur le marché (neuro-one) : [www.netral.com](http://www.netral.com).

##### ► Les algorithmes génétiques

Les principes de la méthode ont été développés assez récemment (toutes dernières années) en s'inspirant des mécanismes de l'évolution naturelle appliqués à des problèmes d'optimisation.

**Remarque** : l'évolution biologique a été reconnue bien avant par C. Darwin (1860).

Les algorithmes génétiques utilisent essentiellement trois caractéristiques de la théorie de l'évolution biologique (population d'individus) :

- les chances de survie des individus sont d'autant plus grandes qu'ils sont mieux adaptés à leur environnement ;
- L'information à la base de chaque individu peut être échangée, permettant la diffusion de certaines de ses caractéristiques ;
- Certaines modifications aléatoires des individus, appelées mutations peuvent intervenir.

Le tableau 11.3 rapporte comparativement la terminologie des phénomènes naturels vivants, en regard de l'équivalent des algorithmes génétiques, et le correspondant dans l'exemple rapporté ci-après.

**TABEAU 11.3** TERMINOLOGIE COMPARÉE DES ALGORITHMES GÉNÉTIQUES AG

Nature	Algorithmes génétiques AG	Exemple
Chromosome	Chaîne	Variables codées : vecteur {x}
Gène	Trait, caractéristique	Valeur d'un bit
Allèle	Valeur de caractère	0 ou 1
Locus	Position dans la chaîne	N° du bit
Génotype	Structure	x, codé en binaire
Phénotype	Structure décodée	x, décodé (réel)

### *La procédure des algorithmes génétiques*

On rencontre généralement les six étapes successives suivantes :

#### 1. Initialisation de la population

Celle-ci comporte  $N$  individus générés par tirage aléatoire ; chaque individu est identifié au codage du vecteur d'état (variables indépendantes).

#### 2. Évaluation de la population

Celle-ci se fait sur la FO qui est une fonction d'adaptation (critère d'adaptation).

#### 3. Reproduction – Sélection (opérateur)

Cette phase produit une nouvelle génération.

Plusieurs modes de sélection existent ; citons le tirage avec remise (souvent de  $N/2$  individus), le tirage simultané, la sélection par tournoi.

#### 4. Croisement (opérateur)

Le gène  $g$  d'un enfant résulte d'une combinaison de gènes de deux parents  $P$  (combinaison souvent linéaire) pour donner naissance à deux enfants  $E$  ; pour des algorithmes génétiques codés en réel, la valeur du gène se calcule à partir des valeurs portées par les gènes des parents :

$$g = g_{p1} - \alpha(g_{p2} - g_{p1}) + (1 + 2\alpha)(g_{p2} - g_{p1})a(0,1)$$

$a$ , nombre aléatoire  $\in [0,1]$  tiré uniformément pour chaque gène

$\alpha$ , paramètre souvent pris égal à 0,5 (il peut diminuer de génération en génération).

**Remarque :** lorsqu'il n'y a pas de croisement, l'algorithme est dit évolutionniste.

### 5. Mutation (opérateur)

Cette opération correspond à une modification aléatoire d'un gène ; cette opération peut être plus ou moins forte (mutation faible, mutation forte).

La mutation a pour but d'éviter une convergence prématurée.

### 6. Nouvelle population et élitisme

On connaît les  $N$  individus initiaux ; on évalue les  $N/2$  individus générés et les individus mutés.

Et on établit une règle de sélection de la population à retenir : beaucoup de méthodes sont possibles et pas forcément élitistes au sens du critère.

Le test de convergence est à choisir ensuite pour retenir la solution : par exemple, rémanence du meilleur individu sur un nombre donné de générations (ou moindre dispersion des individus autour du meilleur).

### Un exemple simple d'algorithme génétique

On cherche le minimum de la fonction  $y = \sin x$  sur l'intervalle  $[0, +\pi]$ .

La population initiale est constituée de quatre individus ayant un gène codé en réel  $x$ .

L'algorithme est simplement évolutionniste ( $\alpha = 0$ ).

La fonction d'adaptation choisie est  $f(x) = \sin x$  (objectif).

La sélection sera faite par tournoi (2 à 2) : 1 avec 2, 3 avec 4.

Le croisement suppose  $a = 0,4$ .

La nouvelle population est obtenue en gardant les parents et les enfants.

On obtient alors le tableau 11.4 qui fournit la solution optimale retenue entre deux générations compte tenu du savoir mathématique de l'expérimentateur.

TABLEAU 11.4 EXEMPLE D'UTILISATION D'UN ALGORITHME ÉVOLUTIONNISTE

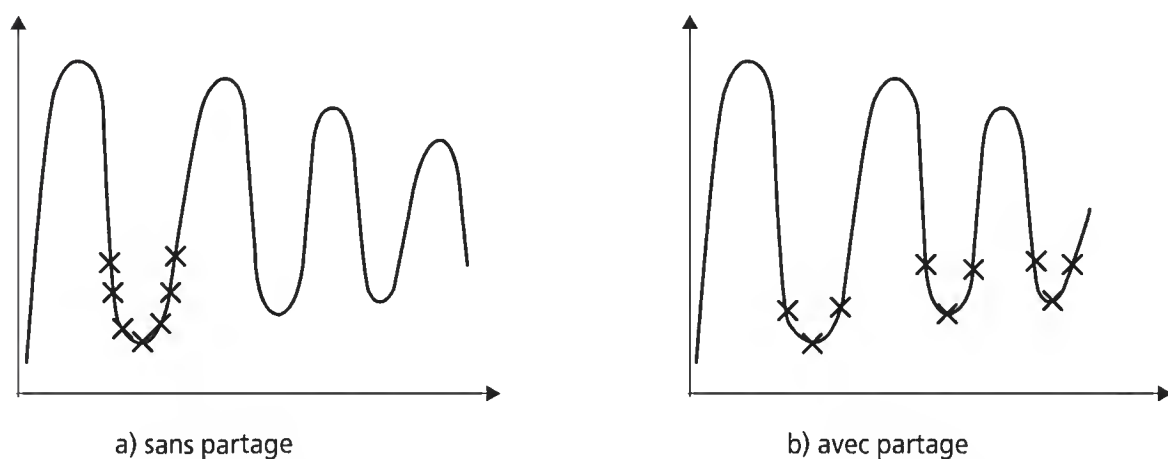
Génération	Individu	1	2	3	3
$g_0$	$x$	0,70	1,20	1,70	2,90
	$f(x)$	0,64	0,92	0,99	0,26
$g_1$	$x$	1,20	1,40	1,50	1,70
	$f(x)$	0,92	0,98	$\approx 1$	0,99

Les lecteurs intéressés par un exemple simple d'AG algorithmé codé peuvent se reporter à la référence (Olsommer B.) en particulier l'annexe A.1.

### Améliorations récentes

Bien que méthode statistique la plus performante, les AG souffrent de quelques limitations : caractère trop aléatoire, convergence prématurée (optimum local), perte de diversité, domination d'un individu, génération de « monstre » (individus éloignés).

D'où l'intérêt du codage en réel (et non plus en binaire), de la sélection par tournoi (avec  $k < N$ ), du croisement multipoints, du recouvrement de population, de la formation d'espèces (fonction de partage et niches) : l'influence de la fonction de partage est illustrée sur la figure 11.18.



**Figure 11.18** Influence de la fonction de partage sur une minimisation.

### ► En guise de conclusion

Les méthodes statistiques présentent de bonnes performances, robustesse et simplicité, dans l'exploration d'une zone intéressante dans l'espace des solutions, tout particulièrement pour les systèmes industriels et à forte non linéarité ; c'est un bon complément aux méthodes de recherche précédentes, et qui possède sans doute un fort potentiel d'amélioration.

D'autres candidats voient aussi le jour, comme l'optimisation par essais particuliers (Clerc M.), appliquée aux réseaux d'échangeurs.

Les algorithmes génétiques et réseaux de neurones quant à eux ont été plus amplement utilisés pour des optimisations multi-objectifs sur des rotors de machines, des moteurs d'avions, des turbines à combustion terrestre, des étages de turbines à vapeur, et des procédés chimiques. Pour plus de détails sur ces méthodes, on renvoie le lecteur vers (Menders J.M.).

### e) Un exemple de méthode : la programmation dynamique

#### ► Une méthode particulière

Cette méthode d'optimisation assure la transition entre l'optimisation statique (optimisation de dimensionnement) et l'optimisation dynamique (dans le temps : contrôle-commande) ; elle fournit plus une trajectoire optimale qu'un point d'état optimal.

L'application la plus représentative est sans doute la trajectoire optimale d'une fusée (ou d'un mobile). Mais la programmation dynamique (ou séquentielle inverse) s'applique bien aussi à des problèmes séquentiels inverses faisant intervenir des processus discrets ou des fonctions continues approximées par des processus discrets.

Elle nécessite des manipulations de données en nombre important, mais généralement assez simples. Cette méthode « hybride », bien que fiable au calcul des variations, n'est pas interchangeable avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange et les méthodes de programmation linéaires ou non linéaires.

#### Exemples d'applications industrielles

Hormis les problèmes de trajectoires optimales déjà citées, il est possible d'appliquer avec succès la méthode au couplage en cascade de compresseurs, d'échangeurs, de réacteurs, de pompes...

D'autres applications sont envisageables. Quelques-unes seront évoquées dans ce chapitre, ainsi que dans la troisième partie de l'ouvrage.

#### Représentation schématique d'un problème résolu par la programmation dynamique

Quel que soit le problème traité, celui-ci se ramène à une succession d'étapes dont on connaît le point final. La figure 11.19 rend ainsi compte de l'appellation séquentielle inverse.

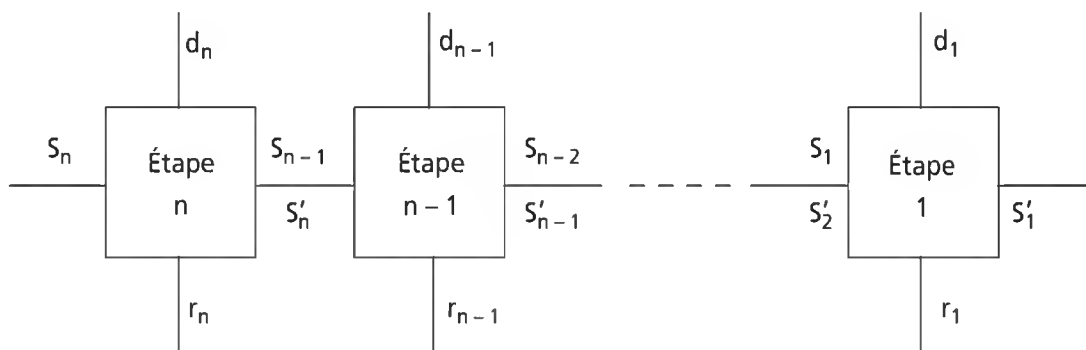


Figure 11.19 Schéma d'optimisation séquentielle inverse

Sur la figure 11.19 les  $S_i$  sont les variables d'entrée, les  $S'_i$  sont les variables de sortie, les  $d_i$  sont les décisions ou variables de commande  $x_i$ , les  $r_i$  sont les revenus ou les coûts (objectifs).

L'optimisation porte sur le revenu total  $R = \sum_i r_i$ .

On conçoit que par passage à la limite de cette sommation, on obtiendrait une intégrale utile pour transposer la méthode en calcul variationnel ;  $S_n$  et  $S'_1$  correspondent aux bornes d'intégration du domaine.

Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra se référer au livre de (Bellmann R.E. et Dreyfus S.E.). Le premier de ces deux auteurs est à l'origine de la méthode comme l'indique le principe qui porte son nom (paragraphe suivant).

### ► Principe de Bellmann ou principe d'optimalité

#### *Enoncé du principe*

Une politique (ou un chemin) optimale est telle que, quels que soient l'état initial et la décision initiale, les décisions suivantes doivent constituer une politique (ou un chemin) optimale par rapport à l'état résultant de la première décision.

#### *Démonstration directe de l'équation fonctionnelle fondamentale*

En supposant que le revenu  $r_i$  à l'étape  $i$  est une fonction connue de  $x_i$ , variable de commande :  $r_i = g_i(x_i)$ .

On définit la suite des fonctions  $f_N(X)$  ( $X$ , vecteur des variables de commande), qui représente par exemple le revenu optimal de la répartition des ressources  $X$  entre  $N$  activités. Les ressources  $X$  peuvent être différentes formes d'énergie.

En posant  $f_N(o) = 0$  pour  $N = 1, 2, \dots$ . Si  $\forall i \ g_i(o) = 0$  et sachant que  $f_1(X) = g_1(X)$ , on montre que :

$$f_N(X) = \max_{0 \leq x_N < X} [g_N(x_N) + f_{N-1}(X - x_N)] \quad (11.37)$$

pour  $N = 2, 3, \dots; \|X\| \geq 0$ .

En effet :

$$f_N(X) = \max_{(X)} [R(x_1, x_2, \dots, x_N)] \text{ avec } x_i \geq 0.$$

De façon à alléger l'écriture, on notera conventionnellement :  $\sum_i x_i = X$ .

On sait que  $R = \sum_i r_i = \sum_i g_i(x_i)$  est une fonction de  $X$  et de  $N$ . Or

$$\max_{\substack{x_1 + x_2 + \dots + x_N = X \\ x_i \geq 0}} = \max_{0 \leq x_N < X} \left[ \max_{\substack{x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1} = X - x_N \\ x_i \geq 0}} \right] \quad (11.38)$$

L'application de 11.38 à  $f_N(X)$  implique :

$$f_N(X) = \max_{\substack{x_1 + x_2 + \dots + x_N \\ x_i \geq 0}} [g_N(x_N) + g_{N-1}(x_{N-1}) + \dots + g_1(x_1)]$$



$$f_N(X) = \max_{0 \leq x_N < X} \left[ \max_{\substack{X-x_N \\ x_i \geq 0}} \{g_N(x_N) + g_{N-1}(x_{N-1}) + \dots + g_1(x_1)\} \right]$$

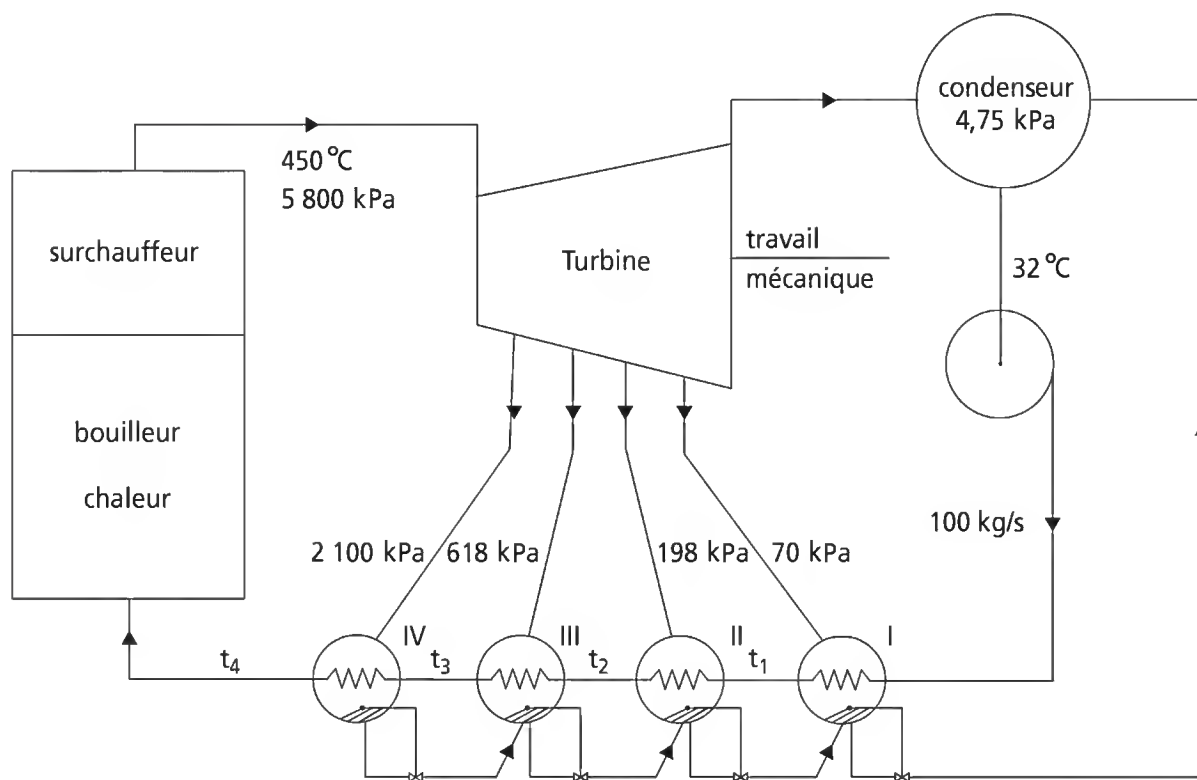
$$f_N(X) = \max_{0 \leq x_N < X} \left[ g_N(x_N) + \max_{X-x_N} \{g_{N-1}(x_{N-1}) + \dots + g_1(x_1)\} \right]$$

$$f_N(X) = \max_{0 \leq x_N < X} [g_N(x_N) + f_{N-1}(X - x_N)]$$

Un raisonnement par l'absurde permet alors de confirmer l'unicité de la fonction trouvée.

### ► Un exemple d'application

On cherche à optimiser les soutirages sans mélangeage d'une turbine à vapeur dont le schéma d'ensemble est représenté sur la figure 11.20.



**Figure 11.20** Schéma d'ensemble de l'installation à turbine à vapeur avec soutirages sans mélangeage

La vapeur prélevée peut préchauffer l'eau d'entrée en chaudière (bouilleur), avant que de rejoindre le condenseur pour refournir du travail en haute pression ; le but est une augmentation de l'efficacité du cycle.

L'analyse économique a prédéterminé qu'il y avait 1 000 m<sup>2</sup> de surface d'échangeur à distribuer sur les quatre soutirages par incrément de 100 m<sup>2</sup> ; le coefficient de transfert de chaleur surfacique global dans ces échangeurs est supposé constant ( $k_g = 2\,800 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ). Le coût de la vapeur produite dans la chaudière est de 60 k€

par GJ ( $10^9$  J) ; débit d'alimentation  $\dot{M} = 100 \text{ kg/s}$ . La valeur de la vapeur extraite (déterminée à l'aide de la thermodynamique) est fournie dans le tableau ci-après (tableau 11.5).

TABLEAU 11.5 VALEUR DE LA VAPEUR EXTRAITE

Soutirage	Temps de saturation °C	Valeur en kE/GW
1	90	23
2	120	28
3	160	38
4	215	47

On cherche la distribution optimale de la surface conduisant à l'économie maximale.

On utilise la méthode de programmation dynamique appliquée à un problème apparemment contraint (surface totale d'échangeurs imposée). Cependant, le problème est ramené à un problème non contraint en raisonnant en surface cumulée ; on a alors avantage à partir du condenseur, puisque la température de condensation est connue ( $t = 32^\circ\text{C}$ ).

Pour le développement des calculs, on supposera ni surchauffe, ni sous-refroidissement pour la vapeur soutirée dans les échangeurs. De plus, on négligera les pertes de pression.

Bilan d'un soutirage : les échangeurs étant adiabatiques (sans perte), on a (voir chapitre 13) :

$$\dot{q} = k_g A \frac{(tc - te) - (tc - ts)}{\ln \frac{tc - te}{tc - ts}} = \dot{M} C_p (ts - te) \quad (11.39)$$

A, aire de l'échangeur

$\dot{M}$ , débit massique de condensat

$te$  ( $ts$ ), température d'entrée (de sortie) de condensat dans l'échangeur

$tc$ , température de saturation (condensation) de la vapeur dans l'échangeur

De (11.39), on déduit :

$$ts = te + (tc - te) \left( 1 - e^{-k_g A / \dot{M} C_p} \right)$$

Fonction objectif : l'économie réalisée à l'étage  $i$  s'écrit :

$$E_i = \dot{q}_i (60 - V_i) \cdot 10^{-9}$$

$E_i$  en euros,  $\dot{q}_i$  en W.



$E_i$  représente l'économie d'énergie réalisée au bouilleur, moins le coût de la vapeur utilisée.

### Résolution numérique

La résolution est faite de l'échangeur 1 vers l'échangeur 4.

Initialisation : en partant du condenseur, on détermine  $t_1$  pour les diverses valeurs de  $A_1$ , variant mathématiquement de 0 à 1 000 m<sup>2</sup> par pas de 100 m<sup>2</sup>.

Le premier tableau intermédiaire est relatif aux économies d'énergie (il n'est pas rapporté ici).

On en déduit :  $\dot{q}_1 = \dot{M} Cp(t_1 - 32)$ , puis  $\dot{E}_1$  ; à cette étape, aucune possibilité n'est rejetée.

Le premier tableau intermédiaire est relatif aux économies d'énergie pour deux échangeurs en série (il n'est pas rapporté ici)

Deux échangeurs en série : on en déduit les solutions optimales (étoilées) correspondant à certaines surfaces dans l'échangeur 1 et 2 ; ce sont ces résultats qui sont retenus et sauvegardés pour le calcul suivant qui fait intervenir trois échangeurs en série.

Le dernier tableau sera constitué comme suit.

**Tableau 11.6** ÉCONOMIE TOTALE POUR LES QUATRE ÉCHANGEURS EN SÉRIE

1 soutirage			2 soutirages			3 soutirages			4 soutirages		
S1	T1	E1	S2	T2	E2	S3	T3	E3	S4	T4	E4
100	60,3	0,438	100	74,9	0,575	0	74,9	0,575	0	74,9	0,575
200	74,8	0,662	200	96,9	0,869	100	116,4	0,957	0	116,4	0,957
300	82,2	0,777	200	104,3	1,028	100	127,7	1,153	100	164,5	1,219
400	86,0	0,836	300	112,0	1,130	200	143,4	1,298	100	170,3	1,384
500	88,0	0,866	300	113,9	1,187	200	145,4	1,406	200	192,10	1,503
600	89,0	0,882	400	116,9	1,226	300	152,5	1,472	100	179,3	1,591
700	89,5	0,890	400	117,4	1,249	300	153,5	1,513	200	196,7	1,685
800	89,7	0,894	500	118,7	1,266	300	153,8	1,554	300	205,6	1,734
900	89,9	0,896	500	118,8	1,275	400	156,8	1,582	300	206,6	1,766
1 000	89,9	0,897	600	119,4	1,283	400	157,0	1,596	300	206,7	1,802

### Chemin optimum

À partir de la solution étoilée du dernier tableau, on remonte dans les tableaux précédents, par l'intermédiaire des solutions étoilées correspondantes.

Le résultat du calcul fait par un petit programme informatique est le suivant :

$$A_1^* = 100m^2 ; t_1^* = 60,3^\circ C ; E^* = 0,438kE$$

$$A_2^* = 300m^2 ; t_2^* = 112^\circ C ; E^* = 1,130kE$$

$$A_3^* = 300m^2 ; t_3^* = 153,5^\circ C ; E^* = 1,513kE$$

$$A_4^* = 300m^2 ; t_4^* = 206,7^\circ C ; E^* = 1,802kE$$

$E^*$ , représente les économies cumulées.

Le tableau 11.6 récapitule l'ensemble de toutes les valeurs étoilées ( $A_i, t_i, E_i$ ), dont la phase d'initialisation.

### *Intérêt et efficacité de la programmation dynamique*

Tout chemin optimal d'une étape intermédiaire à l'étape finale demeure quelle que soit l'optimisation ultérieure.

Pour les grands systèmes, on peut alors travailler en sous-systèmes, puis assemblage.

La méthode de programmation dynamique est d'autant plus efficace en recherche que le problème comporte d'étapes. La méthode est donc bien adaptée à l'étude des chaînes d'événements ou de composants en série.

La programmation sur ordinateur reste aisée (traitement de fichiers) ; la principale difficulté reste d'identifier les variables d'état pertinentes (voir l'exemple précédent apparemment contraint), et à établir les tableaux de valeur. Un exemple récent : (Chen H.J. *et al.*).

### **11.3.3 Optimisation dynamique : contrôle-commande**

#### *a) Deux approches principales*

L'optimisation dynamique impose la considération du comportement en temps réel du système ou procédé. Il apparaît alors deux catégories essentielles.

Le contrôle-régulation a pour fonction de maintenir une situation donnée : maintien d'un régime (d'un point) de fonctionnement

Le contrôle-commande : dans ce cas le système est en régime transitoire, et il s'agit de gérer le transitoire. On peut distinguer pour les applications qui nous préoccupent deux grandes classes de transitoire :

- les transitoires glissants : les variations correspondantes sont modestes et ne nécessitent qu'une adaptation « lente » du système (constantes de temps longues).

#### **Exemples :**

- évolution de production, de vitesse ;
- montée en régime ;
- rampe (linéaire) ;
- les transitoires rapides : les variations et adaptations correspondantes sont beaucoup plus rapides (constantes de temps courtes).

Exemples :

- mise en marche – arrêt ;
- ouverture – fermeture ;
- échelon, créneau, impulsion.

### b) Le contrôle-régulation

On se contente ici d'illustrer les notions principales utiles par rapport aux préoccupations du domaine exploré.

La régulation peut se faire de façon analogique, numérique ; puis par des combinaisons et améliorations de ces versions de base à l'aide de régulations améliorées.

#### ➤ Régulation analogique

Le schéma de principe du système régulé est représenté sur la figure 11.21.a.

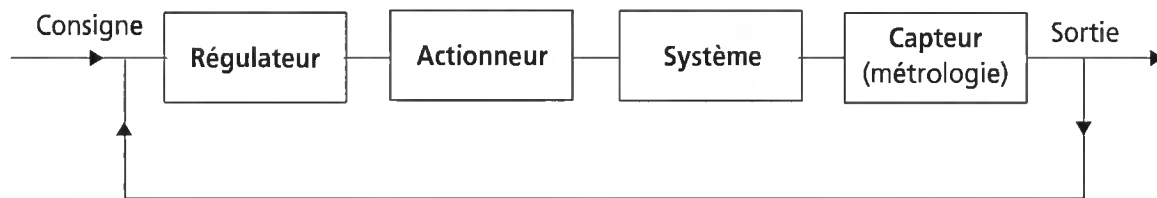


Figure 11.21.a Régulation analogique d'un procédé ou système : schéma de principe.

La boucle comporte quatre composants :

Le système ou le procédé : les entrées et les sorties de celui-ci sont des fonctions de plusieurs grandeurs physiques qui le décrivent.

**Exemple :** Pour un moteur électrique, il y a des correspondances entre les grandeurs électriques et les grandeurs mécaniques.

Le capteur (la métrologie) : la mesure est essentielle, car la grandeur mesurable conduit à l'information nécessaire à la régulation.

On notera deux types de capteurs :

- les capteurs directs : par exemple, mesure de température, pression ; ils fournissent pour les plus commodes un signal électrique ;
- les capteurs indirects : ils nécessitent un traitement de l'information (modèle de connaissance) pour établir une correspondance entre la mesure et la grandeur recherchée. Un exemple : mesure d'une concentration.
- Le régulateur conserve la consigne et compare par rapport à la sortie observée. Il doit posséder quelques propriétés, dont la stabilité, la précision, et un temps de réponse adaptée.
- L'actionneur reçoit du régulateur une commande de correction. Il peut être électrique, pneumatique, mécanique. Exemple : vanne mélangeuse trois voies

Pour un régulateur de type continu, la correction de l'influence des perturbations se fait selon trois modes principaux :

- mode P, à effet proportionnel immédiat (dans le présent) ;
- mode I, à effet intégral, fonction de l'expérience (il intègre le passé) ;
- mode D, à effet dérivé, suppose une certaine capacité à prédire le comportement (anticipation, dans le futur).

On note ici une analogie avec les comportements naturels du monde vivant.

Le modèle mathématique correspondant relie l'entrée  $e(t)$  du système, à la commande  $u(t)$  sous la forme :

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_{t_i}^{t_f} e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

Le réglage se fait par variation des coefficients  $K$ .

**Remarque :** il existe d'assez nombreuses méthodes pour valoriser les coefficients  $K$  ; elles relèvent essentiellement de l'automatique et ne seront pas abordées ici. Elles mettent en œuvre la connaissance de la dynamique des systèmes et procédés ; d'où l'importance des modèles instationnaires, des écarts aux régimes stationnaires dont nominal, des amortissements, gains ou sensibilité, des réponses à certaines sollicitations en entrée (impulsion, rampe, créneau, échelon).

### ➤ Régulateur numérique

La figure 11.21.b représente une boucle de commande numérique ; on y voit apparaître un calculateur numérique qui facilite le traitement des données, sous une forme cette fois numérique. Ceci a été permis par l'effet conjoint d'une amélioration des performances en numérique, puis une diminution constante des coûts depuis trente ans (passage des microprocesseurs aux microcalculateurs).

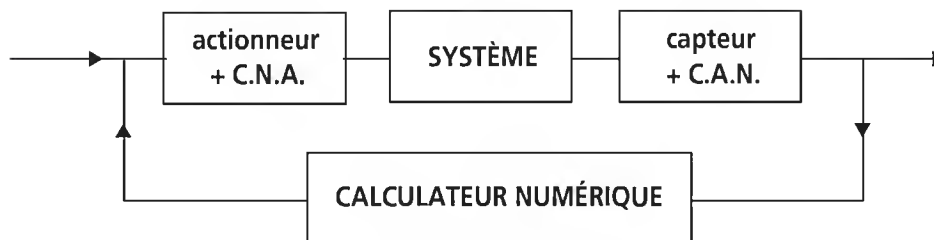


Figure 11.21.b

La contrepartie est l'usage nécessaire d'un convertisseur numérique-analogique (CNA) en relation avec l'actionneur à l'amont, puis un convertisseur analogique-numérique CAN en relation avec le capteur à l'aval. Une horloge de gestion de tâches supervise l'acquisition et le contrôle ; une attention particulière doit être portée dans l'interfaçage, au compromis résolution et temps de conversion.

Le modèle de régulation discret correspond à :

$$u(nT) = K_p e(nT) + K_i \sum_{i=0}^{i=n} e(iT) + K_D \frac{e(nT) - e((n-1)T)}{T}$$

$T$ , période d'échantillonnage ; elle dépend de la dynamique du système.

**Remarque :**  $K_r$  est obtenu comme en continu ; par contre, l'effet dérivé est le plus souvent approché par un modèle du premier ordre avec une constante de temps propre au régulateur (4<sup>e</sup> paramètre mais fixé).

**Exemple :** Démarrage optimisé d'un four électrique intégrant une tarification (par exemple HP-HC, heures pleines, heures creuses).

### c) Le contrôle-commande

Le contrôle-commande marque une évolution dans la hiérarchie des actions. On en indique ci-après trois formes : le régulateur pré-programmé, le régulateur auto-ajustable, la commande adaptative.

#### ► Le régulateur pré-programmé

Le problème à traiter ici provient du fait que la performance du système attendue n'est pas une constante, mais varie avec des paramètres de sollicitation.

**Exemple :** changement du mode de fonctionnement d'un four avec le niveau de température ou avec les matériaux :

- le niveau de température joue sur les mécanismes prépondérants de transfert ; basse température associée à la conduction-convection, haute température associée aux transferts radiatifs ;
- une cuisson de poterie varie selon le matériau : porcelaine, grès, émail, verre ;
- un verre peut être coulé ou recuit.

Les changements de dynamique interdisent une régulation à paramètres fixes. D'où la première forme de PID préprogrammé : à un régime de fonctionnement donné correspond une loi de régulation adaptée qui doit être enclenchée.

La figure 11.22.a représente une régulation PID préprogrammée.

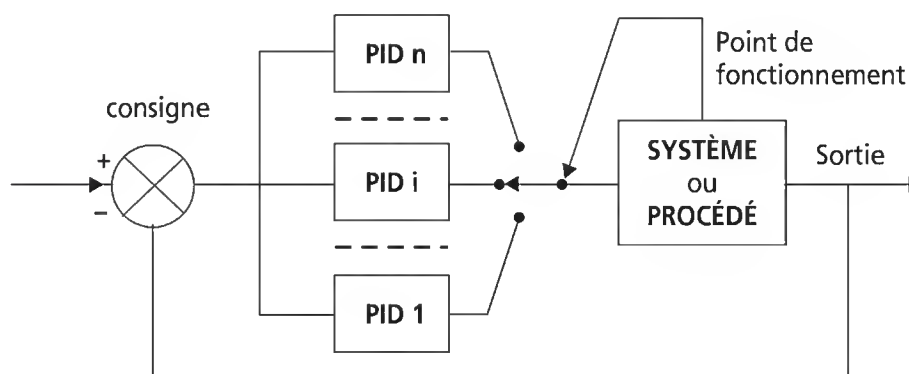


Figure 11.22.a Régulation PID préprogrammée.

Ce type de contrôle nécessite de connaître les divers états de fonctionnement *a priori*, et de disposer d'une grandeur mesurable caractérisant cet état.

### ► Le régulateur auto-ajustable

On estime alors en temps réel (par identification paramétrique) les paramètres représentatifs du comportement (dynamique) du système ou du procédé ; d'où le suivi de l'évolution des caractéristiques statiques ou dynamiques correspondantes ; la loi de contrôle est actualisée à chaque échantillonnage (figure 11.22.b).

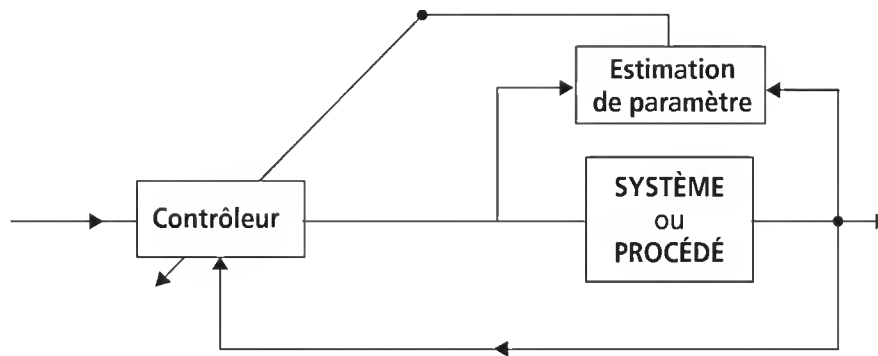


Figure 11.22.b Régulation auto-ajustable

La commande ajustable à caractère prédictif est souvent robuste. Elle prédit la sortie sur un horizon donné ; si cet horizon est égal au retard, il y correspond une minimisation des fluctuations par rapport à la valeur désirée.

**Remarque :** plus l'horizon de prédiction est court, meilleure sera la prédiction.

### ► La commande adaptative

On construit par un modèle mathématique à paramètres connus les performances du système et de sa commande en boucle fermée.

Le modèle de référence rend compte de la commande projetée ; la sortie réelle du système est comparée à la sortie du modèle de référence. En fonction de l'écart observé, le mécanisme d'adaptation réajuste les paramètres de la commande pour aller vers l'état désiré.

La figure 11.22.c représente le schéma d'une commande adaptative.

**Remarque :** la commande adaptative comporte toujours une boucle interne de contre-réaction (régulation) ; mais ici, les paramètres du régulateur sont ajustés par la boucle externe (présence d'une stratégie de commande et d'une procédure d'adaptation).

## 11.3.4 Conclusions

L'optimisation d'un système ou d'un procédé est une opération vaste et complexe, qui présente toute une gradation de niveaux rappelés schématiquement sur la figure 11.23 et qui montre la correspondance aux diverses échelles de temps, les

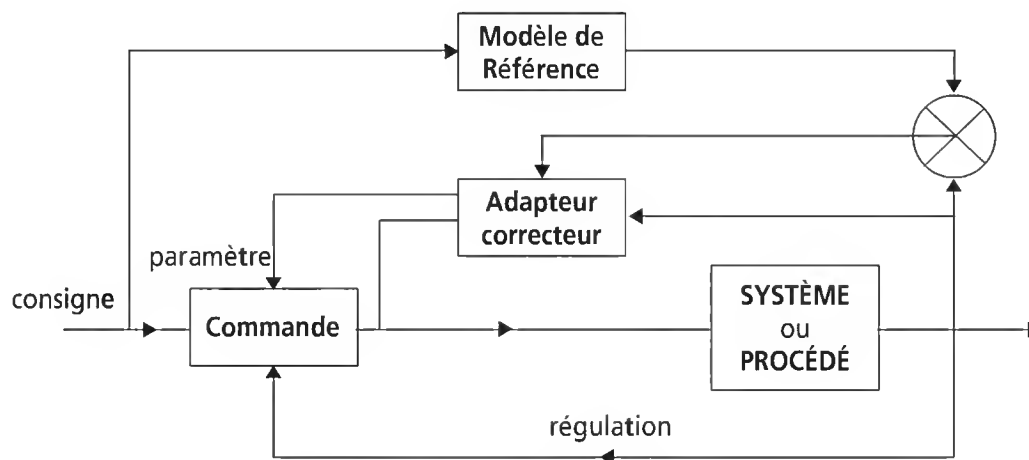


Figure 11.22.c Commande adaptative

temps courts étant ceux de l'optimisation dynamique, les temps longs étant ceux de l'optimisation statique.

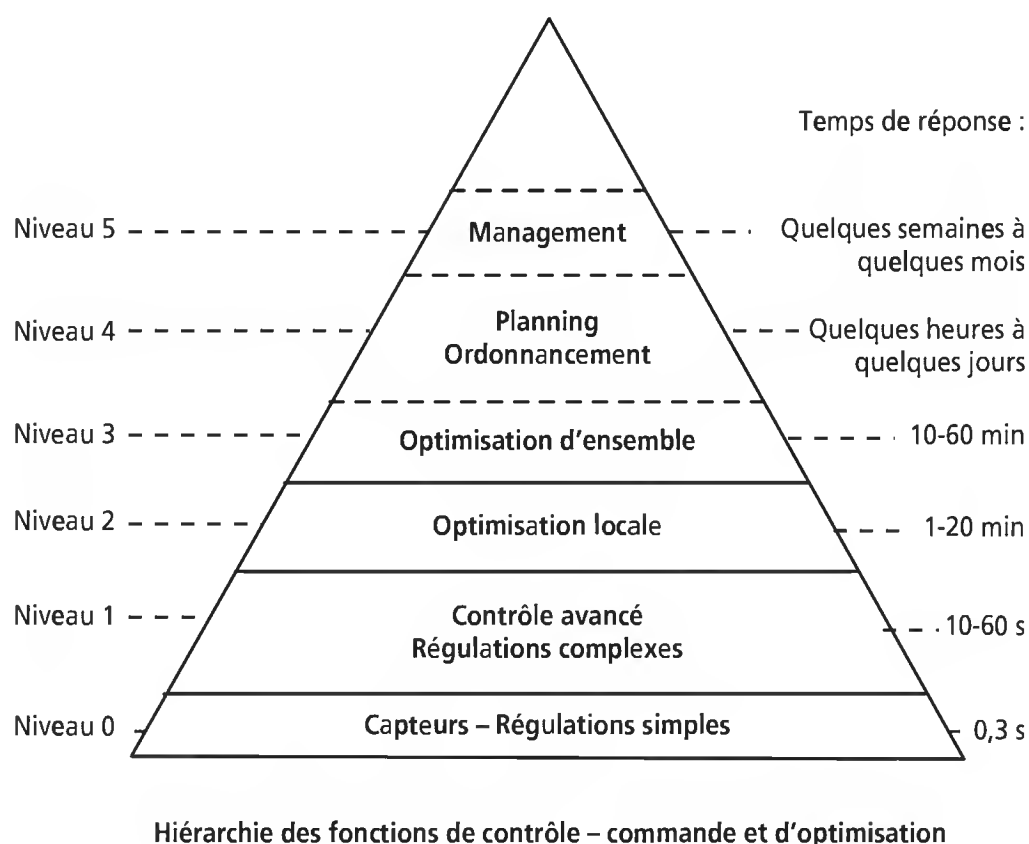


Figure 11.23 Optimisation et temps.

Une fois encore apparaît l'importance fondamentale de la variable temps d'un point de vue pratique (sciences de l'ingénieur). Cela ne doit pas faire oublier les aspects fondamentaux sous tendus, en particulier la relation mathématique-physique forte qui est apparue à l'occasion de ce chapitre.



On retiendra l'intérêt qu'il y aurait à mettre en évidence un principe d'optimum (minimum) général ; cette conjecture est un des enjeux de ce livre, de même que d'autres publications actuelles : on citera (Berry R.S. *et al.*).

D'assez nombreux exemples seront repris dans la partie 3 (applications) qui suit.

Rien n'est dit sur les outils d'optimisation disponibles, d'un point de vue numérique et informatique : aucune synthèse n'est possible tant ils sont nombreux. On se contente des indications données dans le texte ci-devant.

## BIBLIOGRAPHIE

- BASS J., *Cours de mathématiques*, Masson, 1961, Tome 2, Chapitre XLII, p. 2927.
- BELLMANN R.E., DREYFUS S.E. La programmation dynamique et ses applications, Dunod, 1965.
- BERRY R.S. *et al.*, Thermodynamic optimization of finite time processes, Wiley, 1999.
- BRODIANSKY V.M. *et al.*, *The efficiency of industrial processes : exergy analysis and optimization*, Elsevier, 1994
- CHEN H.J. *et al.*, Optimization of an ice storage air conditioning system using dynamic programming method, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 25, 2005, p 461-472.
- CLERC M., *L'optimisation par essais particuliers*, Hermès-Lavoisier, 2005.
- FEIDT M. *Constrained static or dynamic optimization of energy systems and processes*, Proceedings of ECOS 2003, Copenhagen, Denmark, June 30-July 2, 2003, Tome 3, p. 1263-1270.
- FEIDT M., LANG S. Conception optimale de systèmes combinés à génération de puissance, chaleur et froid, *Entropie*, 2002, n° 242, p. 2-11
- FEIDT M., *Thermodynamique et optimisation énergétique*, TEC et DOC, 1996, p. 251-262.
- FEIDT M., *Thermodynamique et optimisation énergétique*, TECH et DOC, 1996, p. 262-276.
- FITCH P.E., COOPER J.S., Life cycle energy analysis as a method for material selection, *Trans. Of ASME*, 2004, Vol. 126, p. 798-804, September.
- FRANCO A., DIAZ A.R., *Multicriteria assessment of energy conversion systems using aggregated indicators*, Proceedings of ECOS 2005, Trondheim, Norway, June 2005, p. 61-68.
- IONITA I., *Extending thermoeconomic analysis by cost to quality optimization*, Proceedings ECOS 2002, July 3-5, Berlin, Germany, p. 1434-1441
- LE GOFF P., Comment présenter le concept de dégradation d'énergie, *L'actualité chimique*, 1980, février, p. 35-40
- LE GOFF P., LABIDI J., Bilan économique des procédés industriels, *Entropie*, n° 205, 1997, p. 33-39
- MENDERS J.M., *Génétiques et réseaux de neurones*, Hermès, 1995, Collection Systèmes Complexes.
- OLSOMMER B., *Méthode d'optimisation thermoéconomique appliquée aux centrales d'incinération d'ordures, à cogénération avec appoint énergétique*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1998, Thèse n° 1784.
- PONTRIAGUINE L. *et al.*, *Théorie mathématique des processus optimaux*, Éditions de Moscou, 1974.
- RAJESH V.G, RAVINDRAN K.P., Optimum heat pipe design : a non linear programming approach, *Int. Com. Heat Mass Transfer*, 1997, Vol. 24, n° 3, p. 371-380.



- SCIUBBA E., MELLI R., *Artificial intelligence in thermal systems design concepts and applications*, New Science, 1998.
- SPATZ M.W., YANA MOTTA S.F., An evaluation of options for replacing HCFC22 in medium temperature refrigeration systems, *Int. Journal of Refrigeration*, 2004, Vol. 27, p. 475-483
- SZARGUT J., MORRIS D.R., Standard chemical energy of some elements on the planet earth, *Energy*, 1986, Vol. 11, p. 733-755.
- TAKASHI S., RYOHEI Y., KOICHI I., Optimal sizing of a heat pump/thermal storage system base on the linear programming method, *Int. J. of Energy Research*, 1995, Vol. 19, p. 665-674.



## **PARTIE 3**

---

# **LES APPLICATIONS DE L'ÉNERGÉTIQUE**



## Chapitre 12

# Isolation – conduction

### 12.1 INTRODUCTION

#### 12.1.1 Les problèmes du transfert thermique en paroi

La rareté et le coût de l'énergie s'amplifiant avec le temps, la problématique des économies d'énergie (ou de l'utilisation rationnelle de l'énergie, URE) demeure une préoccupation actuelle et récurrente depuis trente ans, tant dans le domaine industriel que dans l'habitat, domaine plus connu de tout un chacun.

L'évolution de la réglementation dans ce domaine se poursuit, bien que le gisement des économies d'énergie devienne de plus en plus difficile à exploiter : les économies faciles étant réalisées, il faut évoluer vers plus de connaissances, plus de savoir-faire et plus de technicité, tout en restant à coût raisonnable pour les applications communes. On mettra à part les applications du domaine cryogénique (TBT, très basses températures) et les applications spatiales.

Toutefois, la focalisation sur l'isolation cache une autre face du problème qui est au contraire l'utilisation d'un transfert de chaleur en paroi, par exemple dans les échangeurs de chaleur (voir chapitre 13) ou dans les foyers de chaudière.

Le problème général est donc celui du transfert de chaleur à travers une paroi matérielle, mais avec une inversion des objectifs (opposition) qui apparaît dans le tableau 12.1 ci-après.

**TABLEAU 12.1** LES PROBLÈMES DU TRANSFERT DE CHALEUR EN PAROI

Fonction de la paroi	Isolation	Conduction
Nature idéale de la paroi	Adiabatique (athermane)	Diathermane
Objectif	Min déperdition	MAX transfert thermique

Le milieu support du transfert n'étant pas parfait, il apparaît deux objectifs diamétralement opposés selon l'application visée.

L'isolation thermique d'un milieu s'appuie sur une paroi telle que les déperditions soient les plus petites possibles : FO, minimisation des pertes thermiques, le cas limite étant une frontière adiabatique.

La recherche d'un transfert thermique efficace de part et d'autre d'une paroi suppose, au contraire, un matériau de paroi (et une configuration) le plus conducteur possible : FO, maximisation des transferts en paroi, le cas limite étant une frontière diathermane qui peut être approchée par un contact direct lorsque cela est possible ; ce point sera développé dans le chapitre 13.

Le présent chapitre est centré sur l'isolation thermique. Néanmoins, les bases physiques des deux problèmes restent identiques ; elles sont résumées au paragraphe 2.

### 12.1.2 Deux typologies d'isolation

#### a) Définition d'un système ou d'un procédé d'isolation

Un dispositif isolant est un système ou procédé thermique inhibant le transfert de chaleur entre deux milieux (un milieu chaud à  $T_C$ , un milieu froid à  $T_F$ ) ; le transfert de chaleur  $\dot{Q}$  se fait sous le gradient de température existant.

La formalisation du problème en régime dynamique stationnaire s'écrit :

$$\dot{q} = K(T_C - T_F) = K \cdot \Delta T \quad (12.1)$$

$K$ , conductance de transfert du système

**Remarque :**  $\dot{Q}$  positif selon (12.1) est le flux de chaleur dirigé du chaud vers le froid.

La définition précédente (12.1) permet de préciser l'optimisation à effectuer en présence d'une contrainte (tableau 12.2).

TABLEAU 12.2 TRANSFERT DE CHALEUR EN PAROI CONTRAINT

F.O. d'isolation	F.O. de conduction	Contrainte
Min $K$	MAX $K$	$\Delta T$
Min $K$	MAX $K$	$\dot{q}$
Min $\Delta T$	MAX $\Delta T$	$K$

On ne discute ici que de l'isolation, laissant le soin au lecteur de transposer le discours en conduction.

La dernière ligne du tableau montre qu'à isolation imposée ( $K$ ), la déperdition minimale correspond à l'écart de température minimum (la limite étant l'équilibre thermique).

Par contre, à écart de température imposé, on recherchera le minimum de conductance thermique (maximum de résistance thermique) du système, qui conduira à la déperdition minimale. Dans le cas où la déperdition est imposée, l'écart de température sera maximal pour la valeur minimale de la conductance thermique.

### b) Les deux types principaux d'isolation

On distinguera l'isolation passive et l'isolation dynamique.

#### ► L'isolation dynamique

Cette forme d'isolation thermique, bien que très prometteuse, n'est pas encore très développée aujourd'hui.

On peut lui donner deux formes principales :

- L'isolation dynamique avec conversion d'énergie thermique : ce mode d'isolation reste plus du domaine de la recherche et de la démonstration que de l'application.
- L'isolation dynamique avec revalorisation d'énergie thermique (par échangeur ou PAC, pompe à chaleur) et (ou) stockage thermique : ce mode d'isolation est le plus courant ; on le rencontre tout particulièrement dans des applications à l'habitat.

On distinguera essentiellement quatre configurations pour l'isolation dynamique étudiée selon la configuration du système, le fluide utilisé étant l'air :

- les isolations pariétodynamiques : le fluide circule en cavité ;
- les isolations perméodynamiques : le fluide circule dans un matériau poreux ;
- les isolations héliodynamiques : le rayonnement solaire est alors valorisé, le mur Trombe relève de cette catégorie ;
- les isolations thermodynamiques : ces variantes mettent en œuvre une pompe à chaleur en vue de renforcer le potentiel thermique utile (voir le chapitre 15 sur les machines à cycles inverses).

Malgré leur intérêt, ces isolations dynamiques ne seront pas considérées dans cet ouvrage ; le lecteur est renvoyé vers la littérature spécialisée et (Feidt M.)

#### ► L'isolation passive

C'est l'isolation classique que nous connaissons dans le domaine de l'habitat et qui a donné lieu à une abondante littérature, dont un nombre conséquent d'articles dans les *Techniques de l'Ingénieur* ; on se contentera de citer l'article sur les vitrages à isolation thermique renforcée (Joret L. et Prost A.), vu l'importance pratique de cet exemple.

D'autres applications existent aussi dans des domaines plus industriels : isolation de fours, isolation de chaudières, isolation dans le domaine du froid (entrepôts, transports réfrigérés).

Ces cas seront considérés par la suite, ainsi que l'isolation thermique très basse température, vue son importance en cryogénie.

## 12.2 LES BASES DU MODÈLE DE CONDUCTION THERMIQUE

Le modèle est rapporté en 1D, selon le mode cartésien.

### 12.2.1 Les conséquences de la loi de Fourier

On a vu que la loi de Fourier phénoménologique fournit l'expression liant la densité surfacique de flux  $\overset{o}{q}''_{(x)}$ , au gradient de température au même point  $\frac{dT}{dx}$ , moyennant un coefficient de proportionnalité  $\lambda$ , la conductivité thermique du milieu :

$$\overset{o}{q}''_{(x)} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \quad (12.2)$$

Cette relation traduit l'orthogonalité du gradient à l'isotherme du milieu : les lignes de flux sont normales en chaque point aux isothermes correspondantes.

**Remarque :** l'écriture 3D (tridimensionnelle) de la loi de Fourier pour un point M d'un milieu homogène isotrope s'écrit :

$$\overset{o}{q}''(M) = -\lambda \cdot \text{grad}T(M)$$

#### a) Equation générale 1D de la conduction

L'équation de bilan d'énergie particularisée autour du point  $x$  conduit pour un élément de longueur  $dx$  à :

$$\overset{o}{q}''_{(x)} - \overset{o}{q}''(x+dx) - \rho C p \frac{dT}{dt} dx + \overset{o}{q}'''_{(x,t)} dx = 0 \quad (12.3)$$

Soit en développant  $\overset{o}{q}''$  à l'ordre 1 au voisinage de  $x$  et en injectant (12.2) :

$$\frac{d}{dx} \left[ \lambda(T) \frac{dT}{dx} \right] - \rho C p \frac{dT}{dt} + \overset{o}{q}'''_{(x,t)} = 0 \quad (12.4)$$

$\lambda$ , conductivité thermique en W/m.K, peut être fonction de la température (voir paragraphe 12.3).

$\overset{o}{q}'''_{(x,t)}$ , représente ici un terme source, qui peut varier dans l'espace et le temps.



**Remarque :** la dépendance de la température pour la conductivité thermique peut localement s'approximer sous une forme linéaire :  $\lambda = \lambda_0(1 + \beta T)$ .

Sur un domaine de température plus vaste, en particulier au voisinage de 0 K, l'approximation est moins satisfaisante (voir figure 12.1).

### b) Cas particuliers 1D de l'équation de conduction

#### ► Propriétés thermophysiques constantes

Le cas particulier le plus significatif est celui où les propriétés thermophysiques sont supposées constantes ; cela correspond par exemple à un domaine de température étroit.

Les études relatives à l'habitat relèvent typiquement de ce cas de figure.

L'équation correspondante cartésienne est :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{\dot{q}'''}{\lambda} = 0 \quad (12.5)$$

$a$ , la diffusivité thermique  $= \lambda / \rho C_p$  est aussi dans ce cas une constante.

#### ► Régime dynamique stationnaire avec sources

Cette particularisation d'ordre deux conduit à l'équation de Poisson :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}'''}{\lambda} = 0 \quad (12.6)$$

#### ► Régime dynamique stationnaire sans source

Cette équation correspond au problème du mur, très utile dans l'habitat ; l'équation correspondante est l'équation de Laplace :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (12.7)$$

Il y correspond un profil linéaire de température dans le mur.

#### ► Régime variable ou transitoire sans source

Ce problème est en fait le problème réel du mur, compte tenu de la variabilité des températures externes ou d'environnement avec l'instant de la journée (période journalière), puis avec l'instant dans l'année (période annuelle, par alternance saisonnière).

À la variabilité journalière puis saisonnière (deux constantes de temps), il faut ajouter le caractère aléatoire apporté par le climat (météorologie).

L'équation correspondante, dans ce schéma, est l'équation de Fourier qui prolonge les deux précédentes :

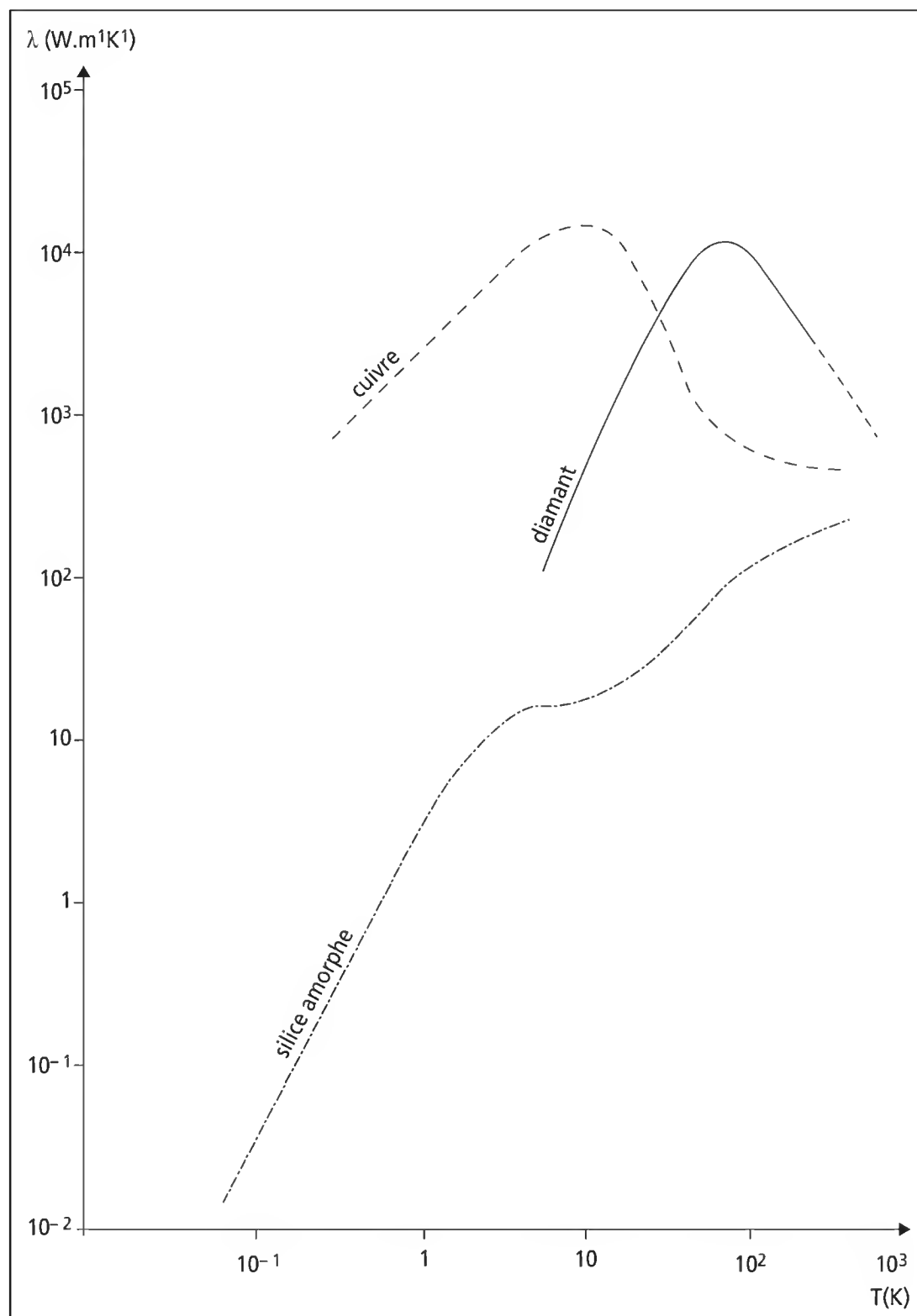


Figure 12.1 La conductivité thermique fonction de  $T$  la température

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{a} \frac{dT}{dt} = 0 \quad (12.8)$$

**Remarque 1 :** (12.8) montre clairement que la diffusivité  $a$  est reliée à la constante de temps du phénomène thermique ; cela sera précisé.

**Remarque 2 :** des études monodimensionnelles peuvent être réalisées sur des géométries cylindrique et sphérique (variable radiale).

L'expression de l'équation de conduction thermique en géométrie à symétrie cylindrique, en adoptant l'hypothèse d'effet de bout négligeable ( $T$ , non fonction de la position axiale dans le cylindre), est :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\overset{o}{q}'''}{\lambda} = 0 \quad (12.9)$$

Le lecteur peut prolonger l'exercice dans le cas de la géométrie sphérique.

### c) Importance des conditions aux limites et initiales

Les équations phénoménologiques précédentes dérivées à partir de la relation (12.5) sont mathématiquement des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre, qui admettent une infinité de solutions.

La détermination de la solution du modèle rendant compte des observations nécessite de préciser les conditions (causes) qui déterminent l'évolution du phénomène (irréversibilité des transferts de chaleur).

Il faut alors connaître :

- la condition initiale du système : à l'instant initial  $t_i = 0$  de la transformation, on a connaissance du champ de température  $T(M, 0) = T_o(M) \forall M \in V_c$  ;
- les conditions aux frontières : les conditions aux frontières (deux dans le cas du mur : face chaude, face froide) peuvent revêtir trois formes :
  - condition de température imposée (condition intensive ou de Dirichlet). Cette température  $T(M)$  peut dépendre du temps  $t$  ( $M \in A_c$ )
  - condition de densité surfacique de flux imposée (condition extensive, ou de Neumann).

Dans le cas du mur, cette condition s'écrit :

$$\overset{o}{q}''(M) = -\lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)_M, M \in A_c \quad (12.10)$$

$\overset{o}{q}''(M)$  peut dépendre de l'instant  $t$ .

- condition mixte à la frontière (ou condition de Fourier).

Le plus souvent cette condition fait intervenir un transfert de chaleur linéaire à la frontière :

$$\overset{o}{q}'(M) = -\lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)_M = h(M) (T(M) - T_\infty) \quad (12.11)$$

$h(M)$ , coefficient d'échange surfacique en  $M \in A_c$ .

On rapporte ci-après deux exemples significatifs.

► Frontière transférant la chaleur par rayonnement

Dans ce cas,  $\overset{o}{q}'(M)$  s'écrit :

$$\overset{o}{q}'(M) = \varepsilon_{eq} \sigma (T_M^4 - T_E^4) \quad (12.12)$$

$T_M, T_E$ , températures absolues respectivement de  $M \in A_c$ , et de l'environnement en regard.

$\varepsilon_{eq}$ , émissivité hémisphérique globale équivalente tenant compte des propriétés radiatives de la frontière  $A_c$  et de l'environnement en regard (enceinte), mais aussi de la géométrie des corps en présence. (12.10) et (12.12) permettent d'obtenir aisément une expression linéarisée de type (12.11) ; lorsque  $\Delta T = (T_M - T_E)$  est inférieur à 100 K, l'approximation reste acceptable avec :

$$h_r = 4\varepsilon_{eq} \sigma T_E^3 \quad (12.13)$$

$h_r$ , coefficient surfacique d'échange thermique radiatif.

► Frontière à l'interface de deux solides de nature différente

En appelant 1 et 2 chaque milieu conducteur, il vient pour la conduction à la frontière deux cas de figure illustrés par la figure 12.2.

Dans les deux cas de figure, la condition à la frontière s'écrit :

$$\lambda_1 \left( \frac{dT_1}{dx} \right)_{x=0} = \lambda_2 \left( \frac{dT_2}{dx} \right)_{x=0}$$

$T_1, T_2$ , températures variables respectives des milieux 1 et 2.

Ces deux variables nécessitent une relation supplémentaire pour lever l'indétermination.

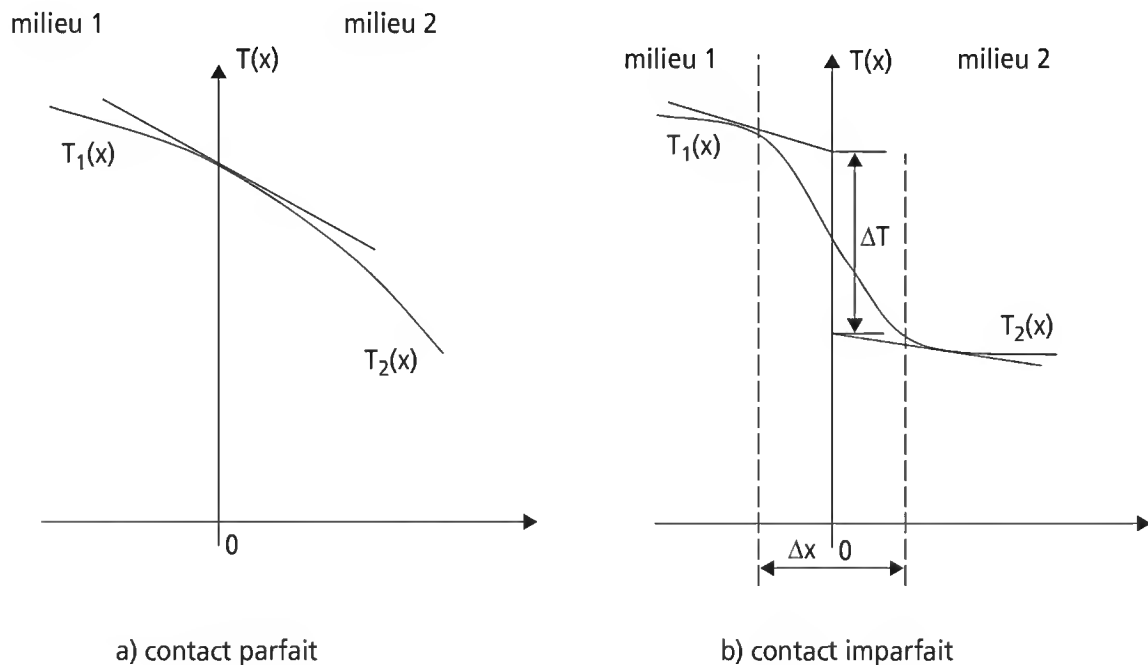


Figure 12.2 Conditions limites à l'interface entre les deux surfaces

### Contact thermique parfait

Dans ce cas,  $T_1(o) = T_2(o)$  (figure 12.2.a).

### Contact thermique imparfait

Ce cas correspond au cas réel.

Quelques exemples :

- zones de transition entre deux matériaux (soudure, brasure, collage) ;
- évacuation de chaleur au contact entre deux pièces en mouvement (mouvement de rotation : contact arbre-palier), mouvement de translation : soupape-siège de soupape) ;
- transfert de chaleur entre un milieu pulvérulent ou granulaire et une paroi matérielle.

La figure 12.2.b fait alors apparaître un saut de température  $\Delta T$ , dans la zone de transition  $\Delta x$  ( $\Delta x$ , petit) tel que :

$$R_c'' \cdot \dot{q}''(o) = \Delta T(o) \quad (12.14)$$

La relation (12.14) est la relation de définition de la résistance de contact surfacique  $R_c''$ .

**Remarque :** cette résistance de contact est équivalente à l'inverse d'un coefficient global surfacique de transfert à l'interface.

### 12.2.2 Deux exemples fondamentaux

Les deux exemples analytiques ci-dessous sont fondamentaux pour les applications en énergétique. Il s'agit successivement du mur, puis du tube.

#### a) Le mur plan

Dans la majorité des applications à l'habitat, le problème traite du mur plan à frontières isothermes.

##### ► Mur plan en régime dynamique stationnaire à températures de parois imposées

La figure 12.3 rend compte du résultat associé au modèle ; celui-ci résulte directement de (12.7) et des deux conditions limites annoncées.

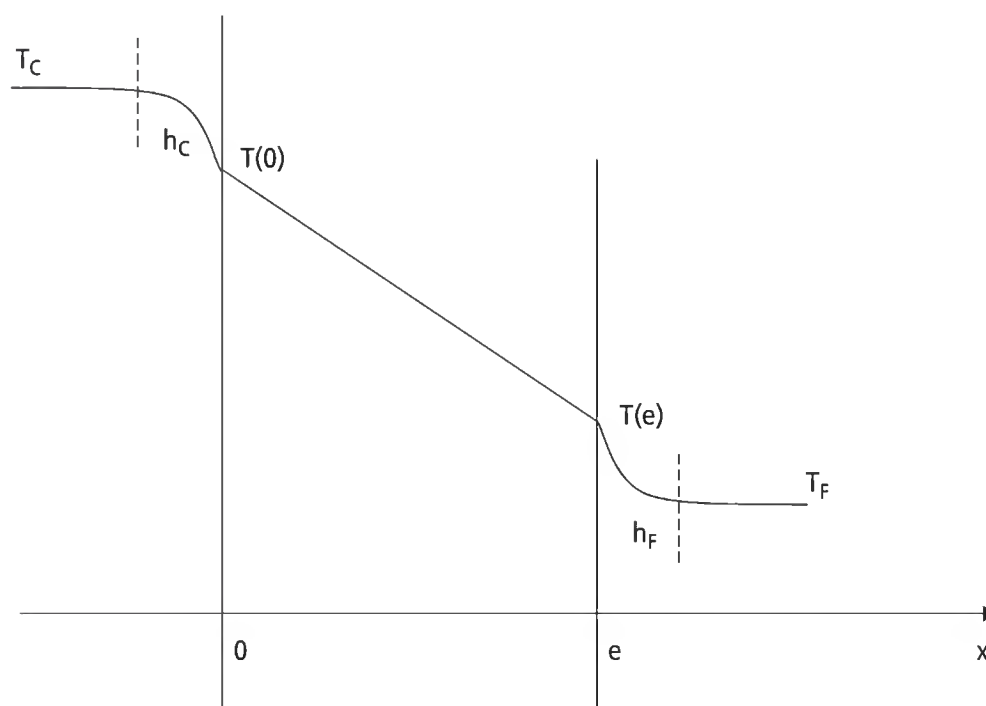
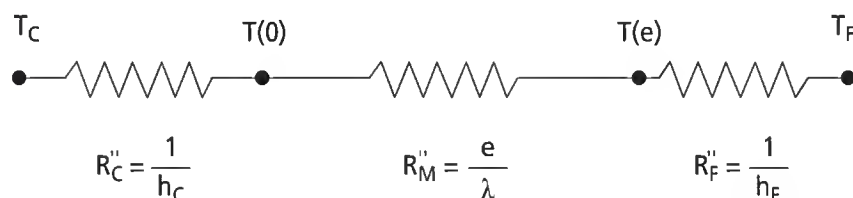


Figure 12.3 Schématisation du mur plan en régime dynamique stationnaire

Il vient :

$$T(x) = T(o) + \frac{T(e) - T(o)}{e} \cdot x \quad (12.15)$$

D'où :

$$\overset{o}{q}''(x) = \lambda \cdot \frac{T(o) - T(e)}{e} = cte > 0 \quad (12.16)$$

En rappelant que  $\overset{o}{S}''(x) = \frac{\overset{o}{q}''}{T}$ , on détermine la création d'entropie locale due à l'irréversibilité du transfert conductif :

$$\overset{o}{S}''(x) = \frac{\lambda \cdot T'}{T(o) - T' \cdot x}$$

en posant  $T' = (T(o) - T(e)) / e > 0$ .

Par intégration sur l'épaisseur du mur, on en déduit la création d'entropie par irréversibilité conductive dans le mur :

$$\overset{o}{S}'(W / m.K) = \lambda T' \ln \left[ \frac{T(o)}{T(e)} \right]$$

► Mur plan en régime dynamique stationnaire en contact avec deux fluides

Conformément à la figure 12.3, il y a lieu d'ajouter dans ce cas la continuité du flux de chaleur au transfert du fluide chaud vers la paroi chaude, puis de la paroi froide vers le fluide froid :

$$\overset{o}{q}'' = h_c (T_c - T(o)) \quad (12.17)$$

$$\overset{o}{q}'' = h_f (T(e) - T_f) \quad (12.18)$$

$h_c, h_f$ , coefficients de transfert thermique globaux aux interfaces chaude et froide.

**Remarque :** selon les cas de figure considérés aux interfaces, les coefficients globaux  $h$  intègrent les transferts convectifs  $h_c$  et les transferts radiatifs (voir la relation (12.13)), ou chacun séparément.

L'analogie électrique représentée sur la figure 12.3 montre le couplage en série des résistances thermiques surfaciques chaude et froide avec la résistance thermique conductive du milieu,  $R_M'' = \frac{e}{\lambda}$ . Il vient ainsi :

$$q'' = \frac{T_C - T(o)}{1/h_C} = \frac{T(o) - T(e)}{e/\lambda} = \frac{T(e) - T_F}{1/h_F}$$

D'où :

$$q'' = \frac{T_C - T_F}{R''}$$

avec  $R''$ , résistance thermique surfacique totale entre le fluide chaud et le fluide froid, telle que :

$$R'' = \frac{1}{k} = \frac{1}{h_C} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_F} \quad (12.19)$$

$k$ , représente la conductance globale surfacique du mur ( $W / m^2.K$ ).

Il est important de noter que le transfert thermique à travers un mur (application à l'habitat) n'est pas un problème lié uniquement au transfert conductif (12.19), mais aussi aux transferts convectifs et (ou) radiatifs aux interfaces.

**Remarque :** le raisonnement précédent s'étend facilement par récurrence au mur composé (mise en série de plusieurs milieux), et au mur cloisonné (mise en série et en parallèle de plusieurs milieux). Des optimisations de structures peuvent s'ensuivre.

### b) Le tube cylindrique à surfaces isothermes

De même que le problème du mur plan représente le cas limite simple d'une plaque d'échangeur à plaque, le tube cylindrique est le motif élémentaire des échangeurs de chaleur à tube ; son importance pratique justifie les notions introduites ci-après, mais d'autres applications relèvent de la même problématique, comme il sera illustré plus loin (isolation de tubes ou câbles).

En régime dynamique stationnaire, l'équation à résoudre est un cas particulier de (12.9) (voir figure 12.4) :

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0$$

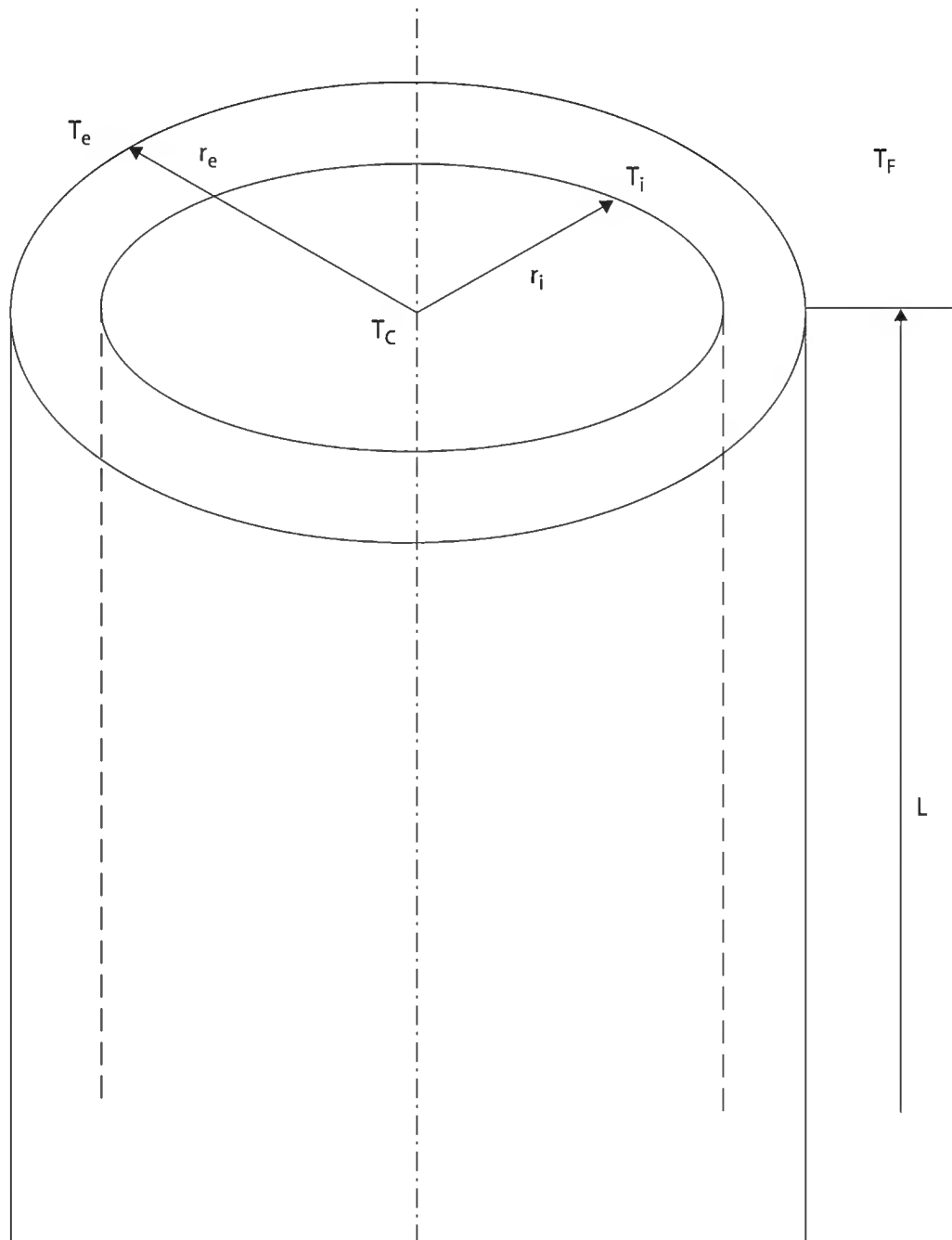
avec :

$$T(r_i) = T_i ; T(r_e) = T_e \quad (12.20)$$

L'intégration double de l'équation (12.20) accompagnée des deux conditions aux limites conduit à :

$$T(r) = T_i + \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{r_i}{r_e}} \cdot \ln \frac{r}{r_i} \quad (12.21)$$





**Figure 12.4** Schématisation de la conduction en régime dynamique stationnaire en tube ( $r_e \ll L$ ).

$$q''(r) = -\lambda \cdot \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{r_i}{r_e}} \cdot \frac{1}{r} \quad (12.22)$$

$$q = 2\pi\lambda L \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \quad (12.23)$$

**Remarque :** l'expression de la résistance de transfert thermique en résulte :

$$R = \ln \frac{r_e}{r_i} / 2\pi\lambda L.$$

► Cas du tube mince (d'épaisseur  $e$ )

Dans d'assez nombreux cas de figure, l'épaisseur du tube reste faible par rapport aux dimensions transverses  $\left(\frac{e}{r_i} < 0,10\right)$  ; dans ce cas :

$$\ln \frac{r_e}{r_i} = \ln \left(1 + \frac{e}{r_i}\right) \sim \frac{e}{r_i}$$

Les relations (12.22) et (12.23) deviennent alors :

$$\begin{aligned} q''(r) &= \frac{\lambda}{e} (T_i - T_e) \frac{r_i}{r} \\ q &= \frac{2\pi r_i \lambda L}{e} (T_i - T_e) \end{aligned}$$

Cette approximation est une approximation courante dans le calcul des échangeurs tubulaires (voir chapitre 13).

Les résultats de ce paragraphe sont utiles dans les applications en calorifugeage de tube d'une part, et en isolation électrique de câble d'autre part. Avant que d'examiner ces deux applications, on propose d'étendre le raisonnement aux conditions limites de Neumann.

► Cas du tube parcouru par un fluide chaud interne et un fluide froid externe

La figure 12.4 reste valable ; on précise seulement que le fluide interne supposé chaud à  $T_c$  échange de la chaleur en  $r = r_i$  avec la paroi à  $T_i$ , à travers un coefficient de transfert surfacique  $h_c$  ; de même pour le fluide froid extérieur à  $T_F$ , en  $r = r_e$ , avec la paroi à  $T_e$ , à travers le coefficient de transfert surfacique  $h_F$ .

Par analogie avec la figure 12.2, on trouve pour le flux de chaleur transféré :

$$q = \frac{T_c - T_i}{1 / 2\pi r_i L h_c} = \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{r_e}{r_i} / 2\pi\lambda L} = \frac{T_e - T_F}{1 / 2\pi r_e L h_F}$$

d'où l'expression de la résistance thermique globale :

$$R = \frac{1}{2\pi L} \left[ \frac{1}{r_i h_c} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{\lambda} + \frac{1}{r_e h_F} \right] \quad (12.24)$$

**Remarque 1 :** en géométrie cylindrique (comme en géométrie sphérique), le régime dynamique stationnaire conserve  $\dot{q}$ , mais pas la densité surfacique de flux  $\dot{q}''$ .

**Remarque 2 :** le transfert thermique entre fluides à travers un tube n'est pas uniquement un transfert conductif : il fait aussi intervenir les transferts convectifs et (ou) radiatifs.

### ► Applications en géométrie cylindrique

Optimisation du calorifugeage d'une canalisation de transfert d'un fluide thermique  
La figure 12.5 représente une coupe du tube revêtu de son isolation ( $\lambda$ , conductivité du tube,  $\lambda'$ , conductivité de l'isolant).

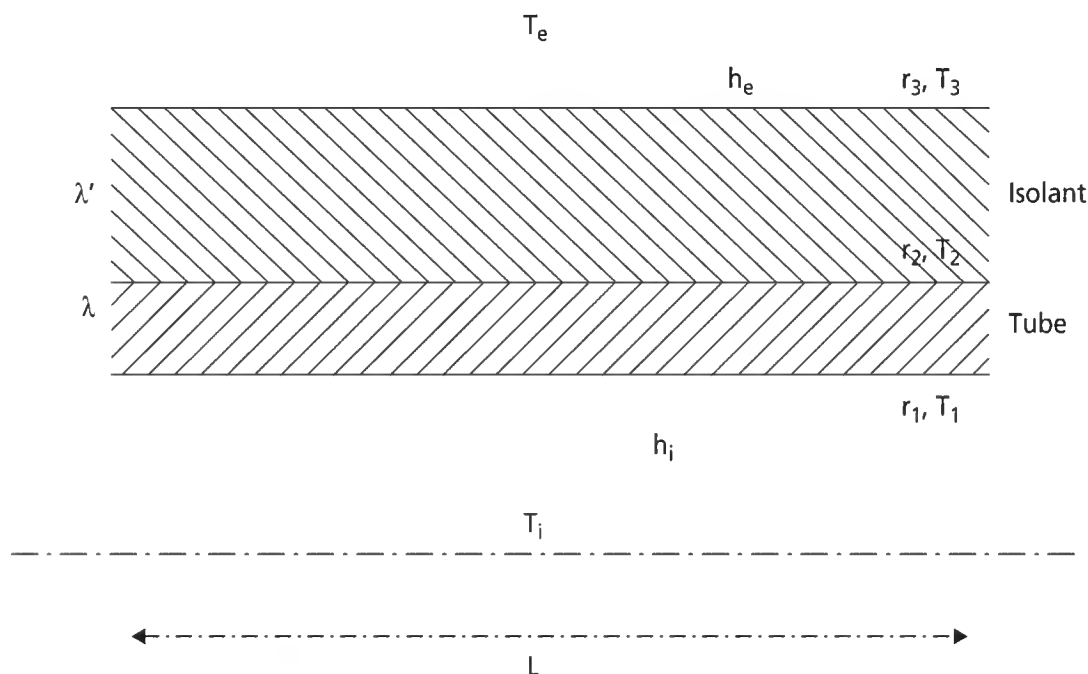


Figure 12.5 Schéma en coupe d'un tube isolé

En supposant un contact thermique parfait entre le tube et l'isolant en  $r_2$ , la conservation du flux  $\dot{q}$  en régime dynamique stationnaire conduit à :

$$\dot{q} = 2\pi r_i L h_i (T_i - T_1) = \frac{2\pi \lambda L (T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi \lambda' L (T_2 - T_3)}{\ln \frac{r_3}{r_2}} = 2\pi r_3 L h_e (T_3 - T_e)$$

On en déduit la résistance thermique globale :

$$R = \frac{T_i - T_e}{\dot{q}} = \frac{1}{2\pi L} \left[ \frac{1}{r_1 h_i} + \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda} + \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\lambda'} + \frac{1}{r_3 h_e} \right] \quad (12.25)$$

L'optimisation proposée ici suppose  $r_1$  et  $r_2$  fixés par les conditions d'écoulement et de tenue mécanique du tube (pression, rigidité) ; si de plus  $\Delta T = T_i - T_e$  est fixé, la minimisation des pertes thermiques se produit lorsque  $R$  est maximum (voir tableau 12.2).

L'épaisseur optimale du calorifugeage ( $r_3 - r_2$ ) correspond à  $r_3$  tel que :

$$r_3 = \frac{\lambda'}{h_e}$$

**Remarque 1 :** utiliser une épaisseur d'isolant avec  $r > r_3$  augmenterait les pertes thermiques.

**Remarque 2 :** l'effet recherché est opposé pour les câbles électriques isolés, pour lesquels on cherche à minimiser l'échauffement (pour diminuer les pertes électriques) : voir le paragraphe 12.4.3.

### 12.2.3 L'analyse entropique et exergetique en conduction

On complète ici l'étude précédente par l'analyse entropique, puis l'analyse exergetique de la conduction.

#### a) Analyse entropique

La formulation du modèle de conduction en régime dynamique stationnaire associé à un jeu de conditions aux frontières prend une forme différente si on établit ce modèle à partir du théorème du minimum de génération d'entropie de Prigogine.

On sait que la création locale d'entropie en géométrie 1D (problème du mur plan) s'écrit :

$$\dot{S}_i''' = \frac{\lambda(T)}{T^2} \cdot \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 \quad (12.26)$$

On remarque que  $T$  est une fonction de  $x$ , qui satisfait les conditions aux limites conformément à la figure 12.6.

La création d'entropie locale est une fonction de  $T$  et de son gradient  $dT/dx$ .

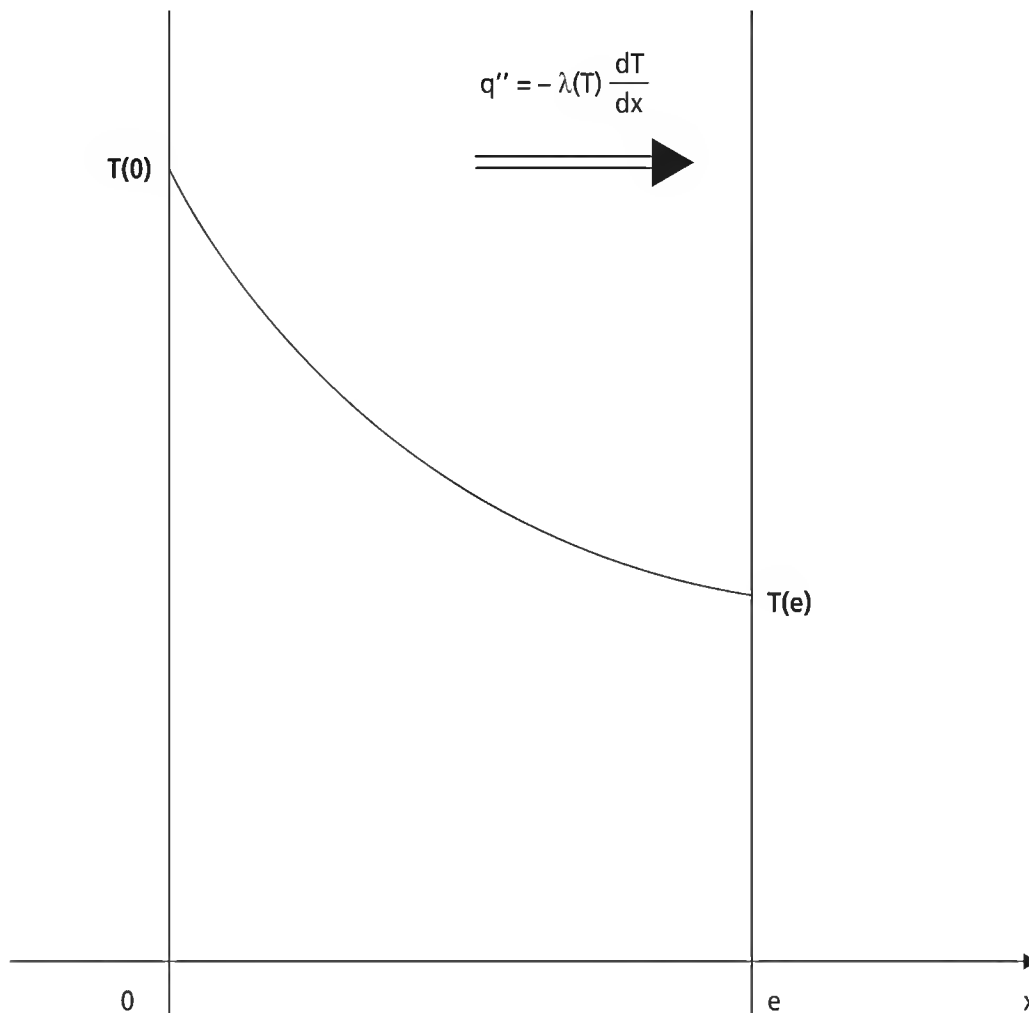


Figure 12.6

Le problème de conduction dans le mur plan correspond alors à la recherche du profil de température  $T(x)$  (champ de température) dans le mur qui satisfait aux conditions aux limites et minimise par ailleurs l'intégrale suivante dans le mur :

$$\overset{o}{S}_i'' = \int_0^e \overset{o}{S}_i''' \left( T, \frac{dT}{dx} \right) dx \quad (12.27)$$

Cette intégrale représente la densité surfacique de création d'entropie dans l'épaisseur du mur.

En utilisant le calcul variationnel (chapitre 11 paragraphe 3.2.b), on voit que la fonction  $T(x)$  associée au minimum de  $\overset{o}{S}_i''$  satisfait l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial \overset{o}{S}_i''}{\partial T} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial \overset{o}{S}_i''}{\partial \left( \frac{dT}{dx} \right)} \right] = 0 \quad (12.28)$$

**Remarque :** l'extension en tridimensionnel cartésien est immédiate.

La combinaison de (12.26) et (12.27) conduit à :

$$S_i'' = \int_o^e \frac{\lambda(T)}{T^2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dx \quad (12.29)$$

La combinaison de (12.28) et (12.29) conduit à :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 = 0 \quad (12.30)$$

si on suppose  $\lambda$ , constante (non fonction de la température).

Il en résulte par intégration le profil de température suivant :

$$T(x) = T(o) \left( \frac{T(e)}{T(o)} \right)^{\frac{x}{e}} \quad (12.31)$$

**Remarque 1 :** ce résultat conduit à une contradiction apparente avec le

premier principe de la thermodynamique qui veut que  $\frac{d}{dx} \left( \frac{o}{q''(x)} \right) = 0$ , puis

avec le fait que  $\frac{d}{dx} \left( \frac{\frac{o}{q''(x)}}{T(x)} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{o}{S''(x)} \right) = 0$  (transfert de chaleur par conduction réversible !).

**Remarque 2 :** Si  $T(e) \sim T(o)$ , le développement à l'ordre 1 du profil fourni par (12.31) restitue le profil linéaire ; cette approximation correspond au cas où  $e$  reste petit par rapport aux dimensions transverses (approximation du mur plan). Dans tous les cas, le hors équilibre conductif ne doit pas être grand.

Le tableau (12.3) résume les résultats obtenus selon l'approche classique (loi de Fourier), ou le théorème du minimum de création d'entropie, dans le cas étudié.

L'explication de ce paradoxe peut se faire en considérant que le second terme de l'équation (12.30) correspond en fait à un terme puits d'énergie interne calorifique associée à l'irréversibilité du transfert :

$$\frac{o}{q'''(x)} = -\frac{\lambda}{T} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 < 0$$

Alors, le premier principe de la thermodynamique est satisfait par l'équation de conduction, et la création d'entropie totale à travers le mur devient :

$$S_i'' = -\int_o^e \frac{\frac{o}{q'''(x)}}{T(x)} dx = \frac{\lambda}{e^2} \left[ \ln \frac{T(e)}{T(o)} \right]^2 > 0$$

**TABEAU 12.3** COMPARAISON DE LA CONDUCTION SELON L'APPROCHE CLASSIQUE (THERMOCINÉTIQUE) OU L'ANALYSE ENTROPIQUE.

	Approche classique Thermocinétique	Minimum de création d'entropie
Équation de conduction	$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$	$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{T} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 = 0$
Fonction minimisée	$\lambda \int_o^e \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dx$	$\lambda \int_o^e \frac{1}{T^2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dx$
Profil de température	$T(x) = T(o) + \frac{x}{e} [T(e) - T(o)]$	$T(x) = T(o) \left( \frac{T(e)}{T(o)} \right)^{\frac{x}{e}}$
Création d'entropie totale	$\dot{S}_i = \lambda [T(o) - T(e)] \left[ \frac{1}{T(e)} - \frac{1}{T(o)} \right]$	$\dot{S}_i = \lambda \left[ \ln \frac{T(o)}{T(e)} \right]^2$

Ce qui satisfait le second principe d'une part, et le théorème du minimum de production d'entropie d'autre part.

**Remarque :** le calcul précédent peut être étendu dans le cas d'une conductivité fonction de  $T$ , ainsi qu'en 2 et 3 dimensions (Kolenda Z.S.).

La conduction avec terme source ou puits va être reprise par la suite, vu son utilité pratique.

### b) Analyse exergétique

Cette analyse est aussi proposée dans le cas du mur plan ; elle a pour but de s'affranchir de valeurs arbitraires, en considérant un barème de valeur exergétique, appliqué aussi au coût exergétique d'élaboration de la paroi (exergonomie) ; on considère aussi une exergie investie dans le mur (matériau, façonnage, auxquels on peut rajouter l'exergie informationnelle) :

$$E_{xi} = A.e.\rho e_{xi} \quad (12.32)$$

$A$ , surface du mur

$\rho$ , masse volumique du mur

$e_{xi}$ , exergie spécifique massique investie dans le mur.

À l'énergie investie (12.32), correspondent des exergies de fonctionnement ; en régime dynamique stationnaire, la figure 12.6 montre que le flux échangé à travers le mur vaut :

$$\overset{o}{q} = A.kg [T(o) - T(e)] = A.kg.\Delta T$$

kg, coefficient global de transfert surfacique (constant).

Il en résulte :

- le flux exergétique d'entrée (la ressource)

$$\overset{o}{Ex}_R = \overset{o}{Ex}(o) = A.kg.\Delta T \frac{T(o) - T_o}{T(o)}$$

- le flux exergétique de sortie (le produit)

$$\overset{o}{Ex}_p = \overset{o}{Ex}(e) = A.kg.\Delta T \frac{T(e) - T_o}{T(e)}$$

$T_o$ , température de référence ou d'environnement (l'ambiance).

**Remarque 1 :** si  $T(x) > T_o \forall x$ , on reconnaît le cas du mur d'un local chauffé ;  
si  $T(x) < T_o \forall x$ , on reconnaît le cas du mur d'entrepôt frigorifique. On considérera ici le premier cas ( $T > T_o$ ).

**Remarque 2 :**  $\overset{o}{Ex}_R > \overset{o}{Ex}_p$  ; la différence des deux flux, représente le flux d'exergie détruite  $\overset{o}{Ex}_D$  (ou anergie).

On en déduit le rendement exergétique de transfert :

$$\eta = \frac{\overset{o}{Ex}_p}{\overset{o}{Ex}_R} = \frac{T(e) - T_o}{T(o) - T_o} \cdot \frac{T(o)}{T(e)} \quad (12.33)$$

**Remarque :** si  $\Delta T \rightarrow 0, \eta_{ex} \rightarrow 1$  ;  $A \rightarrow \infty$  à  $\overset{o}{q}$  donné.

Il apparaît bien sur l'expression (12.33) un compromis nécessaire avec la dimension du système (dimension finie). Le critère proposé est une consommation globale (totale) d'exergie sur la durée de vie  $\tau$  du système (le mur).

**Remarque :** vu la géométrie 1D modélisée, le raisonnement peut être conduit en spécifique surfacique.

Cette consommation globale d'exergie  $c_{exs}$  à minimiser, correspond à l'inverse du rendement exergétique global  $\eta_{exg}$ , conformément à :



$$c_{exs} = \frac{1}{\eta_{exg}} = \frac{Ex_R + Ex_i}{Ex_p} = \frac{1}{\eta_{ex}} + \frac{1}{K_{ex}} \quad (12.34)$$

$K_{ex}$ , coefficient exergetique du système tel que :

$$K_{ex} = \beta \Delta T \cdot \frac{T(e) - T_o}{T(e)}$$

$$\text{avec : } \beta = \frac{kg\tau}{e\rho e_{xi}}$$

Quelques calculs simples conduisent à l'expression de  $c_{exs}$ , en fonction de la variable  $\Delta T$  et des paramètres  $T(e), T_o, \beta$  :

$$c_{exs} = \frac{T(e)}{T(e) - T_o} \left[ 1 - \frac{T_o}{T(e)} + \frac{1}{\beta} \frac{1}{T} \right] \quad (12.35)$$

La dérivation conduit au minimum de  $c_{exs} (MAX \eta_{exg})$  tel que :

$$\frac{\Delta T_{opt}}{T(e)} = \frac{1}{\sqrt{\beta T_o} - 1}$$

où :

$$\frac{\Delta T_{opt}}{T_o} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta T_o} - 1} \quad (12.36)$$

avec :  $\alpha = T(e) / T_o$ .

La figure 12.7 donne une allure des courbes de rendement exergetique global maximal, et de la variable à l'optimum en fonction des paramètres  $\sqrt{\beta T_o}$  et  $\alpha$ .

L'analyse précédente peut être transposée au cas où  $T < T_o$ , ainsi qu'aux parois d'échangeurs de chaleur (Iantovski E.).

## 12.3 LES MÉCANISMES DE LA CONDUCTION : NOTIONS ET CONSÉQUENCES

### 12.3.1 Notions sur les mécanismes de conduction dans les matériaux massifs

La compréhension des mécanismes de conduction dans les solides passe par l'usage de la thermodynamique statistique et sort donc du champ de cet ouvrage. Un certain

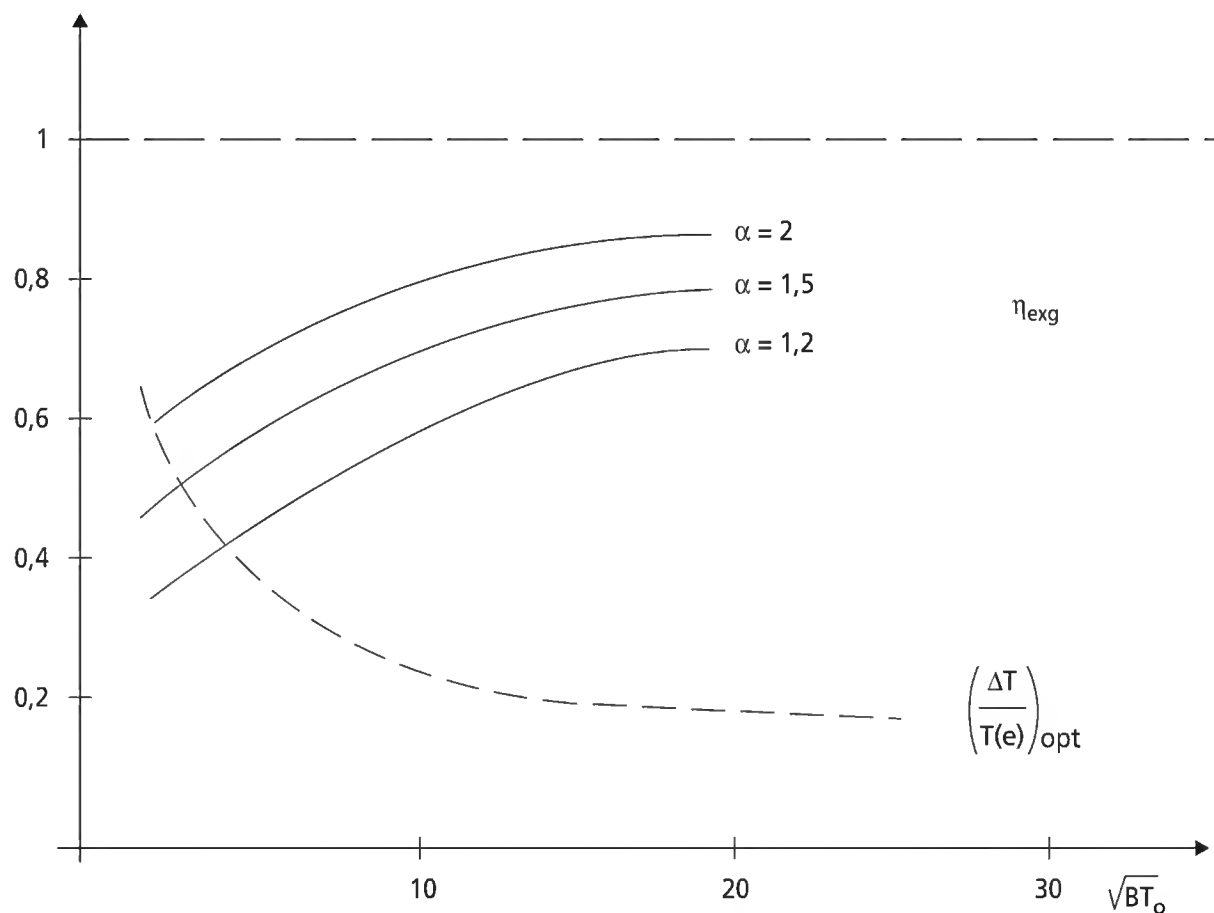


Figure 12.7 Sensibilité paramétrique de l'optimum exergétique du mur plan.

nombre de lois en résulte, dont la loi bien connue de Wiedemann et Franz (1853), qui indique une proportionnalité formelle entre conductivité électrique et conductivité thermique ; mais cette loi basée sur la théorie des solides, appliquée surtout aux métaux ne met en avant que la contribution des électrons à la conductivité (conductivité électronique).

Hors il existe d'autres matériaux massifs aux propriétés conductrices différentes (les semi-métaux, les matériaux amorphes, les composés d'intercalation à base de graphite). Pour ces matériaux, une seconde contribution apparaît associée aux vibrations acoustiques du réseau, de chaînes ou d'atomes ; ces ondes peuvent être représentées (dualité) par des particules appelés phonons (conductivité phonique).

La complémentarité de ces deux mécanismes permet de progresser dans la connaissance du phénomène de conduction, de la maîtrise de son anisotropie, mais aussi en direction du découplage des conductivités électrique et thermique (ce dernier point est très important dans la maîtrise et l'optimisation des phénomènes thermoélectriques (voir chapitre 18).

### 12.3.2 Conduction anisotrope

On vient de voir que certains matériaux pouvaient présenter des conductivités différentes selon les directions considérées. Exemples : composés d'insertion sur base

graphite (bonne conduction dans le plan lamellaire), matériau bois (matériau fibreux : bonne conduction dans le sens des fibres).

La modélisation ne peut plus être monodimensionnelle. Dans le cas général cartésien, le vecteur flux de chaleur local  $\vec{q}'' = \|\lambda\| \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}$ .

Le tenseur de conductivité  $\|\lambda\|$  a pour matrice image une matrice  $3 \times 3$ , dont la thermodynamique des phénomènes irréversibles généralisée impose la symétrie :  $\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ji}$ .

On indique dans le tableau 12.4 les formes simplifiées de la matrice tenant compte des diverses symétries correspondant aux systèmes cristallins classiques.

**TABLEAU 12.4** MATRICE IMAGE DES CONDUCTIVITÉS THERMIQUES SELON LA CRISTALLOGRAPHIE DE L'ÉLÉMENT.

Cristal	Matrice image de conductivité
Triclinique	Complète symétrique
Monoclinique	$\begin{vmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & 0 \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{vmatrix}$
Orthorhombique	$\begin{vmatrix} \lambda_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{vmatrix}$
Cubique	$\begin{vmatrix} \lambda_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{vmatrix}$
Tétragonal Trigonal Hexagonal	$\begin{vmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & 0 \\ -\lambda_{xy} & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{vmatrix}$

Remarque :  $\lambda_{xy} < 0$  pour le cristal trigonal.

Nous n'irons pas plus avant sur ce point malgré le potentiel d'application ; en effet, le domaine de l'ingénieur se contente encore le plus souvent d'une conductivité isotrope pour les solides. Le tableau 12.5 rapporte de quelques exemples d'usage courant pour des matériaux conducteurs, puis des matériaux isolants.

On notera que les matériaux conducteurs (diamant, argent, or) ont des conductivités de l'ordre de  $10^3 W / m.K$  ; les matériaux de type mousse, poudre, fibre, plastique de l'ordre de  $10^{-1} W / m.K$ , les matériaux multicouches et sous vide  $10^{-5} W / m.K$ .

Ce sont des matériaux que nous allons examiner succinctement dans le paragraphe suivant, vu les applications en isolation thermique.

**TABEAU 12.5** CARACTÉRISTIQUES DE CONDUCTION THERMIQUES DE QUELQUES MATÉRIAUX SOLIDES À TEMPÉRATURE AMBIANTE.

Solides (kg/m <sup>3</sup> )	Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	Chaleur spécifique (kJ/Kg.K)	Conductibilité thermique (W/m.K)	Diffusivité (m <sup>2</sup> /s)
Corps thermiquement conducteurs				
Acier (0,1C)	7 850	0,49	46	$0,12 \times 10^{-4}$
Aluminium	2 700	0,86	200	$0,86 \times 10^{-4}$
Argent	10 500	0,23	418	$1,71 \times 10^{-4}$
Cuivre	8 940	0,38	389	$1,14 \times 10^{-4}$
Inox (18/8)	7 900	0,51	16	$0,04 \times 10^{-4}$
Laiton (70 Cu 30 Zn)	8 500	0,37	100	$0,33 \times 10^{-4}$
Corps thermiquement isolants				
Béton	2 300	0,96	0,92	$0,42 \times 10^{-6}$
Bois	410	1,25	0,23	$0,45 \times 10^{-6}$
Granit	2 600	0,87	2,5	$1,10 \times 10^{-6}$
Laine de verre	200	0,67	0,04	$0,30 \times 10^{-6}$
Polycarbonate	1 200	1,25	0,23	$0,15 \times 10^{-6}$
PVC	1 380	1	0,16	$0,12 \times 10^{-6}$
Verre	2 530	0,84	1,2	$0,58 \times 10^{-6}$

### 12.3.3 Les tendances actuelles en matériaux isolants

#### a) Les domaines porteurs

La production de masse en isolation vise essentiellement à l'isolation de l'habitat, puis aux isolants utilisés dans les techniques du froid ; les exemples de matériaux sont alors de trois types :

- les matériaux cellulaires : mousses de polystyrène, de polyuréthane, de verre, d'élastomères ; le liège expansé ( $\lambda \sim 3,510^{-2} W / m.K$ ) ;
- les matériaux fibreux : laines de verre, de roche ;
- les matrices poreuses : poudres isolantes.

**Remarque :** d'autres matériaux ne figurent pas dans ces catégories : les plastiques, les céramiques.

En revanche, deux applications ne connaissent pas de limitations aussi importantes du côté des coûts, ce qui donne lieu à l'élaboration de produits de haute performance ; il s'agit du domaine aérospace et de la cryogénie : les conductivités

visées sont de l'ordre de  $10^{-5} \text{ W / m.K}$  (combinaison des systèmes multicouches et du vide).

Ces deux applications particulières (cryogénie et aérospatiale) utilisent des configurations visant à minimiser les phénomènes convectifs et radiatifs dans les structures ; la structure apporte la résistance mécanique nécessaire, mais participe aussi à l'atténuation des transferts en complément d'air ou de gaz, mauvais conducteurs thermiques (voire de vide).

Pour cela, les structures en nid d'abeille sont utiles, de même que les matériaux poreux, fibreux ou pulvérulents.

Il reste à maîtriser les phénomènes en jouant sur la dimension caractéristique de structure (pore : 1 mm ; micropore), puis sur les composants (matériau isolant ; gaz).

### *b) Notion de conductivité équivalente (apparente)*

Les modèles qui permettent de rendre compte de cette notion sont nombreux ; les deux modèles limites sont les modèles série et parallèle (où les deux milieux solide et gaz sont respectivement en série ou en parallèle). Le lecteur intéressé par les détails pourra se référer à la littérature dont (Onyebuke L.).

On se contentera ici de rapporter pour usage les résultats essentiels.

#### ➤ Définition de la conductivité équivalente

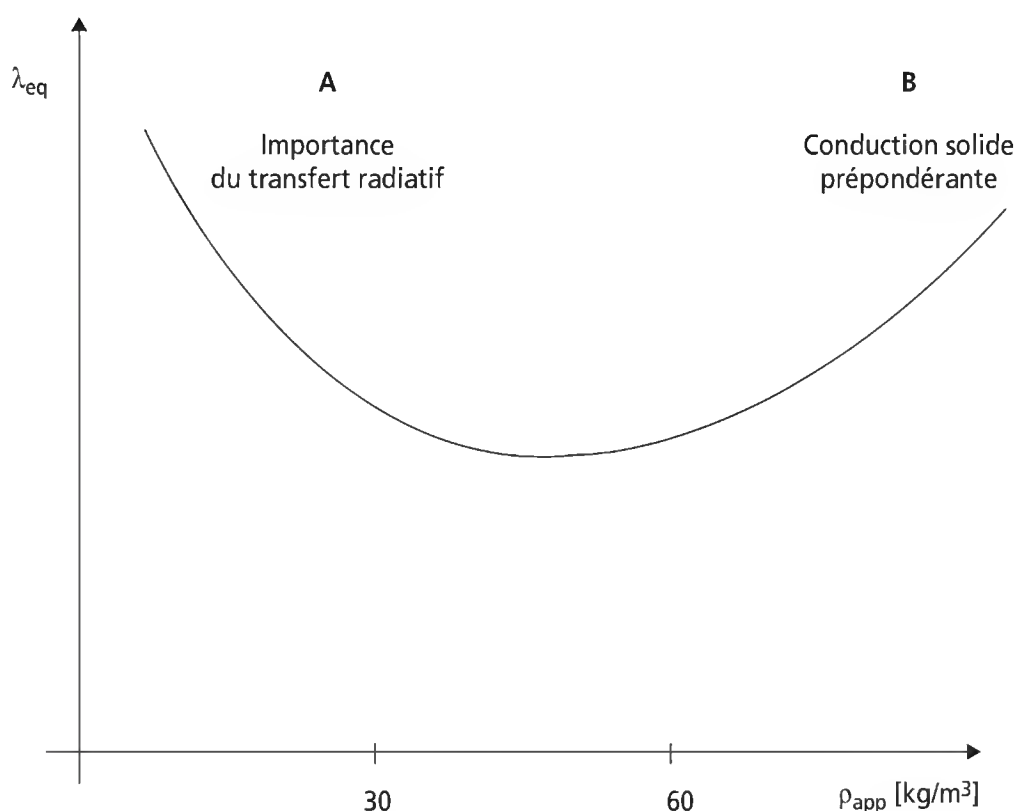
La conductivité équivalente a un milieu non homogène, est la valeur de la conductivité du milieu homogène équivalent, qui rend compte des transferts conductifs dans chacun des composants, mais aussi (éventuellement) des transferts convectifs et surtout radiatifs associés.

Cette conductivité est une fonction de la nature du matériau isolant, mais aussi de sa porosité (ouverte ou fermée). C'est aussi une fonction du milieu remplissant la porosité ; la conductivité apparente est donc une fonction privilégiée (1<sup>er</sup> ordre) de la masse volumique apparente du matériau isolant.

**Remarque :** le plus souvent, le milieu isolant comporte une matrice solide, dont la porosité est remplie de gaz (2<sup>e</sup> milieu) (ou vide).

La figure 12.8 représente une évolution typique de la conductivité apparente d'un isolant, en fonction de sa masse volumique apparente  $\rho$  ; on y voit clairement l'existence d'un minimum de conductivité, recherché pour les applications en isolation ; par exemple pour les mousses de polyuréthane, à température ambiante et dans l'atmosphère ambiante, le minimum est observé pour  $\rho$  variant entre 30 et 60 kg/m<sup>3</sup>.

On remarquera qu'aux valeurs de  $\rho_{app}$  élevées, la conduction solide devient prépondérante, alors qu'à faible valeur de  $\rho_{app}$ , les phénomènes radiatifs provoquent une augmentation de la conductivité apparente : il existe donc un optimum de porosité.



**Figure 12.8** Évolution typique de la conductivité apparente à température et pression ambiantes pour un isolant à porosité ouverte.

### ► Sensibilité paramétrique de la conductivité apparente

La théorie cinétique des gaz permet de montrer que (voir paragraphe 14.4 sur la production et l'utilisation du vide) la conductivité d'un gaz  $\lambda_g$  est proportionnelle à :

$$\lambda_g \sim C_v \cdot \rho_g \cdot u \cdot \text{lpm} \quad (12.37)$$

$u$ , vitesse quadratique moyenne des particules  $\left(\sqrt{3kT/m}\right)$ .

$\text{lpm}$ , libre parcours moyen des particules ( $6 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ , dans les conditions normales de température et de pression CNTP).

On voit donc apparaître à travers cette relation la dépendance à la nature du gaz, mais aussi aux conditions de température et de pression.

### *Influence de la nature du gaz de remplissage*

Suite au protocole de Montréal (1987), l'usage des CFC, puis HCFC, voire les HFC, a été proscrit ; aussi, les gaz faiblement conducteurs thermiques dont on dispose sont l'air, le  $\text{CO}_2$ , voire des hydrocarbures. Dans les conditions d'ambiance (1 atmosphère ;  $0^\circ\text{C}$ ), l'air sec a une conductivité de  $0,024 \text{ W/mK}$ , le  $\text{CO}_2$   $0,014 \text{ W/mK}$ .

De façon générale et toutes choses égales par ailleurs, la conductivité thermique apparente d'un milieu est une fonction décroissante de la masse molaire du gaz de remplissage.

**Remarque :** l'usage de gaz différent du milieu ambiant suppose une étanchéité de paroi externe ou une porosité fermée. Il en résulte des contraintes de vieillissement de l'isolant (figure 12.9).

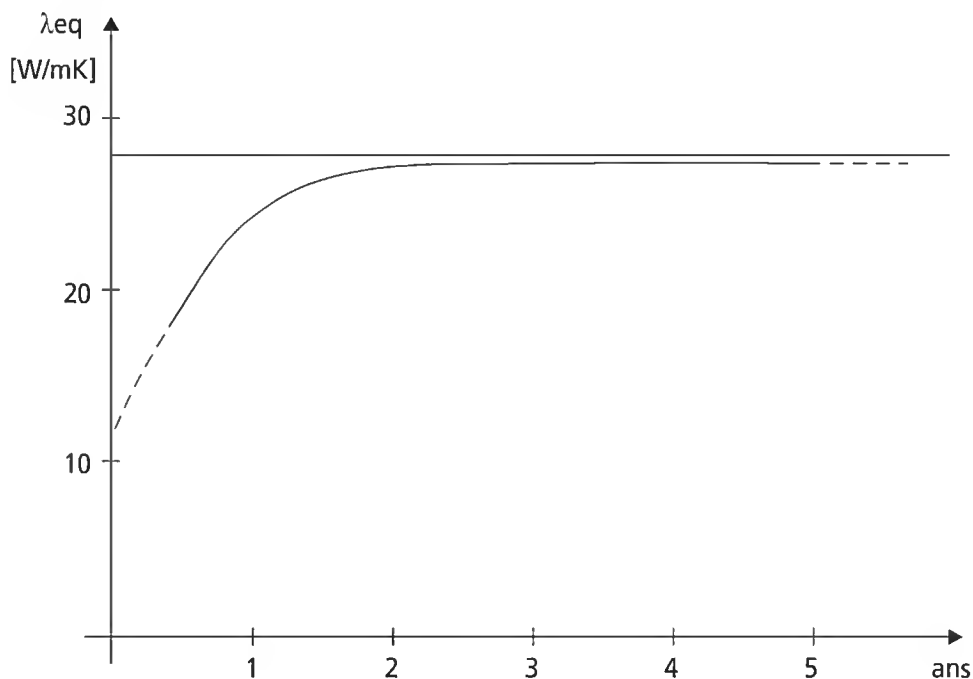


Figure 12.9 Courbe de vieillissement d'un isolant poreux.

### Influence de la température

Comme on le sait (voir chapitre 6 Données thermophysiques, partie 2), on peut, dans les applications courantes au voisinage de la température ambiante, donner une forme linéaire à la variation de la conductivité thermique du gaz.

**Exemple :**  $\lambda_{\text{air sec}} = 0,023 + 6,8810^{-5} \cdot t$  (W/mK),  $T$ , en °C, précision voisine de 1 %.

Il en est de même pour les conductivités équivalentes des isolants.

**Remarque :** Si le gaz était parfait, on montre que sa conductivité varierait comme  $\sqrt{T}$  ( $T$  en K) ; mais il peut se rajouter l'influence des transferts radiatifs, qui apparaîtra comme un terme cubique, comme on l'a vu : de ce fait, la conductivité équivalente d'un isolant peut prendre la forme :

$$\lambda_{eq} = \lambda_{1/2} \sqrt{T} + \lambda_3 T^3, \text{ les } \lambda_i \text{ sont des paramètres caractéristiques du matériau.}$$

### Influence de la pression

La pression du gaz est un paramètre déterminant sur le comportement de l'isolant.

À la pression atmosphérique, on sait que  $\rho_g$  est proportionnel à  $P$ , alors que le libre parcours moyen (lpm) lui est inversement proportionnel dans les mêmes conditions de température ; il en résulte que  $\lambda_g$  doit être insensible à  $P$  dans ce voisinage ( $\lambda_g(P_{atm}) = cte$ ).

Mais dans l'isolant poreux, la porosité impose un intervalle fini entre surfaces en regard  $e$  (et de surcroît petit) ; si le lpm est très inférieur à  $e$ , le régime d'écoulement est dit visqueux (voir paragraphe 14.4) ; si le lpm est très supérieur à  $e$ , le régime d'écoulement est dit de Knudsen. Alors la conductivité devient proportionnelle à  $P$  (ou  $n$  le nombre de molécules).

La figure 12.10 représente la courbe sigmoïde d'évolution de  $\lambda_{eq}$  avec la pression pour un isolant ; le domaine de transition typique se situe entre  $10^{-1} Pa$  et  $10^3 Pa$ . Mais il est possible de translater les courbes en jouant sur des paramètres dont la porosité.

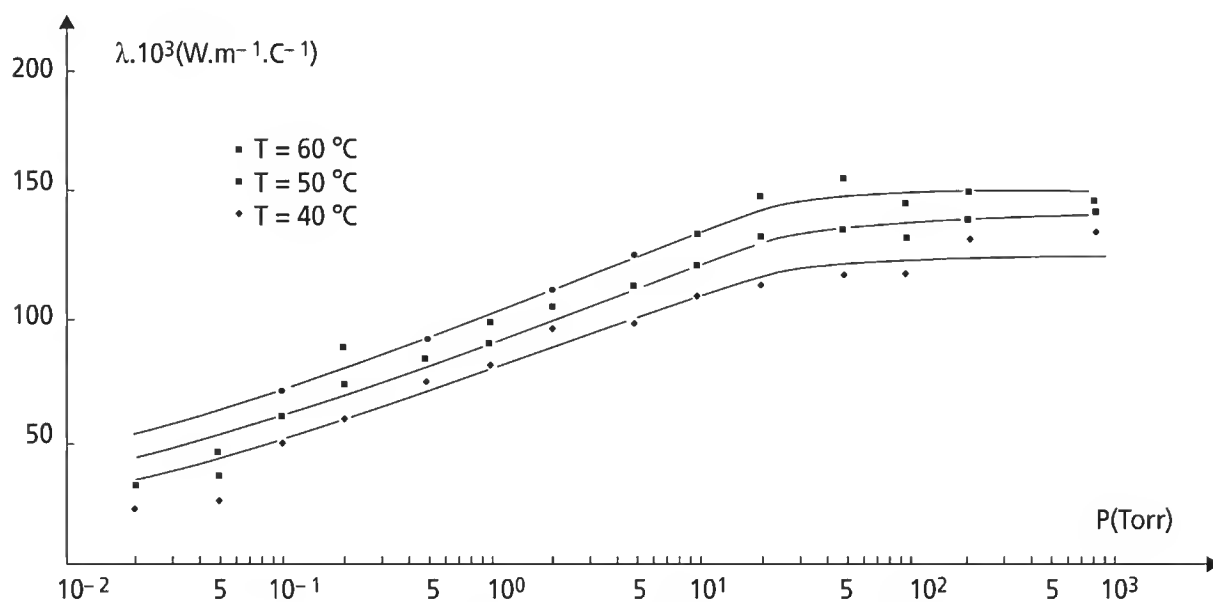


Figure 12.10 Courbe sigmoïde d'évolution de  $\lambda_{eq}$  avec la pression pour un isolant.

D'assez nombreuses applications et enjeux sont sous-tendus derrière l'approche précédentes. On citera :

- l'isolation cryogénique (exemple : le vase Dewar) ;
- les panneaux isolants sous vide (Duminil M.) dont les aérogels de silice (exemple : Pour des masses volumiques apparentes comprises entre 3 et 35 kg/m³, des diamètres de pore de 20 nm, à  $10^4 Pa$ , on obtient  $\lambda_{eq} \sim 5,5 mW / mK$ ) ;



- des applications dans des machines thermiques (exemple : Réfrigérateur à adsorption (Onyebueke L.).

## 12.4 DES APPLICATIONS DE LA CONDUCTION

### 12.4.1 Applications dans l'habitat et l'industrie

Les applications de la conduction sont nombreuses, tout particulièrement dans l'habitat et l'industrie, deux champs d'application privilégiés courants.

#### *a) L'isolation dans l'habitat*

Il est exclu ici d'entrer dans le détail de la thermique de l'habitat, qui est un monde en soi.

On se contentera de dire que malgré l'évolution de la réglementation depuis vingt ans, on constate une rémanence certaine des problèmes à résoudre et des verrous à surmonter (Rilling J.).

L'approche système est indispensable ; elle fait apparaître pour l'habitat une compétition entre l'enveloppe (système passif) et les composants de conditionnement d'air (chauffage, ventilation, voire plus récemment climatisation). Cela conduit à un compromis général qui a été illustré (existence d'une épaisseur d'isolation optimale).

Mais le système passif fait par ailleurs apparaître des discontinuités aux ponts thermiques, ainsi que des couplages transfert de chaleur, transfert de matière (humidité). Ces deux points méritent une attention particulière.

Enfin, les fluctuations météorologiques soumettent l'habitat à un comportement transitoire, qui induit une optimisation dynamique du système ; les préoccupations de régulation-gestion du confort (contrôle-commande) sont donc essentielles, et relèvent de longue date des méthodes exposées au chapitre 11, paragraphe 3.3 (André Ph., Nicolas J.). On ajoutera toutefois qu'il semble qu'un effort conséquent reste à faire pour une utilisation optimale de la chaleur ou du froid en complétant les systèmes actifs par une capacité thermique adéquate : le stockage thermique est peu développé actuellement.

#### *b) Isolation dans l'industrie*

Comme dans l'habitat, l'industrie est un gros utilisateur d'isolant ; là encore l'optimisation thermoéconomique est fondamentale.

L'application la plus commune est l'isolation de canalisations véhiculant des fluides chauds ou froids par rapport à l'ambiance. Mais il y a aussi la recherche de l'adiabatisation de nombreux composants : en premier lieu les fours, les entrepôts (volumes) de stockage froid. On n'oubliera pas ici les transports réfrigérés. Le monde des très basses températures (TBT) ou cryogénie est plus particulier, et fait appel à des techniques plus performantes.

Pour plus de détails sur les applications évoquées au paragraphe 12.4.1, le lecteur est renvoyé vers la référence (Feidt M.).

### 12.4.2 Utilisation d'ailettes

Parmi les applications de la conduction, l'optimisation des transferts fait souvent intervenir des ailettes. Exemple : dans les échangeurs de chaleur liquide-gaz, les transferts de chaleur étant moins efficaces du côté gazeux, l'utilisation d'ailettes (surface déployée) s'impose.

Une ailette est un corps de dimension transversale faible par rapport à sa dimension longitudinale  $H$  (hauteur d'ailette) ; elle est solidaire à sa base, d'une paroi à température  $T_p$ , et elle échange de la chaleur avec un fluide à température externe  $T_e$ .

#### a) Bilan thermique sur un élément d'ailette droite

La figure 12.11 représente l'élément d'ailette  $dV_c$  en régime dynamique stationnaire.

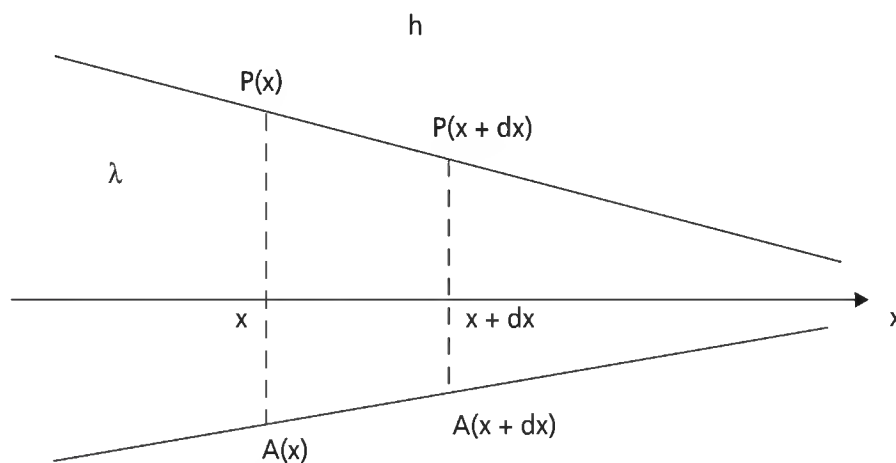


Figure 12.11 Élément d'ailette droite

#### ► Hypothèses de calcul

$h$ , le coefficient d'échange global surfacique sera pris constant à l'interface entre l'ailette et le fluide.  $\lambda$ , la conductivité du matériau d'ailette est supposé constant. Dans une section transversale d'ailette, la température est supposée uniforme ( $T$ , uniquement fonction de  $x$  ; cela correspond à un matériau bon conducteur de la chaleur :  $\lambda$  élevée).

**Remarque :** on notera que cette hypothèse n'est pas compatible avec la condition frontière sur la surface latérale  $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h [T - T_e]$ . Néanmoins, le modèle sera représentatif.

## ► Modèle

En régime dynamique stationnaire, la conservation des flux thermiques s'écrit :

$$\int_{A_t} \vec{q}'' \cdot \vec{n} dA = 0$$

En développant le calcul à l'ordre 1, on trouve l'équation suivante :

$$-\frac{d}{dx} \left[ \lambda A_t \frac{dT}{dx} \right] + hP(T - T_e) = 0 \quad (12.38)$$

$A_t(x)$ , aire transversale de l'ailette ;  $P(x)$ , périmètre de l'ailette.

Compte tenu du fait que  $\lambda$  est constant, il vient pour une ailette à géométrie variable :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{A_t} \cdot \frac{dA_t}{dx} \cdot \frac{d\theta}{dx} - \frac{h}{\lambda A_t} P \cdot \theta = 0 \quad (12.39)$$

avec  $\theta = \frac{T - T_e}{T_p - T_e}$ , température adimensionnelle.

## b) Ailette à section droite constante

Dans ce cas  $A_t$  est constant,  $p$  est constant ; (12.39) se simplifie :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

$$\text{avec : } m = \sqrt{\frac{hp}{\lambda A_t}}.$$

La solution mathématique de cette équation est classique :

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

$C_1, C_2$  constantes d'intégration déterminées par les conditions limites.

On considère ci-après diverses conditions aux limites.

## ► Ailette infiniment longue

La condition à la base impose pour  $x = 0$ ,  $\theta = 1$ .

D'où :  $C_1 + C_2 = 1$ .

La deuxième condition s'écrit ici :  $x \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0$ .

Il en résulte que  $C_1 \equiv 0$ , et conséquemment  $C_2 = 1$ .

Le profil de température est :

$$\theta = e^{-mx} \quad (12.40)$$

Le flux thermique échangé à la base de l'ailette s'en déduit :

$$\dot{Q}(o) = -\lambda A_t \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = \sqrt{hp\lambda A_t} (T_p - T_e)$$

► Ailette de longueur finie  $H$

*Condition d'adiabacité en  $H$*

La condition à la base demeure ; la deuxième condition à l'extrémité  $H$  correspondra à une condition d'adiabacité ( $\frac{d\theta}{dx} = 0$  ; flux transmis par l'extrémité d'ailette négligeable).

$C_1$  et  $C_2$  sont alors fournis par le système :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{mH} - C_2 e^{-mH} = 0 \end{cases}$$

d'où le profil de température correspondant :

$$\theta = \frac{chm(H-x)}{chmH}$$

le flux thermique échangé à base de l'ailette

$$\dot{Q}(o) = \sqrt{hp\lambda A_t} (T_p - T_e) thmH$$

*Flux de chaleur non négligeable en  $H$*

Les conditions limites sont alors :

$$x = 0, \theta = 1 ; x = H \quad -\lambda \left( \frac{d\theta}{dx} \right)_{x=H} = h(\theta)_{x=H}$$

Dans ce cas, on trouve le profil de température suivant :

$$\theta = \frac{chm(H-x) + \frac{h}{m\lambda} shm(H-x)}{chmH + \frac{h}{m\lambda} shmH}$$

le flux thermique échangé à la base de l'ailette

$$\dot{Q}(o) = \frac{shmH + \frac{h}{m\lambda} chmH}{chmH + \frac{h}{m\lambda} shmH} \cdot \sqrt{hp\lambda A_t}$$

**Remarque :** les résultats précédents peuvent aisément être particularisés aux ailettes rectangulaires :  $A_f = Le$  ;  $p \sim 2L$  ;  $m^2 = \frac{2h}{\lambda e}$

aux ailettes aiguilles :  $A_f = \frac{\pi D^2}{4}$  ;  $p = \pi D$  ;  $m^2 = \frac{4h}{\lambda D}$ .

Le lecteur peut inventer d'autres cas de figure.

### c) Extensions au modèle

Les ailettes peuvent être optimisées en forme et dimension de façon à minimiser le volume pour un échange thermique imposé et à maximiser l'échange thermique pour un volume donné.

L'approche la plus connue est due à E. Schmidt.

La forme trapézoïdale apporte une réponse pertinente à la première alternative ci-dessus pour les faibles valeurs de  $Bi = \frac{hH}{\lambda}$  (sinon le profil devient concave).

La prise en compte de la variation avec la température des paramètres est possible (Yeh R.H.).

La modélisation et optimisation d'ailette à matériaux en cascade a même été proposée récemment (Zamfirescu C., Feidt M.).

On voit que l'étude des ailettes présente des facettes multiples quant à l'optimisation, vu la diversité des contraintes possibles, les variantes de modèle (du fait des hypothèses retenues), mais aussi des critères choisis.

### ► Autres critères importants pour les ailettes et surface ailettée

#### *Efficacité d'une ailette*

L'efficacité d'une ailette est égale au rapport du flux de chaleur transmis par l'ailette à sa base, sur le flux transmis à l'ailette supposée isotherme à  $T_p$  (flux maximum échangeable).

$$\eta_a = \frac{\overset{o}{Q}(o)}{\underset{o}{MAX Q}}$$

L'efficacité d'ailette est analogue à un rendement au sens du premier principe.

**Remarque :** dans le cas d'une ailette droite à section constante

$$MAX \overset{o}{Q} = hPH(T_p - T_e).$$

### *Efficacité d'une surface ailettée*

Soit une surface de transfert initiale  $A$  ;  $A_a$ , la surface d'échange supplémentaire apportée par les ailettes ;  $A_t = A + A_a$ , la surface totale d'échange avec les ailettes.

On pourra montrer que l'efficacité de la surface ailettée vaut :

$$\eta_t = 1 - \frac{A_a}{A_t}(1 - \eta_a)$$

On en déduit l'augmentation du flux de chaleur transféré par la surface ailettée sous forme du ratio  $R$  :

$$R = \frac{A_t \cdot \eta_t}{A}$$

**Remarque :** il est aisé d'augmenter le transfert dans un rapport 2.

### 12.4.3 Conduction avec source

#### *a) Rappel des équations constitutives*

La formalisation générale du problème en dimension 1 a conduit à l'équation générale (12.4) dans laquelle le terme  $\frac{\partial}{\partial t} q''(x, t)$  a un rôle prépondérant.

Si les propriétés physiques peuvent être considérées comme constantes (faible excursion en température), l'équation se simplifie sous la forme (12.5) ; le régime dynamique stationnaire conduit alors à l'expression (12.6).

Pour les applications, il s'avère que la géométrie cylindrique est beaucoup plus utilisée ; aussi l'équation (12.5) prend alors la forme (12.9) qui va être considérée ci-après.

#### *b) Un exemple d'application*

Parmi les applications, on notera la dissipation par effet Joule dans les conducteurs électriques (souvent des fils), le chauffage par micro-ondes (aux géométries plus complexes), la dissipation thermique dans les barres de combustible nucléaire.

### 12.4.4 Conduction instationnaire

#### ► Quelques exemples

La conduction en régime instationnaire a une importance toute particulière dans de nombreuses applications ; on citera les phénomènes de trempe en métallurgie : les mises en contact brusque de deux surfaces solides (soupape et siège de soupape par exemple), la mise hors gel de canalisation, le régime glissant dans l'encrassement des surfaces d'échange, le régime périodique dans une structure (mur, moteurs alternatifs), le comportement instationnaire d'échangeurs de chaleur.

► Régime transitoire d'un système, approche globale

Le schéma de la figure 12.12 est une représentation analogique d'un système supposé à température uniforme :  $T$  représente la température du système à tout instant, et ce quel que soit le point de ce système. La résistance thermique interne du système (corps homogène) est faible devant la résistance thermique externe (conduction interne forte par rapport à la convection en surface).

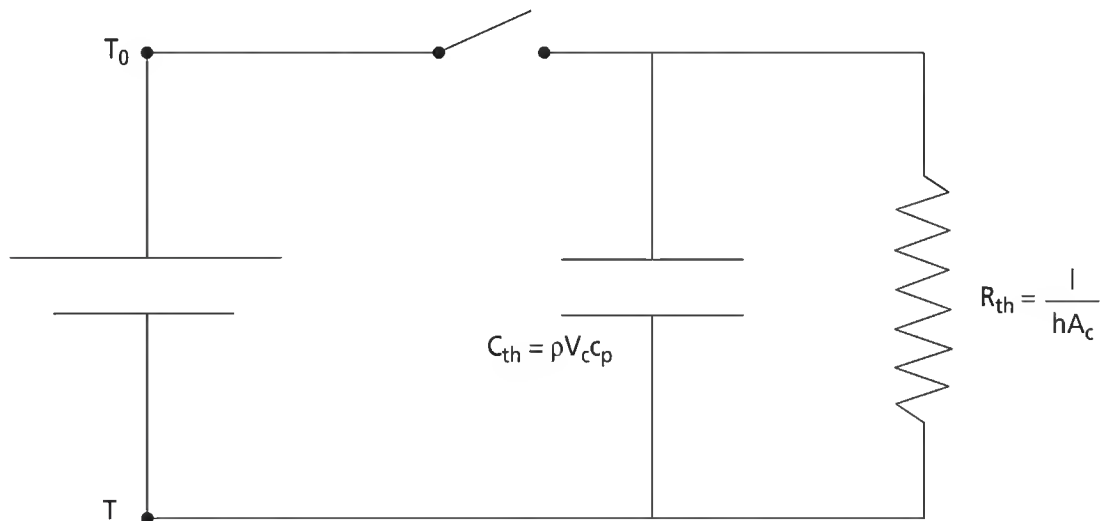


Figure 12.12 Représentation analogique d'une évolution transitoire d'un système global.

Le bilan thermique sur le système lors d'une transformation élémentaire de  $t$  à  $t + dt$  s'écrit :

$$h \cdot A_c (T - T_\infty) \cdot dt = \rho V_c C_p dT$$

$A_c$ , surface de la frontière du système

$V_c$ , volume du système

$\rho$ , masse volumique

$C_p$ , chaleur spécifique massique

$h$ , coefficient surfacique d'échange de chaleur

$T_\infty$ , température de mélange du fluide baignant le système (thermostat).

En tenant compte de la condition initiale ( $T = T_o$  à  $t = 0$ ) l'intégration est immédiate et fournit  $T(t)$  :

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_o - T_\infty} = \exp\left[-\frac{h A_c}{\rho V_c C_p} t\right]$$

**Remarque :** on voit apparaître ici l'analogie avec la décharge d'un condensateur électrique

$$\left[ \frac{E}{E_o} = \exp\left[-\frac{t}{RC}\right] \right].$$



Le profil de température suggère la résistance thermique  $R_{th}$ , et la capacité thermique  $C_{th}$ , conformément à :

$$R_{th} = \frac{1}{hA_c}; C_{th} = \rho V_c C_p$$

Il apparaît alors la constante de temps  $\tau$ , caractéristique du système :

$$\tau = \frac{1}{R_{th} C_{th}}$$

### Critère adimensionnel en transitoire

Le nombre de Biot permet la caractérisation et la comparaison entre des systèmes ayant des paramètres géométriques et thermiques différents.

Le nombre de Biot se définit comme :

$$Bi = \frac{l/\lambda A_c}{1/hA_c} = \frac{hl}{\lambda}$$

$l$ , longueur caractéristique du système.

Un système est dit « mince » et à température uniforme si  $Bi < 0,1$ .

Un système est dit « épais » si  $Bi > 0,1$ .

**Remarque :** le nombre de Fourier  $Fo$  caractérise la pénétration d'une perturbation thermique dans un système au temps  $t$  :  $Fo = \frac{at}{l^2}$ ;  $a = \frac{\lambda}{C_p}$ , diffusivité thermique du système ( $at$  correspond au carré de la profondeur de pénétration au temps  $t$ ).

**Un exemple :** la trempe d'une bielle. La bielle est un corps en acier ( $\lambda = 46 \text{ W / mK}$ ) de dimension caractéristique estimée à  $l = 0,1 \text{ m}$ . Sa température initiale est de  $T_o = 700^\circ\text{C}$ ; la température finale du bain  $T_\infty = 50^\circ\text{C}$ .

La bielle peut être trempée, soit à l'air, soit dans un bain d'huile.

La détermination des coefficients  $h$  correspondant, à travers une corrélation de convection naturelle ( $Nu = f(Ra)$ ), suppose la connaissance de la température de film  $T_f = \frac{T_o + T_\infty}{2} = 375^\circ\text{C}$ , à laquelle il faut déterminer les propriétés thermophysiques du fluide.

Après recherche et calcul, on trouve :

$$h_{air} = 10 \text{ W / m}^2.\text{K}; h_{huile} = 2000 \text{ W / m}^2.\text{K}$$

On en déduit les  $Bi$  correspondants :



$$Bi_{air} = 10^{-2} ; Bi_{huile} > 2$$

En conséquence l'approximation corps mince est recevable pour la trempe à l'air, mais interdite pour la trempe en bain d'huile.

### ► Régime transitoire de systèmes 1D

Les systèmes épais à une variable d'espace doivent satisfaire en régime transitoire (1 variable de temps) à l'équation :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{q}'''(x,t)}{\lambda} = 0 \quad (12.41)$$

On a supposé ci-dessus le terme source indépendant de la température et surtout les propriétés thermodynamiques constantes  $(\lambda, a)$ .

### *Les méthodes de résolution de l'équation aux dérivées partielles*

L'équation (12.41) peut se résoudre par un ensemble de méthodes :

- calcul de Laplace ;
- calcul analogique ;
- calcul numérique ;
- calcul par séries de Fourier ;
- méthode de séparation des variables.

Le lecteur est renvoyé aux ouvrages spécialisés pour des détails et comparaison entre ces méthodes (on cite une référence (Sacadura J.)). On se contente ici d'illustrer par un exemple la méthode de séparation des variables.

On pose :  $T(x, t) = X(x).Y(t)$ .

L'équation (12.41) sans terme source devient alors :

$$X''(x).Y(t) - \frac{1}{a} X(x).Y'(t) = 0$$

Elle est alors à variables séparables, et on obtient pour la partie dépendant du temps deux solutions possibles à :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{Y'(t)}{Y(t)} = \alpha \quad (12.42)$$

si  $\alpha = -k^2$ , le régime est transitoire :

$$Y(t) = Y_o \exp(-ak^2 t)$$

si  $\alpha > 0$ , le régime est périodique :

$$Y(t) = Y_o \exp(i\omega t) = Y_o [\cos \omega t + i \sin \omega t]$$

avec :  $\beta = i\omega = a\alpha, i^2 = -1$  (imaginaire).

**Remarque :** la recherche du profil  $T(x, t)$  se poursuit par l'intégration en  $X(x)$ , utilisant les séries de Fourier et surtout les conditions aux limites et initiale ; on ne peut donc pas donner de solution générale, mais seulement des solutions particularisées.

Appliquons cette méthode au cas d'un mur semi infini soumis à un saut de température.

On donnera ici la solution qui s'obtient aisément par le calcul de Laplace :

$$\frac{T(x,t) - T_o}{T - T_o} = \operatorname{erfc} \left[ \frac{x}{2} (at)^{-1/2} \right] \quad (12.43)$$

avec  $\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$ , fonction d'erreur complémentaire

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{(\pi)^{1/2}} \int_0^u \exp(-\xi^2) d\xi$$

La fonction d'erreur est déterminée numériquement conformément au tableau 12.6.

TABLEAU 12.6 TABLE DES FONCTIONS  $\operatorname{ERF}$  ET  $\operatorname{ERFC}$ .

$x$	$\operatorname{erf} x$	$\operatorname{erfc} x$
0,0	0,000000	1,000000
0,05	0,056372	0,943628
0,1	0,112463	0,887537
0,15	0,167996	0,832004
0,2	0,222703	0,777297
0,25	0,276326	0,723674
0,3	0,328627	0,671373
0,35	0,379382	0,620618
0,4	0,428392	0,571608
0,45	0,475482	0,524518
0,5	0,520500	0,479500
0,55	0,563323	0,436677
0,6	0,603856	0,396144
0,65	0,642029	0,357971
0,7	0,677801	0,322199
0,75	0,711156	0,288844
0,8	0,742101	0,257899

$x$	$\text{erf } x$	$\text{erfc } x$
0,85	0,770668	0,229332
0,9	0,796908	0,203092
0,95	0,820891	0,179109
1,0	0,842701	0,157299
1,1	0,880205	0,119795
1,2	0,910314	0,089686
1,3	0,934008	0,065992
1,4	0,952285	0,047715
1,5	0,966105	0,033895
1,6	0,976378	0,023652
1,7	0,983790	0,016210
1,8	0,989091	0,010909
1,9	0,992790	0,007210
2,0	0,995322	0,004678
2,1	0,997021	0,002979
2,2	0,998137	0,001863
2,3	0,998857	0,001143
2,4	0,999311	0,000689
2,5	0,999593	0,000407
2,6	0,999764	0,000236
2,7	0,999866	0,000134
2,8	0,999925	0,000075
2,9	0,999959	0,000041
3,0	0,999978	0,000022

Du résultat précédent (12.41), il est possible de déduire la densité surfacique de flux à l'abscisse  $x = 0$  :

$$\overset{o}{q}''(0) = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{T_{\infty} - T_0}{(\pi t)^{1/2}} (\lambda \rho C_p)^{1/2}$$

Il apparaît alors la quantité  $b = (\lambda \rho C_p)^{1/2}$ , appelée effusivité.

Mise en contact brusque de deux milieux : soient deux milieux 1 et 2 à température différentes  $T_1 > T_2$ .

Alors :

$$\overset{o}{q}_1'' = b_1 (\pi t)^{-1/2} (T - T_1) < 0$$

$$\overset{o}{q}_2'' = b_2 (\pi t)^{-1/2} (T - T_2) > 0$$

avec  $T$ , température de contact ( $T_2 < T < T_1$ ).

La conservation des flux impose si  $T_1$  et  $T_2$  sont supposées constantes :

$$T = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2} = \text{cte}$$

On voit alors que :

$$\text{si } b_1 \text{ voisin de } b_2 : T \sim \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\text{si } b_1 \gg b_2 : T \sim T_1$$

**Remarque :** l'effusivité de la peau commande la sensation de température par rapport au milieu touché.

Cas d'un mur semi-infini en régime sinusoïdal : ce régime intervient dans le chauffage des locaux (et la climatisation) du fait des variations des apports de chaleur diurne du soleil (période journalière), mais aussi saisonnière.

Supposons un milieu semi-infini soumis sur sa face  $x = 0$  à une variation sinusoïdale en régime dynamique stationnaire. On cherche la fluctuation  $\theta(x, t)$  de la température, autour de la valeur moyenne au point considéré.

Cette fluctuation satisfait à :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

$$\theta(x, t) = \theta_o \cos \omega t ; \theta(\infty, t) \rightarrow 0$$

La méthode de résolution exposée permet d'aboutir à la solution finie suivante :

$$\theta(x, t) = \theta_o \exp \left[ - \left( \frac{\omega}{2a} \right)^{1/2} x \right] \cos \left[ \omega t - \left( \omega / 2a \right)^{1/2} x \right]$$

**Remarque :** l'amplitude des oscillations diminue si  $x$  ou  $\omega$  augmente ; il existe un déphasage fonction de  $x$  et de  $\omega$ .

En conclusion, la conduction stationnaire ou instationnaire joue un rôle fondamental dans de nombreux systèmes (habitat ; échangeurs de chaleur). Nous retrouverons donc les notions correspondantes par la suite (dont chapitre 13).

Le lien avec la thermodynamique a par ailleurs été établi de façon plus fondamentale et conjecturale (relation au second principe de la thermodynamique).

## 12.5 ÉTUDE DE CAS SUR LE RÉGIME DYNAMIQUE STATIONNAIRE D'UN BARREAU EN FISSION

On considère un élément de combustible nucléaire, cylindre de rayon  $R_c$  et de longueur  $L \gg R_c$  ; la conductivité thermique  $\lambda_c$  de ce barreau est supposé constante.

La gaine est une enveloppe métallique tubulaire de rayon externe  $R_g$ , et de conductivité thermique constante  $\lambda_g$ .

La fission nucléaire dégage dans l'élément combustible une densité volumique de flux de chaleur fonction de la position radiale selon :

$$\overset{o}{q}''' = \overset{o}{q}_o''' \left[ 1 + \alpha \left( \frac{R}{R_c} \right)^2 \right] \quad \text{avec } (\alpha = cte).$$

L'interface externe de la gaine est en contact avec un fluide caloporteur de température de mélange  $T_f$  ; le transfert à l'interface se fait par l'intermédiaire du coefficient de transfert de chaleur surfacique  $h$  connu.

En supposant un contact thermique parfait entre le combustible et la gaine, on recherche :

- la distribution radiale de température, dans le combustible, et dans la gaine.
- la distribution radiale de densité surfacique de flux de chaleur.

Équations de la chaleur (géométrie cylindrique) : par unité de longueur

– dans le combustible

$$\lambda_c \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{dT}{dR} \right) + \overset{o}{q}''' \left[ 1 + \alpha \left( \frac{R}{R_c} \right)^2 \right] = 0$$

– dans la gaine

$$\lambda_g \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left( R \frac{dT}{dR} \right) = 0$$

1<sup>re</sup> intégration (distribution de flux de la chaleur)

$$\overset{o}{q}_c''(R) = -\lambda_c \frac{dT}{dR} = \overset{o}{q}_o''' \left[ \frac{R}{2} + \frac{\alpha}{4} R \left( \frac{R}{R_c} \right)^2 \right] + \frac{C_c}{R}$$

$$\overset{o}{q}_g''(R) = -\lambda_g \frac{dT}{dR} = \frac{C_g}{R}$$

Détermination des constantes  $C_c, C_g$  (conditions aux limites)

$$R = 0 ; \overset{o}{q}_c''(0) \text{ fini} \Rightarrow C_c = 0$$

$$R = R_c ; \overset{o}{q}_c''(R_c) = \overset{o}{q}_g''(R_c) \Rightarrow C_g = -\frac{\overset{o}{q}_o''' R_c^2}{2} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right)$$

d'où :

$$q_c''(R) = q_o''' \left[ \frac{R}{2} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{R}{R_c} \right)^2 \right) \right]$$

$$q_g''(R) = q_o''' \frac{R_c^2}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha}{2} \right] \frac{1}{R}$$

Distribution des températures (2<sup>e</sup> intégration)

$$T_c(R) = -\frac{q_o'''}{2\lambda_c} \left[ \frac{R^2}{2} + \frac{\alpha R^4}{8R_c^2} \right] + T_o$$

$$T_g(R) = -\frac{q_o''' R_c^2}{2\lambda_g} \left[ 1 + \frac{\alpha}{2} \right] \ln \frac{R}{R_o}$$

Détermination des constantes  $T_o, R_o$  (conditions aux limites)

$$R = R_g ; q_g''(R_g) = h [T_g(R_g) - T_f] = \frac{q_o''' R_c^2}{2} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{1}{R_g}$$

$$R = R_c ; T_c(R_c) = T_g(R_c) ; \text{contact thermique parfait}$$

Les deux conditions précédentes fournissent deux équations à deux inconnues,  $R_o$  et  $T_o$ , température maximale dans le combustible.

$$R_o = R_g \exp \left[ \frac{\lambda_g}{h R_g} + \frac{2 \lambda_g T_f}{q_o''' R_c^2 \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right)} \right]$$

$$T_o = \frac{q_o''' R_c^2}{2} \left[ \frac{1}{2\lambda_c} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) + \left( \frac{1 + \frac{\alpha}{2}}{h R_g} + \frac{2 T_o}{q_o''' R_c^2} \right) \ln \frac{R_c}{R_g} \right]$$

## 12.6 ÉTUDES DE CAS SUR L'ISOLATION THERMIQUE

### 12.6.1 Optimisation pour un réfrigérateur ménager

(d'après LIM J.S. et al., *Heat Transfer Eng.*, Vol. 15, n° 3, p. 35-41, 1994)

Ce problème peut être abordé de deux façons :

- soit pour choisir l'épaisseur d'isolant optimal pour un matériau hybride à deux couches isolantes. Ce problème nouveau est apparu avec les nouvelles générations de matériaux isolants n'utilisant plus les CFC, par exemple les GFP (*Gas Filled Panel*), aérogel, ou CVI (*Compact Vacuum Insulation*) ;
- soit pour distribuer de façon optimale une quantité donnée d'isolant autour du réfrigérateur, en particulier entre le freezer et le compartiment de conservation.

On propose ci-après de résoudre le problème des épaisseurs optimales au freezer et en conservation, pour avoir la fuite thermique totale minimale.

La représentation schématique de la machine est faite figure 12.13. L'isolant est supposé de conductivité constante  $k$ .

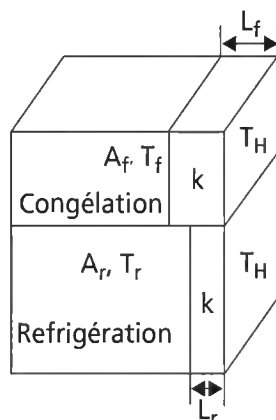


Figure 12.13 Représentation schématique de la machine à froid

La taille et la géométrie du réfrigérateur impose la surface totale à recouvrir d'isolant  $A$ . On supposera par ailleurs que la quantité totale d'isolant à répartir est fixée par des contraintes de coût et correspond à un volume total d'isolant donné  $V$ .

1. On précisera les contraintes et fonction objectif.

2. On introduira et on précisera les variables et paramètres adimensionnels du problème. (On notera l'existence d'une épaisseur moyenne d'isolant  $L = V : A$ , ainsi que d'une fuite thermique  $\dot{q}_c$ , associée à cette répartition uniforme de l'épaisseur ; on donnera son expression).

3. On fera une étude de sensibilité de la répartition des épaisseurs par rapport à

$$\theta = \frac{T_H - T_r}{T_H - T_f}, \text{ pour différentes valeurs de } \alpha = A_f / A.$$

4. On étudiera la variation de la perte thermique minimale adimensionnelle associée à l'optimum, ainsi que celle du rapport  $\min \frac{\dot{q}}{\dot{q}_c}$ , en fonction des mêmes paramètres. Enfin, on conclura.

Contrainte de volume :  $A_f L_f + A_r L_r = V$

Variables :  $L_f, L_r$

Fonction objectif :  $\dot{q} = k \frac{A_f}{L_f} (T_H - T_f) + k \frac{A_r}{L_r} (T_H - T_r)$

$\min \dot{q} = ?$

Hypothèse : Résistance thermique uniquement due à l'isolation.

Adimensionnement.

Surface :  $A_f + A_r = A$        $\alpha = \frac{A_f}{A}$        $1 - \alpha = \frac{A_r}{A}$

Longueur :  $\lambda_f = \frac{L_f}{L}$        $\lambda_r = \frac{L_r}{L}$

$L = \frac{V}{A}$ , longueur de référence.

Flux :  $\dot{q}_r = \frac{\dot{q} \cdot L}{kA(T_H - T_F)} = \frac{\alpha}{\lambda_f} + (1 - \alpha) \frac{\theta}{\lambda_r}$

Avec :  $\theta = \frac{T_H - T_r}{T_H - T_f}$ , température adimensionnelle.

Contrainte adimensionnée :  $\alpha \lambda_f + (1 - \alpha) \lambda_r = 1$

Paramètres  $\alpha, \theta$

Variables  $\lambda_f, \lambda_r$

Donc 1 degré de liberté.

Optimisation analytique par élimination de  $\lambda_f$  et calcul de  $\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \lambda_r} = 0$ .

Résultat :

$$\lambda_r^* = (\alpha \theta^{-1/2} + 1 - \alpha)^{-1}$$

$$\lambda_f^* = [\alpha + (1 - \alpha) \theta^{-1/2}]^{-1}$$



$$q^* = kA \frac{T_H - T_f}{L} [\alpha + (1 - \alpha)\theta^{-1/2}]^2$$

**Remarque :**  $\alpha < 1$  ;  $\theta < 1$  ;  $L_f^* > L_r^*$

$$\text{si } \theta = 1 \quad L_f^* = L_r^* = L ; q^* = \frac{kA(T_H - T_f)}{L}$$

dans le cas général d'une épaisseur constante, il vient :

$$q_c = k \frac{A_f}{L} (T_H - T_f) + k \frac{A_r}{L} (T_H - T_r)$$

$$\text{d'où : } q_{cr} = \frac{q_{cl}}{kA(T_H - T_f)} = \alpha + (1 - \alpha)\theta$$

$$\text{Expression du rapport } \frac{q^*}{q_c} = \frac{[\alpha + (1 - \alpha)\theta^{1/2}]^2}{\alpha + (1 - \alpha)\theta}$$

### 12.6.2 Optimisation d'un stockage froid industriel

(d'après N. Mac Closkey « Storage facilities associated with an ammonia pipeline » ASME, pap 69-Pet-21, 1969)

Le condenseur contrôle la température et la pression d'ammoniaque. On calculera l'épaisseur du réservoir et de l'isolation.

On recherchera la température et l'isolation optimale pour optimiser le coût total du processus.

Données :

- Coût du réservoir :  $10\,000 + 22(p - 100)^{1.2}$   $p \geq 200 \text{ kPa}$
- Coût d'isolation : ( $S = 60 \text{ m}^2$ ) :  $210x^{0.9}$  ( $x$  épaisseur d'isolant : mm).
- Coût de recondensation : 0,25 euros par kg  $\text{NH}_3$
- Durée de vie de l'installation : 50 000 h
- Chaleur latente moyenne de vaporisation de  $\text{NH}_3 = 1\,200 \text{ kJ/kg}$
- Conductivité de l'isolant :  $\lambda = 0,04 \text{ W/mK}$
- Pression d'équilibre liquide-vapeur pour  $\text{NH}_3$  :  $\ln p = -\frac{2800}{T} + 16,33$

Fonction coût exprimée en fonction de la variable  $t$  et de l'épaisseur d'isolation  $x$  mm.

$$C_i = 210x^{0.9} \text{ coût isolation}$$

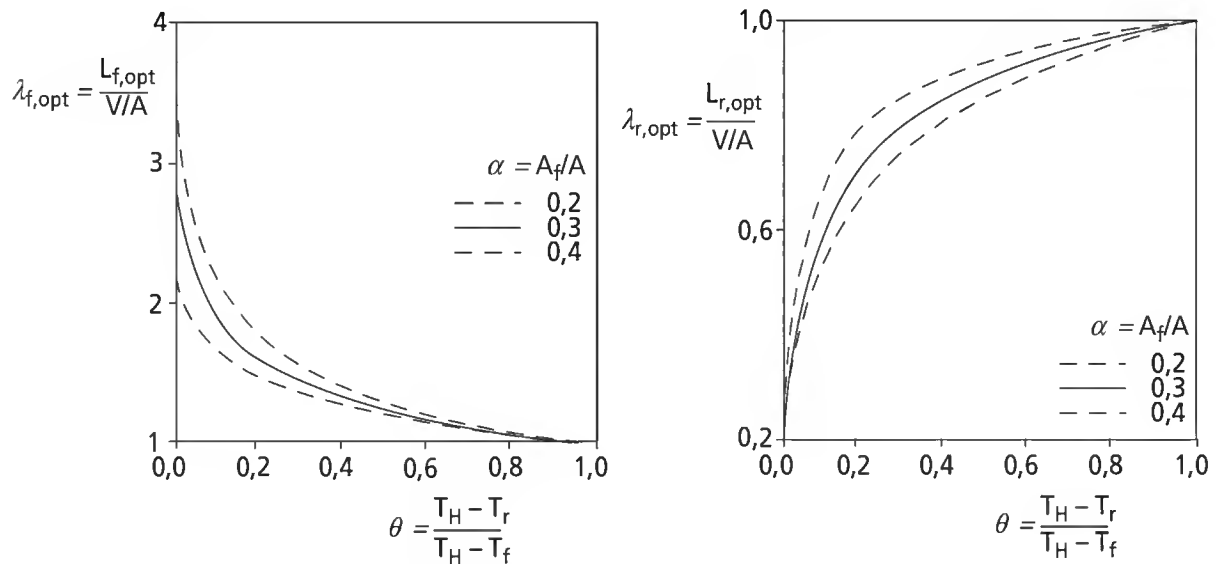


Figure 12.14 Épaisseurs optimales d'isolant

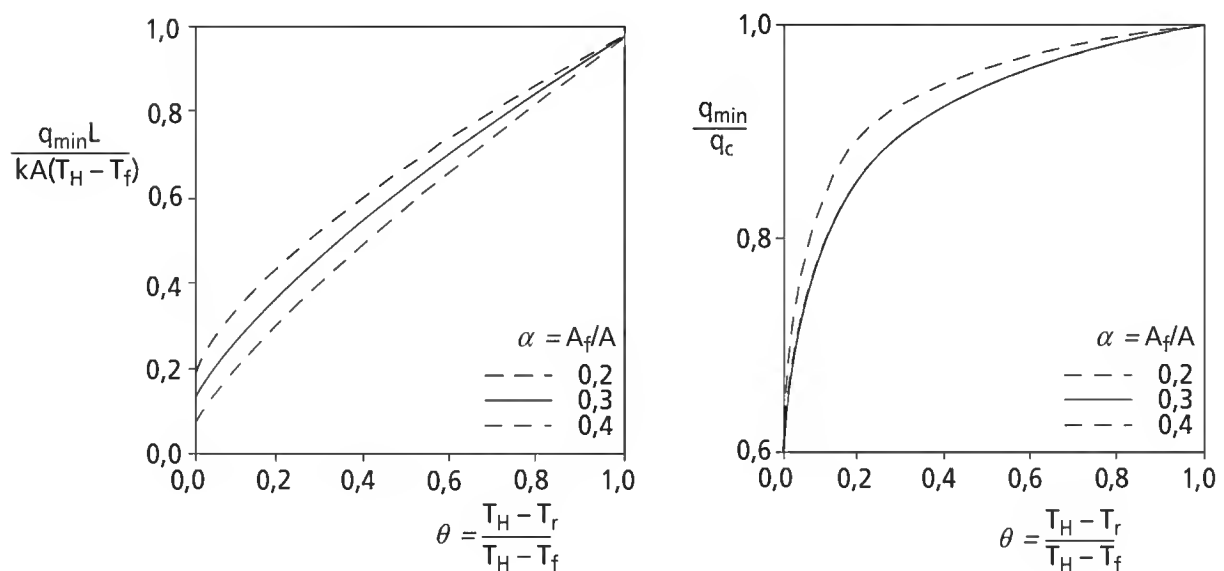


Figure 12.15 Flux minimal échangé a) forme additionnelle standard, b) forme rapportée au cas où l'isolation est uniformément répartie

$$Cr = 10000 + 22 \left( e^{[-2800/(t+273)+16.33]} - 100 \right)^{1.2} \quad \text{coût réservoir}$$

$$\text{avec : } p = e^{[-2800/(t+273)+16.33]}$$

$$C_c = w \cdot 0.25 \times 3600 \times 50000$$

$w$  = vitesse d'évaporation ou de recondensation kg/s. (hypothèse : régime dynamique stationnaire).

$$w = \frac{qkw}{1200}$$

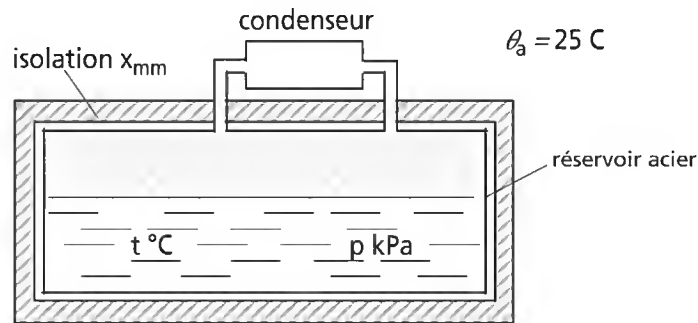


Figure 12.16

$q$ , flux de transfert de chaleur vers l'ambiante.

Hypothèse : résistances thermiques de surface extérieure et intérieure négligeable vis-à-vis de la résistance de conduction.

$$\Rightarrow q = \frac{25 - t}{R} = \frac{25 - t}{Se / \lambda} = \frac{(25 - t) 4 \cdot 10^{-5} \times 60}{x \cdot 10^{-3}}$$

$$\text{D'où : } C_c = \frac{90000(25 - t)}{x}$$

$$C_T = C_i + C_r + C_c \quad \text{coût total} = f(x, t)$$

Méthode de recherche par la plus grande pente (minimum)

$$\frac{\partial c}{\partial x} = 0,9 \times 210 x^{-0,1} - \frac{90000(25 - t)}{x^2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 220 \times 1,2(e^A - 100)^{0,2} e^A \frac{2800}{(t + 273)^2} - \frac{90000}{x}$$

$$\text{avec : } A = -\frac{2800}{t + 273} + 16,33$$

a) Point d'essai  $x = 100 \text{ mm}$  ;  $t = 5 \text{ °C}$

$$\text{b) } C_T = 72371 \quad \frac{\partial c}{\partial x} = -60,75 \quad \frac{\partial c}{\partial t} = 773,47$$

Pour diminuer  $C_T$ , augmenter  $x$ , diminuer  $t$ .

c) déplacement le long du gradient

$$\frac{\Delta x}{-60,75} = \frac{\Delta t}{773,47}$$

d) minimum de  $C_T$  dans la direction du gradient

$$\min_1 C_T = 66755,8 \Leftrightarrow x_1 = 101,23 \quad t = -10,66$$

e) tableau des itérations

TABLEAU 12.7

Itération	$x$ mm	$t$ °C	$c$	$x / \partial x$	$x / \partial t$
0	100,00	5,00	72 370,8	- 6,075	77,347
1	101,23	- 10,66	66 755,8	- 19,409	- 1,4555
2	142,83	- 7,54	63 349,8	- 2,845	37,505
3	143,62	- 17,78	61 528,5	- 7,165	- 0,634
4	168,92	- 15,54	60 676,8	- 1,471	16,145
5	169,40	- 20,80	60 260,9	- 3,051	- 0,294
6	182,87	- 19,50	60 058,5	- 0,749	7,477
32	196,56	- 23,24	59 860,7	- 0,090	0,189
33	196,62	- 23,36	59 860,5	- 0,112	- 0,123
34	196,69	- 23,28	59 860,5	- 0,086	0,111
35	196,77	- 23,38	59 860,4	- 0,100	- 0,143
36	196,83	- 23,30	59 860,4	- 0,076	0,088

Coût minimum  $\min C_T = 59860,4$   $x^* = 196,8$  mm  $t^* = -23,3$  °C

$$\frac{\partial C_T}{\partial x^*} \text{ et } \frac{\partial C_T}{\partial t^*} \sim 0$$

**Remarque :** Convergence lente (36 itérations) car le long d'une vallée de la variable  $t$  (oscillation du gradient en  $t$ ).

### 12.6.3 Optimisation d'un isolant en vieillissement

La figure 12.9 suggère une loi de vieillissement du 1<sup>er</sup> ordre (exponentielle ; une constante de temps  $\tau$ ) telle que :

$$\lambda(t) = \lambda_{\infty} - (\lambda_{\infty} - \lambda_0) e^{-t/\tau}$$

1. Sachant que le coût de fonctionnement de l'isolant  $C_f$  est proportionnel à son volume par l'intermédiaire de  $v_{i,o}$ , de même que le coût de fonctionnement lié à l'évacuation de la fuite thermique  $q$  par  $v_e$  (valeur énergétique), et en appelant  $t_r$  la durée qui conduit au premier remplacement de l'isolant, on montre qu'il existe une épaisseur optimale d'isolant.

2. Dans un second temps, on indique que la durée de vie de l'installation  $t_v$  étant connue,  $t_r$  et  $n$  le nombre d'isolations investies sont reliées par  $t_v = nt_r$  (contrainte). On recherche  $t_r$  et (ou)  $n$  optimum.

1. Expression du coût d'investissement sur la durée de vie du système.

$$C_I = nv_i(\lambda_0)A.e$$

**Remarque :**  $v_i$  est une fonction décroissante de  $\lambda_0$  ; on suppose le tassement de l'isolant négligeable ( $e = \text{cte}$  sur la durée de vie).

Expression du coût de fonctionnement sur la durée de vie du système.

$$C_F = nv_e \int_0^{t_r} \dot{q}(t) dt$$

$$\text{avec : } \dot{q}(t) = -\lambda(t)A \frac{dT}{dx} = \lambda(t)A \frac{\Delta T}{e} ; \Delta T > 0.$$

Expression du coût global sur la durée de vie du système  $C_G$

$$C_G = nv_i A e + nv_e \frac{A \Delta T}{e} \int_0^{t_r} \lambda(t) dt$$

l'intégrale est une fonction de  $\lambda_0, \lambda_\infty, \tau, t_r$ , soit  $f(tr)$ .

On voit qu'il existe un min de  $C_G$ , pour une valeur de  $e$ , variable indépendante :

$$e_{opt} = \sqrt{\frac{v_e}{v_i} T(f(tr))}$$

2. Compte tenu de la contrainte ( $t_v$  paramètre) l'expression du coût global intégré s'écrit :

$$C_G = A t_v \left\{ \frac{v_i \cdot e}{t_r} + \frac{v_e \lambda_0 \Delta T}{e} \left[ \frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} + \frac{\tau}{t_r} \left( \frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} - 1 \right) \left( e^{-tr} / \tau - 1 \right) \right] \right\}$$

La dérivée de cette expression par rapport à  $t_r$  conduit à une expression transcendante non linéaire à résoudre. Une solution approchée s'en déduit, en faisant un développement à l'ordre 1 de l'exponentielle. Il vient alors :

$$\left( \frac{tr}{\tau} \right)_{opt} = e \sqrt{\frac{v_i}{v_e \tau (\lambda_\infty - \lambda_0) \Delta T}}$$

**Remarque :** Le temps optimal de remplacement de l'isolant apparaît lié au surcoût énergétique asymptotique apparaissant au dénominateur sous le radical ; l'extension à d'autres formes des lois de vieillissement est possible.

$n_{opt}$  et le suivi de  $C_G$  s'en déduisent immédiatement.

## BIBLIOGRAPHIE

- ANDRÉ Ph, NICOLAS J., Application de la théorie des systèmes à la thermique du bâtiment ; problèmes de modélisation, d'identification et de contrôle, *Rev. Gén. Therm.*, novembre 1992, n° 371, p. 600-615.
- DUMINIL M., Les panneaux isolants sous vide, *Rev. Gén. Froid*, décembre 1997, n° 979, p. 55-62.
- FEIDT M.1, *Optimisation énergétiques des systèmes et procédés*, Tech & Doc, 1996, Paris, p. 325-335.
- FEIDT M.2, *Thermodynamique et optimisation énergétique*, TEC et DOC, 1996, 2<sup>e</sup> édition, p. 329-338.
- IANTOSKI E., *Exergonomic optimization of temperature drop in heat transfer through a wall*, Communication personnelle à l'auteur.
- JORET L., PROST A., Vitrages à isolation thermique renforcée, volume BE4, article BE 9080, octobre 2004.
- KOLENDA Z.S., *On the minimum entropy production in steady state conduction processes*, Proceedings ECOS, 2002, p. 523-530, July 3-5 2002, Berlin, Germany.
- ONYEBUEKE L., *Contribution à l'étude des transferts de chaleur au générateur de machines trithermes à adsorption*, Thèse de Doctorat de l'INPL, décembre 1989.
- RILLING J., *La thermique dans l'habitat ; une révolution technique et culturelle*, Rencontre SFT, (conférence plénière, 1985).
- SACADURA J.F., *Initiation aux transferts thermiques*, Tech et Doc, 1980, 2<sup>e</sup> édition, Paris.
- YEH R.N., Optimization of longitudinal finsemperature dependent thermal parameters, *Heat Transf. Eng.*, 1994, Vol. 15, n° 3, p. 25-34.
- ZAMFIRESCU C., FEIDT M., Cascaded fins for heat transfer enhancement, *Heat Transf. Eng.*, 2007, Vol. 28, n° 5, p. 1-9.

## Chapitre 13

# Transferts convectifs – Échangeurs de chaleur

### 13.1 INTRODUCTION AUX TRANSFERTS COUPLÉS (CHALEUR-MATIÈRE)

Ce chapitre prolonge le chapitre précédent, qui a montré que les phénomènes conductifs en paroi (frontière de système) sont généralement couplés aux transferts à l'interface des parois ; ce chapitre est centré sur les transferts convectifs aux interfaces.

Ces transferts peuvent être de deux types en fait, convectifs et radiatifs : seuls les premiers seront considérés ici (hypothèse de transferts radiatifs négligeables par rapport aux transferts convectifs). On verra que ce n'est pas le cas dans un certain nombre d'applications (chaudières, solaire thermique). Le chapitre 18 développera les bases des transferts radiatifs, à l'occasion de cette application.

Les transferts convectifs, par définition, supposent un couplage entre transferts de matière et de chaleur, ainsi qu'un écart à l'équilibre thermostatique ; ces transferts sont donc une étape essentielle dans la description thermodynamique d'un système (thermocinétique).

Ce chapitre est dédié aux transferts convectifs aboutissant à un échange de chaleur sensible ; les notions de base de convection forcée, puis naturelle vont être données. Cela débouchera sur la traduction en corrélations de transfert de chaleur et de matière, avec le corrolaire des nombres adimensionnels introduits.

L'application aux échangeurs de chaleur, composants incontournables des systèmes énergétiques sera exposée, avec ses conséquences, dont le comportement instationnaire.

L'extension aux transferts avec changement de phases est réservée, vu son importance pratique, au paragraphe suivant, avec les applications correspondantes aux échangeurs de chaleur dans les chapitres qui suivent (chapitres 15 et 17).

## 13.2 CONVECTION ET TRANSFERTS

### 13.2.1 Convections forcée et naturelle

La convection est un mécanisme couplant le transfert de chaleur au transfert de matière.

Il y a lieu de distinguer la convection forcée de la convection naturelle.

Dans le cas de la convection forcée, une contrainte d'écoulement (forcé : fourniture d'énergie mécanique au fluide) est imposée. Exemple : pompe, ventilateur. On voit apparaître dans ces deux exemples, une distinction supplémentaire, selon que le fluide peut être considéré comme isovolume (incompressible), avec une bonne approximation pour les liquides, ou compressible (cas des gaz)

Dans le cas de la convection naturelle, le mouvement du fluide est lié à la thermodépendance de propriétés physiques (essentiellement, masse volumique et viscosité) et au champ de pesanteur dans lequel le fluide est immergé.

Les divers cas précédents se traduisent par des formes particulières des équations du modèle de transfert sur la base des équations de conservation de la matière et (ou) de l'énergie, puis des équations de mouvement (dynamique de l'écoulement : voir chapitre 14).

Les paragraphes ci-dessous illustrent ces divers cas, en régime dynamique stationnaire et 1D principalement.

### 13.2.2 Convection forcée d'un fluide isovolume

Dans l'exemple développé ci-dessous, on considère un fluide isovolume à propriétés physiques constantes (non dépendantes de la température) ; l'exemple type est l'écoulement de liquide, dont le plus courant est l'eau.

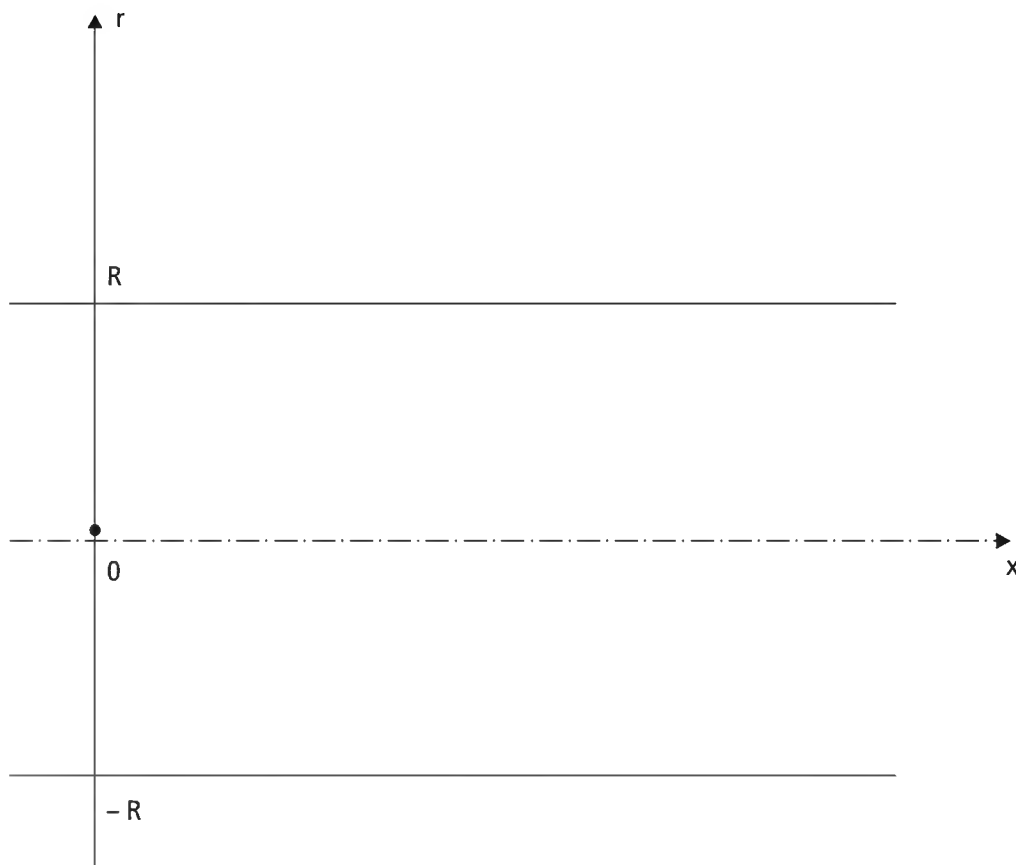
On suppose par ailleurs un écoulement hydrauliquement et thermiquement établi (régime dynamique stationnaire).

**Remarque :** dans le cas d'un écoulement interne en tube, ce régime suppose une certaine distance  $L$ , de l'entrée ou de la sortie du tube (perturbation). Il est

admis en écoulement laminaire  $\frac{L}{D_H} \geq \frac{Re}{20}$ , ( $D_H$  et  $Re$  vont être définis par la suite).

On développe ci-après le cas très usuel d'un écoulement en régime dynamique stationnaire dans un tube de section circulaire ( $D_H = D$  diamètre du tube) (Figure 13.1).





**Figure 13.1** Représentation en coupe d'un écoulement dans un tube de section circulaire

Comme il sera vu, l'écoulement du fluide peut revêtir deux formes en régime établi : écoulement laminaire et écoulement turbulent.

L'écoulement laminaire va être considéré ici en premier.

**a) Écoulement dynamique stationnaire laminaire établi en conduite cylindrique circulaire**

Cette condition est satisfaite dans le cadre des hypothèses, lorsque pour le fluide

$$\text{isolume } Re = \frac{\rho V D}{\mu} \leq 2100.$$

$Re$ , nombre de Reynolds

$\rho, \mu$ , respectivement masse volumique et viscosité dynamique du fluide

$V$ , vitesse moyenne débitante du fluide

On recherche ici :

- le champ des vitesses du fluide  $\vec{v}(r, x)$  ;
- le champ de température  $T(r, x)$  ;
- le coefficient de transfert thermique par convection,  $h(W/m^2.K)$  ; ce coefficient de transfert est dépendant des conditions aux limites (frontières du tube) : on

supposera ici deux types de conditions aux limites, soit une densité surfacique de flux de chaleur à la paroi  $\dot{q}_p''$  constante, soit une température de paroi  $T_p$  constante  $\forall(r, x)$ .

### ► Équations du modèle en géométrie cylindrique

#### *Conservation de la matière*

En régime dynamique stationnaire, avec  $\rho = \text{cte}$  (fluide isovolume), il vient :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (13.1)$$

On remarque alors que cette équation ne dépend pas de la température.

#### *Équations du mouvement*

Ces équations traduisent, dans le cadre des hypothèses, la conservation des quantités mécaniques (quantité de mouvement et moment de quantité de mouvement).

En supposant le fluide newtonien ( $\mu = \text{cte}$ ) et isovolume ( $\rho = \text{cte}$ ), les équations vectorielles se simplifient sous la forme de deux équations en projection sur  $r$  et sur  $x$  :

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \cdot v_r + \frac{\partial v_r}{\partial x} \cdot v_x \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right) \quad (13.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial r} \cdot v_r \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \quad (13.3)$$

Ces deux équations, comme la précédente, ne dépendent pas de la température ; mais nous avons supposé que l'action du champ de pesanteur était négligeable, de même que la variation de masse volumique avec la température. Ces deux derniers mécanismes négligeables en convection forcée seront prépondérants en convection naturelle.

#### *Équation de l'énergie*

Par les mêmes hypothèses, l'équation scalaire de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_v \left( \frac{\partial T}{\partial r} \cdot v_r + \frac{\partial T}{\partial x} \cdot v_x \right) = \lambda \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad (13.4)$$

### ► Étude du champ de vitesse

Les équations (13.1, 13.2, 13.3) étant indépendantes de la température, elles permettent par intégration d'obtenir en fonction des conditions aux frontières le champ de vitesse  $\vec{v}(r, x)$  (2 inconnues  $v_r, v_x$ ) et le champ de pression  $P$ , variables mécaniques.

Dans le cas étudié (écoulement établi en régime laminaire), et en tenant compte du fait que le tube est tel que  $D \ll L$ ,  $L$  longueur du tube (géométrie filaire), il vient :

$$\begin{cases} v_r = 0 & \forall r \text{ et } x \\ v_x = v = f(r) & \forall x \left( \text{ou } \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \right) \end{cases}$$

Il en résulte que l'équation de continuité (13.1) est satisfaite en tout point de l'écoulement.

Ces mêmes conditions induisent :  $\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad \forall r \text{ et } x$  ; toute section transverse à l'écoulement représente une surface isobare :  $P = f(x)$ .

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left( \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} \right)$$

$\frac{\partial P}{\partial x}$  représente les pertes de pression motrice (pertes de charge) dues à la dissipation d'énergie mécanique par frottement visqueux dans le fluide et à la paroi ;  $\frac{\partial P}{\partial x}$  ne peut être fonction que de  $x$ . En régime établi,  $\frac{\partial P}{\partial x}$  est une constante  $\forall x$ .

L'équation (13.3) peut alors être réécrite sous une forme permettant l'obtention du profil radial des vitesses dans une section :

$$\forall x : \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \quad (13.5)$$

Les deux constantes d'intégration qui apparaissent sont déterminées en utilisant les deux conditions aux limites radiales du champ de vitesse :

en  $r = R$ ,  $v = 0$ , condition de non glissement (adhérence à la paroi)

en  $r = 0$ ,  $\frac{dv}{dr} = 0$ , symétrie du profil des vitesses par rapport à l'axe (maximum de vitesse axiale).

On obtient ainsi le profil de vitesse axiale parabolique caractéristique des écoulements laminaires établis :

$$v(r) = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{dP}{dx} (R^2 - r^2) \quad (13.6)$$

*Expression de  $V$ , vitesse moyenne débitante associée*

On sait que  $V = -\frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r v(r) dr$

D'où :

$$V = -\frac{R^2}{8\mu} \cdot \frac{dP}{dx} \quad (13.7)$$

On en déduit une nouvelle forme pour le profil de vitesse paramétré en vitesse débitante :

$$v(r) = 2V \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (13.8)$$

**Remarque 1 :** (13.8) montre que la vitesse maximale sur l'axe du tube vaut deux fois la vitesse débitante ; cette relation est utile pour les mesures en écoulement laminaire établi.

**Remarque 2 :** en régime dynamique stationnaire, on rappelle que  $V$ , vitesse moyenne débitante est reliée au débit massique de fluide  $\dot{m}$  par  $V = \frac{\dot{m}}{\rho A t} = \frac{\dot{m}}{\rho \pi R^2}$  ; cette dernière relation permet avec (13.7), d'exprimer la perte de pression linéique en fonction du débit massique (ou volumique).

On confirme alors qu'avec les hypothèses retenues  $\frac{dP}{dx}$  est une constante connue de  $\dot{m}, \rho, \mu, R$  (la géométrie).

### Expression simplifiée résultante de l'équation de l'énergie

La connaissance du profil de vitesse permet de simplifier l'équation (13.4) sous la forme :

$$\rho C_v v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad (13.9)$$

On remarque que cette équation demeure une équation aux dérivées partielles (problème 2D) dont on recherche une expression sous forme filaire (problème 1D en  $x$ ).

### ► Étude du champ de température

La réduction en dimension du problème posé par l'intégration de (13.9) passe par l'introduction de la notion de température de mélange.

### Température de mélange

La température de mélange est une température moyenne sur une tranche de fluide, telle qu'elle conserve l'énergie de cette tranche de fluide.

Soit une tranche de fluide en écoulement comprise entre  $x$  et  $x + dx$  pour un tube droit à section circulaire, le bilan enthalpique sur le tronçon  $dx$  s'écrit :

$$\dot{m} \cdot dh = \dot{q}''_x(x) \cdot p(x) dx \quad (13.10)$$

$p(x)$ , périmètre de la section

$\dot{q}''_p(x)$ , densité surfacique de flux transmise au fluide, à la paroi.

La relation (13.10) peut aisément se transformer en :

$$\frac{d[Cp(T_m) \cdot T_m]}{dx} = \frac{\dot{q}_p''(x)p(x)}{\dot{m}}$$

$T_m$ , température de mélange.

En particulierisant au fluide isovolume à propriétés physiques constantes il vient :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{\dot{q}_p''(x).p(x)}{\dot{m}Cp}$$

Dans le cas de la section circulaire constante l'expression ci-dessus se simplifie en :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{2\dot{q}_p''(x).\pi R}{\dot{m}Cp} \quad (13.11)$$

$\dot{m}Cp$ , débit calorifique du fluide (W/k).

avec :

$$T_m = \frac{1}{\pi R^2 V} \int_0^R 2\pi r v(r) T(r) dr \quad (13.12)$$

**Remarque :** il est possible d'étendre la définition (13.12) à un fluide à propriétés physiques thermodépendantes et à une section de forme quelconque, mais le problème est plus complexe.

La température de mélange pour un fluide thermodépendant en régime dynamique stationnaire d'écoulement dans une section circulaire vaut :

$$\dot{m}Cp(T_m).T_m = \int_0^R 2\pi r . \rho(T) . Cp(T) v(r) T(r) dr$$

*Champ de température pour une densité surfacique de flux en paroi constante*

Le profil de température de mélange est fourni par l'intégration de l'équation (13.11). De façon générale, il vient :

$$T_m(x) = T_m(0) + \frac{2}{\rho Cp VR} \int_0^x \dot{q}_p''(x) dx$$

Si on considère  $\dot{q}_p'' = \text{cte}$ , on en déduit aisément un profil linéaire en température de mélange :

$$T_m(x) = T_m(0) + \frac{2\dot{q}_p'' . x}{\rho Cp VR} \quad (13.13)$$

**Remarque :** la connaissance du profil (13.13) et d'une relation existant entre  $T_m(x)$  et  $T(r, x)$  permet de remonter à la connaissance d'un profil réduit de température radiale par (13.9) dans laquelle on suppose alors

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$  ; couramment la condition imposée est que le coefficient de transfert convectif  $h$ , est une constante non  $f(x)$ .

La corrélation de transfert de chaleur a pour base, la continuité du flux transféré à l'interface fluide-paroi :

$$q_p''(x) = h(x)(T_p - T_m) = -\lambda \left( \frac{\partial T(r, x)}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (13.14)$$

en remarquant que  $T_p$  et  $T_m$  ne dépendent que de  $x$ .

**Remarque 1 :** il apparaît dans (13.14) une température réduite.

**Remarque 2 :** si cette température réduite est une constante indépendante de  $x$ , le fluide s'échauffe de façon identique dans chaque section.

**Remarque 3 :** en régime laminaire, à densité surfacique de flux constante en paroi, après calculs longs, mais sans difficulté, on trouve une corrélation de transfert indépendante de  $Re$  et du nombre de Prandtl,  $Pr$  :  $Nu = \frac{hD}{\lambda} = \frac{48}{11} \cdot Nu$ , nombre de Nusselt.

### Champ de température pour une température de paroi $T_p$ constante

Pour obtenir le profil de température de mélange, la démarche est la même que dans le paragraphe précédent, hormis que la relation (13.11) doit être couplée à la relation (13.14) dans laquelle apparaît la température imposée  $T_p$  (contrainte). Il vient :

$$\frac{dT_m(x)}{T_m(x) - T_p} = -\frac{2h(x)}{\rho C_p V R} dx \quad (13.15)$$

Par intégration, on obtient :

$$T_m(x) = T_p + \Delta T \cdot e^{-\int \frac{2h(x)}{\rho C_p V R} dx}$$

$\Delta T$  est déterminé en fonction des conditions aux limites.

Dans le cas courant où  $h(x)$  est un coefficient constant  $h$  (le régime thermiquement établi en est une bonne approximation), il vient :

$$\frac{T_m(x) - T_p}{T_m(o) - T_p} = e^{-\frac{2h \cdot x}{\rho C_p V R}} \quad (13.16)$$

Pour établir la corrélation de transfert de chaleur correspondante, une démarche parallèle à celle adoptée au paragraphe précédent, conduit en régime établi à :

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 2\rho C_p V \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{T_p - T(r, x)}{T_p - T_m(x)} \cdot \frac{dT_m}{dx} \quad (13.17)$$

avec  $\frac{T_p - T(r, x)}{T_p - T_m(x)}$ , fonction de  $r$ , mais supposé indépendant de  $x$ .

Le couplage en variables réduites de (13.17) avec (13.12), l'équation de définition de la température de mélange, nécessite une résolution par approximations successives ; la première approximation correspond aux résultats du paragraphe précédent.

À la convergence numérique des calculs on obtient  $Nu = 3,66$ . La corrélation de transfert reste indépendante du  $Re$  et  $Pr$  du fluide.

### b) Écoulement dynamique stationnaire turbulent d'un fluide en conduite

#### ► Notion de turbulence

L'augmentation du débit de fluide admis dans la conduite fait apparaître une évolution de l'écoulement de type laminaire (écoulement de filets fluides glissant les uns sur les autres) vers un écoulement de type turbulent plus complexe dans lequel apparaissent des structures qui varient dans l'espace et le temps. Exemples : turbulence atmosphérique, sillage derrière un objet en déplacement.

Reynolds est le premier à avoir mis en évidence ces phénomènes dans un écoulement en tube circulaire dans sa célèbre expérience ; la transition entre le régime d'écoulement laminaire et turbulent s'effectue dans une zone de transition (régime de transition) représentée par un nombre de Reynolds critique  $Re_c$  : le nombre de Reynolds critique pour un écoulement en tube cylindrique est traditionnellement  $Re_c = 2\,100$ .

La turbulence illustre pour les fluides en convection le passage d'un certain ordre (cohérence de l'écoulement laminaire) à un certain désordre (apparition des structures de la microéchelle à la macroéchelle).

La caractérisation locale de l'écoulement fait alors naturellement apparaître des

moyennes temporelles, telle que la vitesse moyenne locale :  $\bar{v} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} v(t) dt$ .

**Remarque :** pour  $\Delta t$ , suffisamment grand,  $\bar{v}$  ne dépend pas de  $t_i$  ;  $\bar{v}$  est donc représentative de la partie permanente de l'écoulement.

Autour de cette vitesse caractéristique moyenne apparaît une composante  $v'$  de fluctuation ; cette composante est, par contre, fonction de l'espace et du temps. Elle se présente sous forme d'une variable aléatoire, qui peut être analysée avec un outil statistique.



**Remarque 1 :** l'extension du raisonnement en fluide compressible conduit aisément à des fluctuations de pression  $P'$ , de température  $T'$ , de masse volumique  $\rho'$  (ou volume massique).

**Remarque 2 :** le passage de l'ordre au désordre dans la turbulence se traduit par l'ajout à la dissipation moyenne d'énergie, d'une dissipation de type aléatoire associée à une « viscosité » à microéchelle, à l'évolution et au renouvellement des diverses structures.

Il est hors de propos ici d'entrer dans le détail du monde de la turbulence ; le lecteur est renvoyé pour ce faire vers les traités spécialisés de mécanique des fluides.

On se contente ici d'un bref historique sur les diverses théories, qui vont de l'approche de Boussinesq à la théorie de Prandtl qui a introduit la notion de longueur de mélange par analogie avec la notion de libre parcours moyen dans les gaz (voir chapitre 12), puis les théories de Taylor et Von Karmann.

Actuellement se développent des tentatives pour intégrer les diverses corrélations disponibles, avec les diverses échelles d'espace et de temps : la relation avec les approches fractale, constructale et la thermodynamique en dimensions finies paraissent déterminantes (Queiros Condé D.).

### ► Nombres adimensionnels

Sans entrer dans le détail des mécanismes de turbulence, on a vu apparaître d'un point de vue macroscopique global l'intérêt de nombres adimensionnels dont le nombre de Reynolds qui caractérise l'écoulement ; cela n'est pas sans rappeler la démarche qui a conduit à l'équation de Van Der Waals réduite (chapitre 6).

De fait, il est possible de généraliser la démarche consistant à travailler en variables réduites et équations réduites : cela conduit à ce qu'il est convenu d'appeler *l'analyse dimensionnelle*.

Il en résulte diverses similitudes (géométrique, cinématique, dynamique).

On donne dans le tableau récapitulatif 13.1 un aperçu des nombres adimensionnels principaux dont certains ont déjà été introduits dans ce chapitre (les autres à venir) ; la liste de ces nombres sera complétée dans la suite de l'ouvrage au fur et à mesure des besoins.

**TABLEAU 13.1** PRINCIPAUX NOMBRES ADIMENSIONNELS UTILES EN TRANSFERTS CONVectifs

Nombre de	Notation	Définition	Remarque
Reynolds	Re	$\frac{\rho V D_H}{\mu}$	$\frac{\text{Force d'inertie}}{\text{Force de viscosité}}$
Knudsen	Kn	$\frac{L}{D_H}$	$\frac{\text{Dimension fluide}}{\text{Dimension structure}}$
Nusselt	Nu	$\frac{h D_H}{\lambda}$	$\frac{\text{Chaleur convectée}}{\text{Chaleur conduite}}$



Nombre de	Notation	Définition	Remarque
Prandtl	Pr	$\frac{\mu C_P}{\lambda}$	<u>Diffusivité mouvement</u> Diffusivité thermique
Coefficient de frottement	Cf, f	$\frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$	<u>Contrainte à la paroi</u> Pression dynamique du fluide
Mach	Ma	$\frac{V}{a}$	<u>Vitesse du fluide</u> Vitesse du son
Grashoff	Gr	$\frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu^2}$	<u>Force ascensionnelle*Force d'inertie</u> (Force de viscosité)
Schmidt	Sc	$\frac{\nu}{D_{AB}}$	<u>Diffusivité de mouvement</u> Diffusivité de matière
Sherwood	Sh	$\frac{k_L L}{D_{AB}}$	Analogue du Nu en transfert de matière

Tous ces nombres jouent un rôle primordial dans la définition des domaines d'utilisation et dans la recherche des corrélations de transferts qui vont être évoquées ci-après.

**Remarque :** aux nombres précédents peuvent être ajoutés des nombres qui sont des composés des précédents. Parmi ceux-ci, on indique :

- le nombre de Péclet Pe,  $Pe = Re.Pr$
- le nombre de Stanton St,  $St = Nu/Pe$
- le nombre de Rayleigh Ra,  $Ra = Gr.Pr$ .

#### ► Corrélations de transfert : quelques exemples

L'objectif est ici d'illustrer en partant du cas étudié (écoulement en tube cylindrique circulaire) une démarche qui sera utile pour les développements qui suivent (utilisation de corrélations), ainsi que de l'étendre pour montrer l'extrême diversité des résultats disponibles et, par conséquent, l'extrême précaution qui doit être à la base de l'utilisation de ceux-ci.

Le cas le plus simple de la convection forcée pour un écoulement interne est celui du tube à section circulaire.

On rappelle que dans ce cas le diamètre hydraulique  $D_H$ , longueur caractéristique de l'écoulement se confond avec le diamètre interne de la canalisation ; la longueur d'établissement du régime hydraulique vaut par ailleurs environ  $10D_H$ .

**Remarque :** la définition du diamètre hydraulique d'une canalisation quelconque s'exprime sous la forme générale :

$$D_H = \frac{4A_t}{p} = \frac{4V}{A_l}$$

$A_t$ , aire transversale du tube

$A_l$ , aire longitudinale (ou mouillée) du tube

$p$ , périmètre mouillé de la section transversale

$V$ , volume offert au fluide.

On note que la première expression est locale (pour une section), alors que la seconde intéresse tout le volume de la structure.

Dans ces conditions deux postes successifs doivent être considérés.

La forme générale de la corrélation résultant de l'analyse de Colburn s'exprime sous la forme :  $Nu = f(Re, Pr)$ . Soit ici :

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,80} \cdot Pr^{1/3} \quad (13.18)$$

Dans cette relation, les propriétés du fluide doivent être prises à la température de film  $T_f$   $\left( T_f = \frac{T_p + T_m}{2} \right)$ .

Toute corrélation s'applique sur un domaine précisé par son auteur ; ici  $L/D > 60$  ;  $0,7 < Pr < 100$  ;  $10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5$ .

**Remarque :** lorsque le fluide est sujet à une forte thermodépendance de ces propriétés, en particulier la viscosité, Sieder et Tate ont introduit un facteur correctif au  $Nu$  fourni par (13.18) : celui-ci vaut  $(\mu_m/\mu_p)^{0,14}$ .

Les pertes de charge régulières rendent compte de la dissipation mécanique dans le tube conformément à :

$$\Delta P = f \frac{4\Delta x}{D_H} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \quad (13.19)$$

$f$ , coefficient de frottement, tel que :  $\tau = f \cdot \frac{\rho V^2}{2}$ .

Souvent, le coefficient de frottement est remplacé par le coefficient de perte de charge  $\lambda$  ( $\lambda = 4f$ ), tel que :

$$\Delta P = \lambda \frac{\Delta x}{D_H} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \quad (13.20)$$

Coefficient de convection global :

Tube de longueur  $L$

$$\overline{Nu_D} = \frac{1}{L} \int_0^L Nu_D dx = f \left( Re_D, Pr, \frac{L}{D} \right)$$

Conditions de paroi quelconques

$$\overline{Nu}_{\text{ln}} = \frac{\bar{\alpha}_{\text{ln}} D}{\lambda} = \frac{\dot{q} \Delta T_{\text{ln}} D}{\lambda \pi L}$$

$\dot{q}$ , flux de chaleur global échangé sur  $L$

**Remarques :**

$$- \Delta T_{\text{ln}} \approx \frac{\Delta T_e + \Delta T_s}{2} \quad \text{si } 0,5 < \frac{\Delta T_s}{\Delta T_e} < 2$$

$$- \bar{\alpha}_{\text{ln}} \approx \bar{\alpha} \text{ si régime thermique établi } (\phi_p'' \text{ ou } T_p).$$

Régime thermique laminaire établi dans un tube :

$$A = \text{cte, forme quelconque } \lambda_* = \Delta P / \frac{L}{D_H} \cdot \rho \frac{V^2}{2}$$

**Remarque :** lorsque le fluide est à viscosité fortement dépendante de la température, McKays a proposé une correction au coefficient de perte de charge régulière  $\lambda$ , qui est multiplié par  $(\mu_p/\mu_m)^{0.5}$ .

Dans le cas du tube à section circulaire et à paroi lisse, il vient pour la corrélation de  $f$  en régime turbulent :

$$\begin{cases} f = 0,079 \cdot \text{Re}^{-1/4} & \text{pour } 3000 < \text{Re} < 2 \cdot 10^4 \\ f = 0,046 \cdot \text{Re}^{-1/5} & \text{pour } 2 \cdot 10^4 < \text{Re} < 10^6 \end{cases} \quad (13.21)$$

### Extensions essentielles

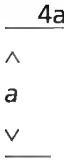
Convection forcée interne à des tubes : le tube à section circulaire est apparu comme une référence géométrique à laquelle on se ramène par l'intermédiaire du diamètre hydraulique  $D_H$ .

Nous avons plus particulièrement développé le modèle 1D, tube droit ; une première extension serait pour un tube courbe. Cela est important pour l'étude des coudes, et des échangeurs hélicoïdaux.

À titre d'exercice, le lecteur pourra reprendre la modélisation proposée en géométrie plane ; celle-ci est la représentation de base pour les échangeurs à plaques (voir ci-après).

Le tableau (13.2) présente une synthèse des résultats obtenus pour les deux géométries de base (section circulaire, puis rectangulaire) tant pour les transferts de chaleur ( $Nu$ ) que pour les pertes de charge  $\Delta P$ , conformément à (13.19) et (13.20), et ce pour les deux conditions aux limites envisagées à l'interface ( $\dot{q}'' = \text{cte}$  condition extensive ;  $T_p = \text{cte}$ , condition intensive).

**TABEAU 13.2** CORRÉLATIONS DE TRANSFERT DE CHALEUR ET DE PERTES DE CHARGE EN RÉGIME LAMINAIRE ÉTABLI DANS DES TUBES À SECTIONS VARIÉES

Géométrie	Nu		$C = f \cdot Re_{dh}$	$\lambda$
	$q'' = cte$	$T_p = cte$		
Circulaire	4,36	3,66	16	64
	5,35	4,44	18,3	73

Le tableau précédent fait apparaître la dépendance du coefficient de frottement à  $Re$  :  $f = C / Re$ .

Le diagramme de Moody (Figure 13.2) représente de façon synthétique l'évolution du coefficient de pertes de charge  $\lambda$  dans les tubes en fonction de la rugosité réduite des tubes.

Il apparaît clairement sur ce diagramme l'évolution des types d'écoulement lorsque  $Re$  augmente : laminaire, transition, turbulent hydrauliquement lisse puis rugueux.

On peut noter que ce diagramme rend compte de l'ensemble des résultats disponibles en littérature. Aussi, on a :

I  $\lambda = \frac{64}{Re}$  (relation de Hagen-Poiseuille), écoulement laminaire (zone a)

II  $\lambda = \frac{0,316}{Re^{1/4}}$  (formule de Blasius), ( $Re < 10^5$ ), turbulence lisse (zone b)

III  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \frac{D_H}{\epsilon} + 1,14$  (formule de Karmann-Prandtl), turbulence rugueuse (zone c).

**Remarque** : de nombreuses autres relations existent, en particulier dans les zones de transition (Comolet R.).

Convection dans un espace annulaire : le bitube étant la géométrie de base des échangeurs, les corrélations associées sont les suivantes :

$$Nu = 0,02 \left( \frac{Re_i}{Re_o} \right)^{-0,14} \cdot Re_{D_H}^{0,80} Pr^{0,40}$$

$$\lambda = 0,348 \left( Re_{D_H} \right)^{-1/4}$$

avec :  $D_H = 2(Re_i - Re_o)$

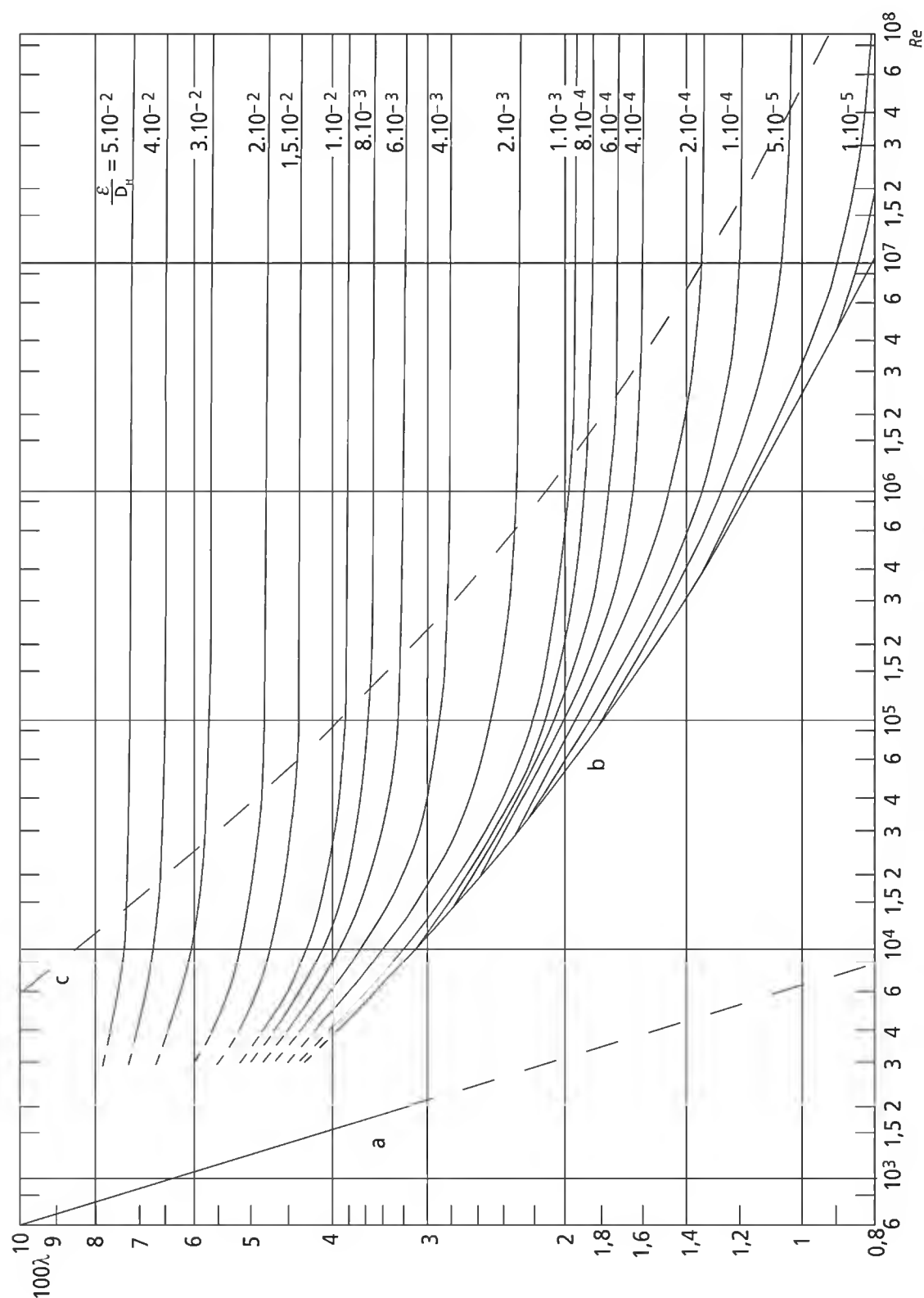


Figure 13.2 Diagramme de Moody

$R_{ie}$ ,  $R_{ei}$ , rayon externe du tube interne (respectivement rayon interne du tube externe).

Le cas de la convection forcée externe n'entre pas dans la catégorie des écoulements en conduite, mais constitue son complément indispensable, par rapport à la paroi.

Il est nécessaire et indispensable pour pouvoir remonter à la connaissance de coefficient global surfacique moyen de transfert  $kg$  dans les échangeurs de chaleur. D'où sa considération ici.

On notera essentiellement deux géométries dont on rapporte succinctement la plaque plane, et le cylindre transversal.

La plaque plane à  $T_p = cte$  nécessite la connaissance d'une vitesse d'écoulement, loin de la perturbation  $v_\infty$  (supposée constante).

On peut alors définir un  $Nu$  local par rapport au point d'attaque de la plaque ; ainsi à la distance  $x$  de ce point :

$$Nu(x) = \frac{hx}{\lambda} = 0,0332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$$

On définit ainsi un  $Nu$  moyen sur la longueur  $L$  de la plaque :

$$\overline{Nu_L} = \frac{hL}{\lambda} = 0,664 Pr^{1/2} Re_L^{1/2}$$

Les frottements sont caractérisés par :

$$Cf = 2St.Pr^{2/3}$$

$$\text{avec } St = \frac{h}{\rho C_p v_\infty}$$

**Remarque :** le domaine d'usage des corrélations précédentes est limité à  $0,5 < Pr < 10$ .

Le cylindre transversal à l'écoulement suppose comme vitesse de référence  $v_\infty$  (voir figure 13.3).

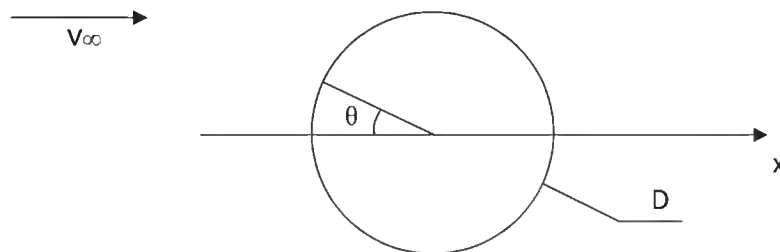


Figure 13.3 Convection forcée externe dans un écoulement transversal à un tube

Comme précédemment on peut définir un  $Nu$  local et un  $Nu$  moyen :

$$Nu_D(\theta) = f(\theta) \cdot Pr^{1/3} \cdot Re_D^{1/2}$$

$$\text{avec : } f(\theta) = 1,05 \left[ 1 - \left( \frac{\theta}{90} \right)^3 \right] \quad 0 \leq \theta \leq 80^\circ$$

$$\overline{Nu}_D = C Pr^{0,35} \cdot Re_D^n$$

$C$ ,  $n$  sont des fonctions de  $Re_D = \frac{\rho v_\infty D}{\mu} > 40$  qui sont données dans le tableau 13.3.

**TABLEAU 13.3** CONSTANTES DE LA CORRÉLATION GLOBALE DE TRANSFERT DANS UN ÉCOULEMENT TRANSVERSAL À UN TUBE.

$Re_D$	$C$	$n$
$10^2 \rightarrow 5 \cdot 10^3$	0,665	0,47
$5 \cdot 10^3 \rightarrow 5 \cdot 10^4$	0,22	0,60
$> 5 \cdot 10^4$	0,026	0,80

Les phénomènes de convection naturelle sont des phénomènes commandés par la thermodépendance en corrélation avec l'influence de la gravité.

Ils font intervenir des nombres adimensionnels spécifiques dont le nombre de Grashoff (ou le nombre de Rayleigh) : l'apparition de rouleau de convection traduisant une modification de structure du transfert (instabilité) correspond à un nombre de Rayleigh critique  $Ra_c$ .

Ce point ne sera pas détaillé plus avant, malgré son importance dans le domaine de l'habitat (convection naturelle en espace confiné tout particulièrement) de même que dans le domaine de l'énergie solaire thermique.

On se limitera ici à titre d'exemple à citer la corrélation de transfert thermique sur une plaque plane verticale de hauteur  $L$  ; cette plaque est supposée à température uniforme  $T_p = \text{cte}$ . Il vient alors pour  $Pr > 0,6$  :

$$\overline{Nu}_L = 0,53 (Gr_L Pr)^{1/2} \quad \text{pour } Gr_L Pr < 10^9$$

$$\overline{Nu}_L = 0,104 (Gr_L Pr)^{1/3} \quad \text{pour } 10^9 < Gr_L Pr < 10^{12}$$

**Remarque :** Eckert a donné une corrélation de forme différente valable

$$\forall Pr : \overline{Nu} = 0,53 \left[ \frac{Pr \cdot Ra}{0,245 + Pr} \right]^{1/4}$$

### 13.2.3 Convection forcée d'un fluide compressible

#### a) Écoulement dynamique stationnaire d'un fluide monophasique compressible : cas général

Ce cas est représentatif de l'écoulement d'un gaz dans un tube droit, mais qui peut être à section variable ; on retrouvera cela dans l'étude des convergents et divergents (tuyère). On supposera toutefois un tube droit (cas 1D linéaire).

**Remarque :** si le rayon de courbure d'un tube courbe est grand, la dissipation mécanique par variation de direction peut être négligée et le raisonnement proposé constitue une bonne approximation.

Dans l'étude présentée, les conditions amonts sont connues (conditions frontières :  $\dot{m}; P_i, T_i$ ), ainsi que la géométrie du tube ( $A_t(x); z(x)$ , côte du centre de gravité de la section transverse).

La vitesse moyenne débitante en résulte (conservation de la matière) :

$$V(x) = \dot{m} / \rho(P, T), A_t(x) \quad (13.22)$$

$A_t(x)$ , aire transverse du tube

$\rho(P, T)$ , masse volumique du fluide (équation d'état).

La conservation des quantités mécaniques par unité de matière entre deux sections distantes de  $dx$  (conservation de la quantité de mouvement) s'écrit (en bilan ingénieur) :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = -gdz - \delta W_f \quad (13.23)$$

avec  $dW_f$ , dissipation mécanique par frottement :

$$\delta W_f = \frac{\lambda}{D_H(x)} \cdot \frac{V^2}{2} \cdot dx \quad (13.24)$$

**Remarque :**  $\lambda$  pourrait être fonction de  $x$  (à donner) ;  $D_H(x) = \frac{A_t(x)}{p(x)}$  avec  $p(x)$  connue (géométrie imposée).

La conservation de l'énergie s'écrit entre ces deux même sections :

$$V \cdot dV + dh = \delta q - gdz \quad (13.26)$$

$\delta q$ , transfert de chaleur rapporté à l'unité de matière conformément à :

$$\delta q = \frac{k(x)p(x)[T_p(x) - T(x)]}{\dot{m}} dx \quad (13.27)$$

La température de paroi  $T_p(x)$  étant une contrainte (condition à la frontière du domaine, la connaissance d'une corrélation de transfert de chaleur adaptée fournit  $k(x)$ , coefficient de transfert de chaleur surfacique.



**Remarque :** si le transfert à la frontière est donné par une condition en densité surfacique de flux de chaleur  $\dot{q}''(x)$ , une corrélation n'est pas nécessaire.

Il résulte de la mise en équation précédente que les trois équations (13.22, 13.23, 13.26) font apparaître trois variables  $V(x)$ ,  $P(x)$ ,  $T(x)$ , qui sont liées à la connaissance de  $\rho$  et de  $h$  par l'équation d'état pour  $\rho$  et une équation supplémentaire pour  $h$  :  $h = h(P, T)$ .

La connaissance de cette fonction thermodynamique permet la résolution du problème.

Sauf cas particulier simple (écoulement adiabatique ou isotherme d'un gaz parfait dans une conduite de section constante, par exemple), la solution au problème est numérique (Corvisier Ph.).

La mise en équation précédente est importante dans la représentation et l'étude des phénomènes d'ondes et de leurs conséquences dans les écoulements stationnaires ou non dans des structures variées (tubes, tuyères, moteurs (Borel M.)).

Si la vitesse d'écoulement reste faible, et la taille de la structure petite, l'équation (13.26) se simplifie pour restituer l'équation classique des échangeurs de chaleur ; on retrouve le même problème que celui du paragraphe précédent.

Dans les paragraphes suivants, on va examiner deux cas particuliers correspondant aux écoulements adiabatique puis réversible.

**b) Écoulement dynamique stationnaire et adiabatique  
d'un fluide compressible en conduite de section constante**

Ce cas correspond à ce qu'il est coutume d'appeler la transformation de Fanno.

L'équation de conservation de la matière (13.22) devient :

$$\frac{\dot{m}}{A_i} = \rho_i V_i = \rho V = G \quad (13.28)$$

avec  $G$ , vitesse massique.

La conservation de l'énergie (13.26) pour le conduit supposé horizontal devient :

$$h + \frac{V^2}{2} = h_i + \frac{V_i^2}{2} \quad (13.29)$$

En choisissant un fluide de type gaz parfait  $\left(\frac{P}{\rho} = rT\right)$  et en combinant (13.28 et 13.29), il vient aisément :

$$P_i v_i - P v = \frac{G^2}{2} \cdot \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot (v^2 - v_i^2) \quad (13.30)$$

avec  $v = \frac{1}{\rho}$ , volume spécifique massique.

Si on pose  $b = \frac{G^2}{2} \cdot \frac{\gamma-1}{\gamma}$ , on trouve :

$$Pv \left( 1 + \frac{bv}{P} \right) = P_i v_i + b v_i^2 = cte \quad (13.31)$$

Cette relation est l'équation caractéristique de la transformation de Fanno. On peut montrer que  $\frac{bv}{P} = \frac{\gamma-1}{2} \cdot \frac{V^2}{a^2}$ , avec  $a$  vitesse du son dans le gaz parfait ; cette vitesse est une fonction de  $P$  et  $v$ , qui sera explicitée par ailleurs.

Il apparaît alors le nombre de Mach de l'écoulement,  $M = V/a$ .

**Remarque :** on voit que si  $V \ll a$ , la transformation thermodynamique est quasi isotherme pour le gaz parfait.

► Formes différentielles de l'équation caractéristique

L'équation (13.31) conduit de façon immédiate à :

$$\frac{dP}{P} = - \left[ 1 + (\gamma-1)M^2 \right] \frac{dv}{v}$$

ou

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma-1)M^2 \frac{dv}{v}$$

On rappelle que dans ces relations  $M$  est une fonction de  $P, T$ .

On en déduit alors la troisième forme :

$$\frac{dT}{T} = \frac{(\gamma-1)M^2}{1 + (\gamma-1)M^2} \cdot \frac{dP}{P}$$

► Courbe de Fanno en diagramme ( $T, s$ )

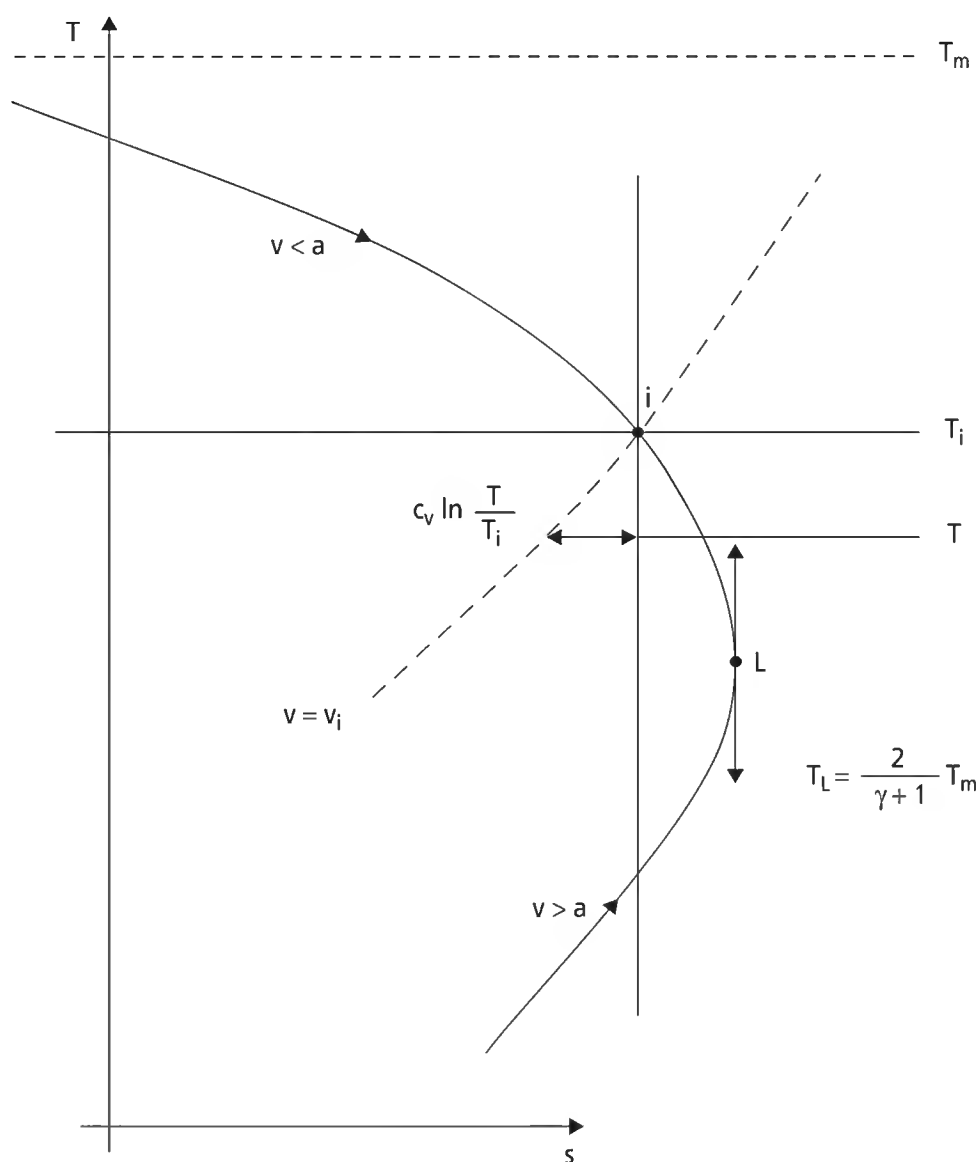
L'expression de l'entropie en fonction des variables  $T, v$  est :

$$s - s_i = c_v \ln \frac{T}{T_i} + r \ln \frac{v}{v_i}$$

Sachant que  $\left( \frac{v}{v_i} \right)^2 = 1 + \frac{r(T_i - T)}{b v_i^2}$  avec  $T_i, v_i$  connus (conditions d'entrée), il vient :

$$s - s_i = c_v \ln \frac{T}{T_i} + \frac{r}{2} \ln \left[ 1 + \frac{r(T_i - T)}{b v_i^2} \right] \quad (13.32)$$

La relation (13.32) est représentée sur la figure 13.4.

Figure 13.4 Courbe de Fanno en diagramme  $(T, s)$ .*Particularités de cette courbe*

Limite de  $T$  lorsque  $s \rightarrow -\infty$  ( $v \rightarrow 0$ )

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} T = T_m = T_i + \frac{bv_i^2}{r} = T_i \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} - \frac{V_i^2}{a_i^2} \right)$$

Maximum d'entropie

$$\frac{ds}{dT} = 0 = \frac{c_v}{T} - \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{T_m - T} \Leftrightarrow T_L = \frac{2}{\gamma + 1} \cdot T_m$$

► Irréversibilité de la transformation thermodynamique adiabatique

$$\frac{ds}{dT} = \frac{c_v}{T} - \frac{r^2}{2bv^2} \Leftrightarrow ds = \frac{V^2}{T^2} \cdot \frac{M^2 - 1}{\gamma(\gamma - 1)M^4} dT$$

On en déduit que :

Si  $V < a$  ( $M < 1$  ; régime subsonique) :  $dT < 0$  ;  $dP > 0$  ;  $dv > 0$  ;  $dV > 0$ . Le point se déplace vers L, sur la partie supérieure de la courbe de Fanno.

Si  $V > a$  ( $M > 1$  ; régime supersonique) :  $dT > 0$  ;  $dP > 0$  ;  $dv < 0$  ;  $dV < 0$ . Le point se déplace vers L, sur la partie inférieure de la courbe de Fanno.

Au point L, l'écoulement est sonique tel que :

$$V_L = a_L = \sqrt{\gamma r T_L} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1} a_i^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma - 1} V_i^2}$$

c) *Écoulement dynamique stationnaire et isentropique d'un fluide compressible dans une conduite de section constante*

Cet écoulement adiabatique réversible (sans frottement) satisfait toujours l'équation (13.28), mais l'équation (13.29) prend une forme simplifiée, soit sous forme différentielle :

$$vdP + VdV = 0 \quad (13.33)$$

La combinaison de (13.33) avec (13.28) conduit à :

$$dP = -GdV = -G^2 dv$$

Connaissant les conditions limites de l'écoulement ( $P_i T_i$ ) et l'équation d'état du gaz ( $Pv = rT$ ), il vient par intégration :

$$\frac{P}{P_i} + 1 = G^2 \frac{v_i}{P_i} \left( 1 - \frac{v}{v_i} \right)$$

ou

$$\frac{T}{T_i} = \frac{v}{v_i} + G^2 \frac{v}{P_i} \left( 1 - \frac{v}{v_i} \right) \quad (13.34)$$

On voit sur les équations ci-dessus que la transformation correspondante du gaz parfait est linéaire dans le diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ) (figure 13.5) ; cette transformation est dite transformation de Rayleigh.

► Forme différentielle de l'équation caractéristique

La transformation de l'équation (13.33) conduit après quelques calculs simples à :

$$\frac{dP}{P} = -\gamma M^2 \frac{dv}{v}$$

$$\text{d'où : } \frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dv}{v} = (1 - \gamma M^2) \frac{dv}{v}.$$

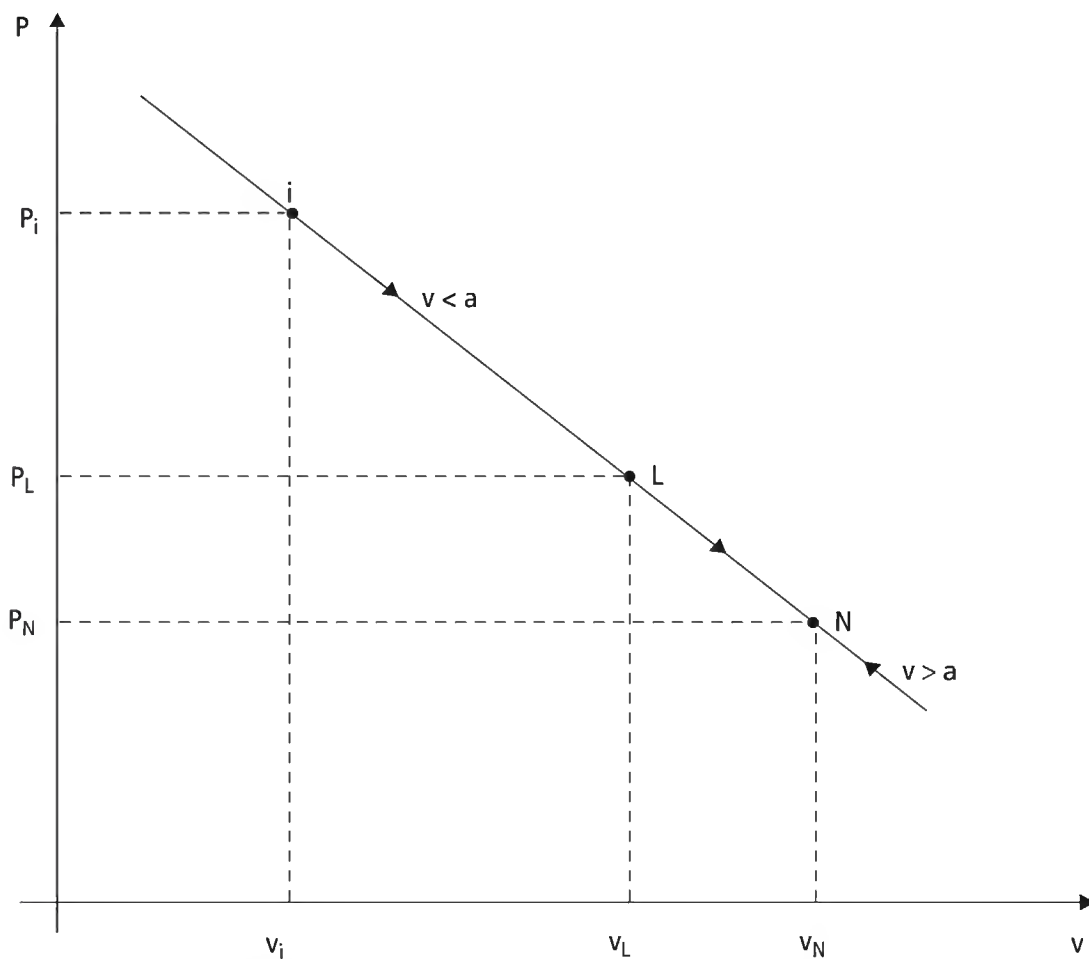


Figure 13.5 Droite de Rayleigh en diagramme (P, v)

Il en résulte :  $\frac{dT}{T} = -\frac{1-\gamma M^2}{\gamma M^2} \cdot \frac{dP}{P}$ .

► Courbe de Rayleigh dans le diagramme (T, s)

L'expression de l'entropie demeure :

$$s - s_i = c_v \ln \frac{T}{T_i} + r \ln \frac{v}{v_i} \quad (13.35)$$

En posant :  $m_i = \frac{G^2 v_i}{P_i} = \gamma M_i^2$ , l'équation (13.34) prend la forme d'une équation

du second degré en variable  $\frac{v}{v_i}$ , d'où :

$$\frac{v}{v_i} = \frac{1+m_i}{2m_i} \pm \frac{1}{2m_i} \sqrt{(1+m_i)^2 - 4m_i \frac{T}{T_i}}$$

**Remarque :** on appelle  $\beta$  le radical de l'expression ci-dessus.

Il en résulte la courbe de Rayleigh en diagramme  $(T, s)$  (figure 13.6).

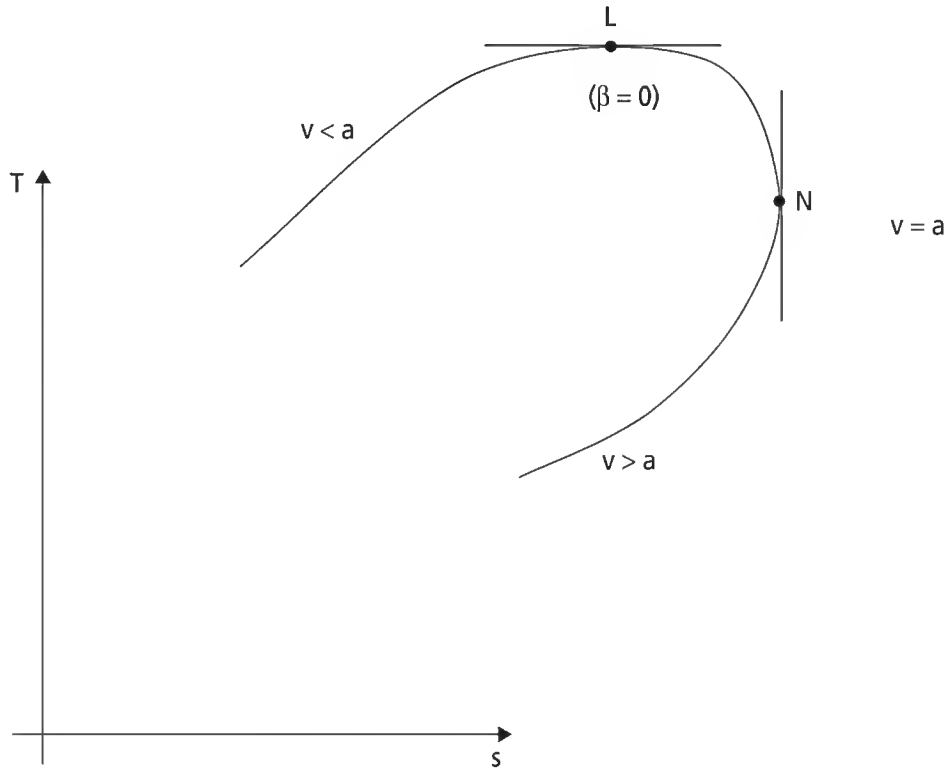


Figure 13.6 Courbe de Rayleigh en diagramme entropique

#### Particularités de cette courbe

L'expression différentielle de la variation d'entropie est facile à obtenir en fonction de  $T$  à partir de (13.35) et de l'équation caractéristique sous forme différentielle en variables  $T$  et  $v$  :

$$ds = c_p \frac{1 - M^2}{1 - \gamma M^2} \cdot \frac{dT}{2} \quad (13.36)$$

Tangente horizontale au point  $L$  :

$$\frac{dT}{ds} = 0 ; M^2 = \frac{1}{\gamma} ; V^2 = P v$$

d'où :  $\frac{p_L}{P_i} = \frac{1 + \gamma M_i^2}{2}$  (vu que  $P + \frac{V^2}{v} = cte$ , équation caractéristique).

$$\frac{v_L}{v_i} = \frac{1 + \gamma M_i^2}{2\gamma M_i^2} = \frac{1 + m_i}{2m_i} (\beta = 0)$$

$$\frac{T_L}{T_i} = \frac{(1 + \gamma M_i^2)}{4\gamma M_i^2} = \frac{(1 + m_i)^2}{4m_i}$$

Tangente verticale au point N :

$$\frac{ds}{dT} = 0 ; M^2 = 1 ; V^2 = \gamma P v$$

L'équation caractéristique conduit alors à :

$$\frac{P_N}{P_i} = \frac{1 + \gamma M_i^2}{1 + \gamma}$$

$$\frac{v_N}{v_i} = \frac{1 + \gamma M_i^2}{(1 + \gamma) M_i^2}$$

$$\frac{T_N}{T_i} = \frac{(1 + \gamma M_i^2)^2}{(1 + \gamma)^2 M_i^2}$$

### ► Description de l'écoulement à partir du diagramme ( $T, s$ )

La transformation étant réversible, la variation d'entropie est associée à un échange de chaleur du fluide avec l'extérieur ( $\delta Se$ ) :

Couplage des transferts de matière et de chaleur tels que  $dS > 0 \Leftrightarrow \delta Q > 0$  (et réciproquement).

La relation (13.36) peut s'exprimer aisément en fonction de  $P, v$  ou  $V$  sous la forme :

$$dS = -C_p \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} \cdot \frac{dP}{P} = C_p (1 - M^2) \frac{dv}{v} = C_p (1 - M^2) \frac{dV}{V} \quad (13.37)$$

### Gaz chauffé par l'extérieur

Régime subsonique ( $V < a ; M < 1$ ). L'expression (13.37) montre que l'écoulement est accéléré.

Si  $V^2 < P v$ , on se déplace vers le point L ( $1 - \gamma M^2 > 0 ; T$  augmente).

En L  $V^2 = P v$  ( $\gamma M^2 = 1$ ) ; on atteint la vitesse d'obstruction thermique. Au-delà du point L  $V^2 > P v ; T$  diminue ( $1 - \gamma M^2 < 0 ; M^2 < 1$ ).

Régime supersonique ( $V > a ; M > 1$ ). L'écoulement est décéléré ;  $v$  diminue,  $P$  et  $T$  augmentent. L'état limite ( $M = 1$ ) est atteint en N ; le fluide atteint la vitesse du son :

$$V_N = a_N = \sqrt{\gamma R T_N} = \frac{1 + \gamma M_i^2}{(1 + \gamma) M_i} \sqrt{\gamma R T_i}$$

### Gaz refroidi par l'extérieur

$\delta Q < 0$ , correspond à une décroissance de l'entropie ; les phénomènes sont inverses de ceux décrits pour le gaz chauffé.

$$\text{Remarque : } a_L = \sqrt{rT_L} = \frac{1 + kM_i^2}{2kM_i} \cdot a_i$$

### 13.2.4 Transferts de chaleur sensible à travers une paroi

Ayant à disposition la connaissance des transferts conductifs en paroi (chapitre 12), puis des transferts convectifs aux deux interfaces avec les fluides chaud C et froid F, on propose de rechercher l'expression générale du coefficient de transfert de chaleur global surfacique  $k$ .

Cette recherche va être proposée pour les deux géométries d'échange élémentaires de base, à savoir plane, puis cylindrique ; cette étude représente bien le régime dynamique stationnaire à température de paroi  $T_p$  uniforme des échangeurs de chaleur.

#### a) Définition du coefficient de transfert de chaleur global surfacique

Le coefficient  $k$  est tel qu'en régime dynamique stationnaire, il rend compte de la relation entre la densité surfacique de flux transmise du fluide chaud vers le fluide froid à travers la paroi, quels que soient les mécanismes de transfert mis en jeu (intégration de ceux-ci), avec la force motrice thermique existant localement entre les deux fluides,  $\Delta T$ .

Cette différence de température correspond à la différence des températures de mélange du fluide chaud  $T_C$  et du fluide froid  $T_F$ .

**Remarque :** l'indice  $m$  des températures de mélange est omis pour alléger les écritures dans tout ce qui suit.

La relation fondamentale des transferts de chaleur locaux en résulte :

$$\dot{q}'' = k \cdot \Delta T = k(T_C - T_F) \quad (13.38)$$

#### b) Expression de $k$ en géométrie plane

La figure 13.7 représente le cas général des transferts de chaleur en géométrie plane.

En première analyse, on suppose que les transferts aux interfaces sont uniquement convectifs ; ils sont représentés conformément aux corrélations adéquates par les coefficients de transfert surfaciques  $h_C$ , côté chaud,  $h_F$ , côté froid ; conformément à la représentation, il en résulte les expressions suivantes des densités surfaciques de flux transmises du côté chaud, et du côté froid (respectivement) :

$$\dot{q}'' = h_C(T_C - T_{P_c}) = h_F(T_{P_f} - T_F) \quad (13.39)$$

On a vu au chapitre 12 que le flux de chaleur conduit dans la plaque était tel que :



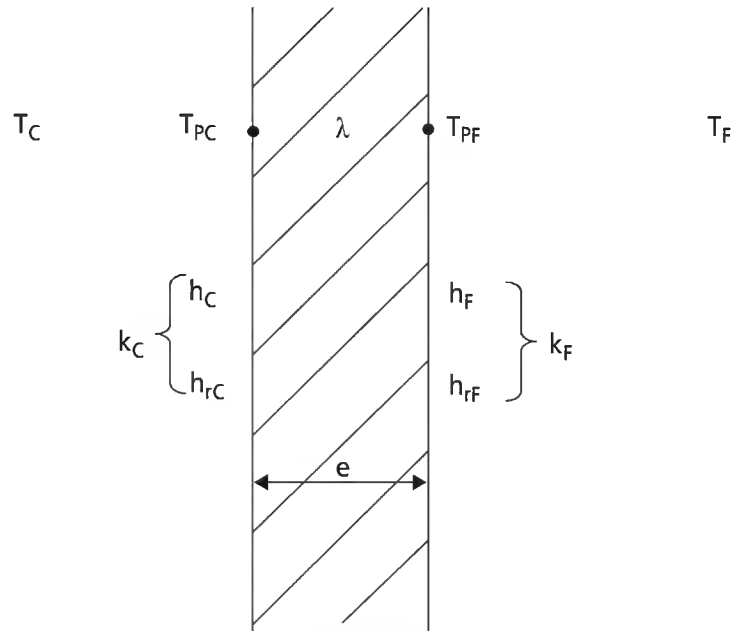


Figure 13.7 Schématisation des transferts de chaleur en géométrie plane

$$q'' = \frac{\lambda}{e} (T_{P_c} - T_{P_f}) \quad (13.40)$$

En régime dynamique stationnaire (cas étudié), la combinaison des équations (13.38 à 13.40) permet l'élimination des températures et des densités surfaciques de flux pour donner :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{h_C} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_F} \quad (13.41)$$

**Remarque 1 :** les températures  $T_C$  et  $T_F$  étant des paramètres, il est facile d'en déduire les expressions des températures de paroi :

$$T_{P_c} = T_C - \frac{k}{h_C} (T_C - T_F) ; T_{P_f} = T_F + \frac{k}{h_F} (T_C - T_F)$$

**Remarque 2 :** en présence d'encrassement de la surface d'échangeur, il apparaît un dépôt (supposé uniforme) sur les surfaces ; cela est représenté par une résistance de conduction surfacique supplémentaire  $r_C$ , côté chaud,  $r_F$ , côté froid. La relation (13.41) devient :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{h_C} + r_C + \frac{e}{\lambda} + r_F + \frac{1}{h_F} \quad (13.42)$$

### c) Expression de $k$ en géométrie cylindrique

La démarche est identique à celle adoptée au paragraphe précédent, sauf que la conduction dans la matière du tube nécessite l'intégration de l'équation de la chaleur en géométrie cylindrique (voir chapitre 12) ; cela ne pose pas de difficulté.

La remarque importante est que, en géométrie cylindrique et régime dynamique stationnaire, c'est le flux transmis  $\dot{q}'$  (par unité de longueur) qui se conserve : alors l'expression de  $k$  nécessite le choix d'une surface de référence, pour les conductances surfaciques. Dans le cas où la surface interne du tube est choisie, il vient :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{h_C} \cdot \frac{R_i}{R_e} + \frac{R_i \ln \frac{R_e}{R_i}}{\lambda} + \frac{1}{h_F} \quad (13.43)$$

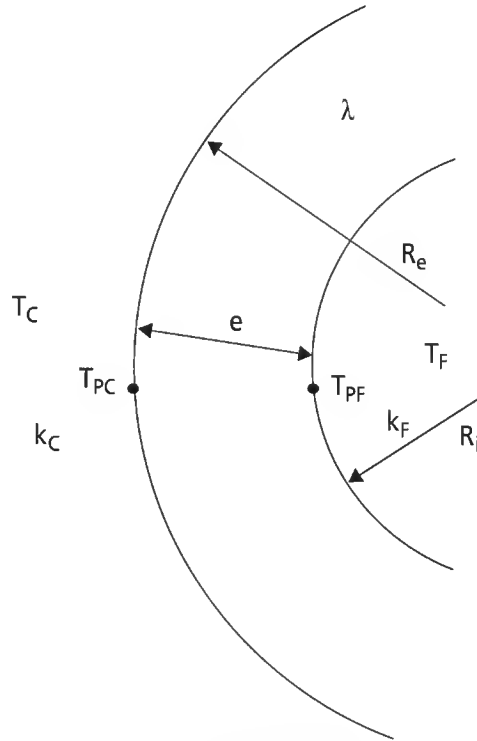


Figure 13.8

**Remarque 1 :** un encrassement uniforme des surfaces de transfert conduit à une relation analogue à (13.42) (référence surface interne) :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{h_C} \cdot \frac{R_i}{R_e} + r_C \cdot \frac{R_i}{R_e} + \frac{R_i \ln \frac{R_e}{R_i}}{\lambda} + r_F + \frac{1}{h_F} \quad (13.44)$$

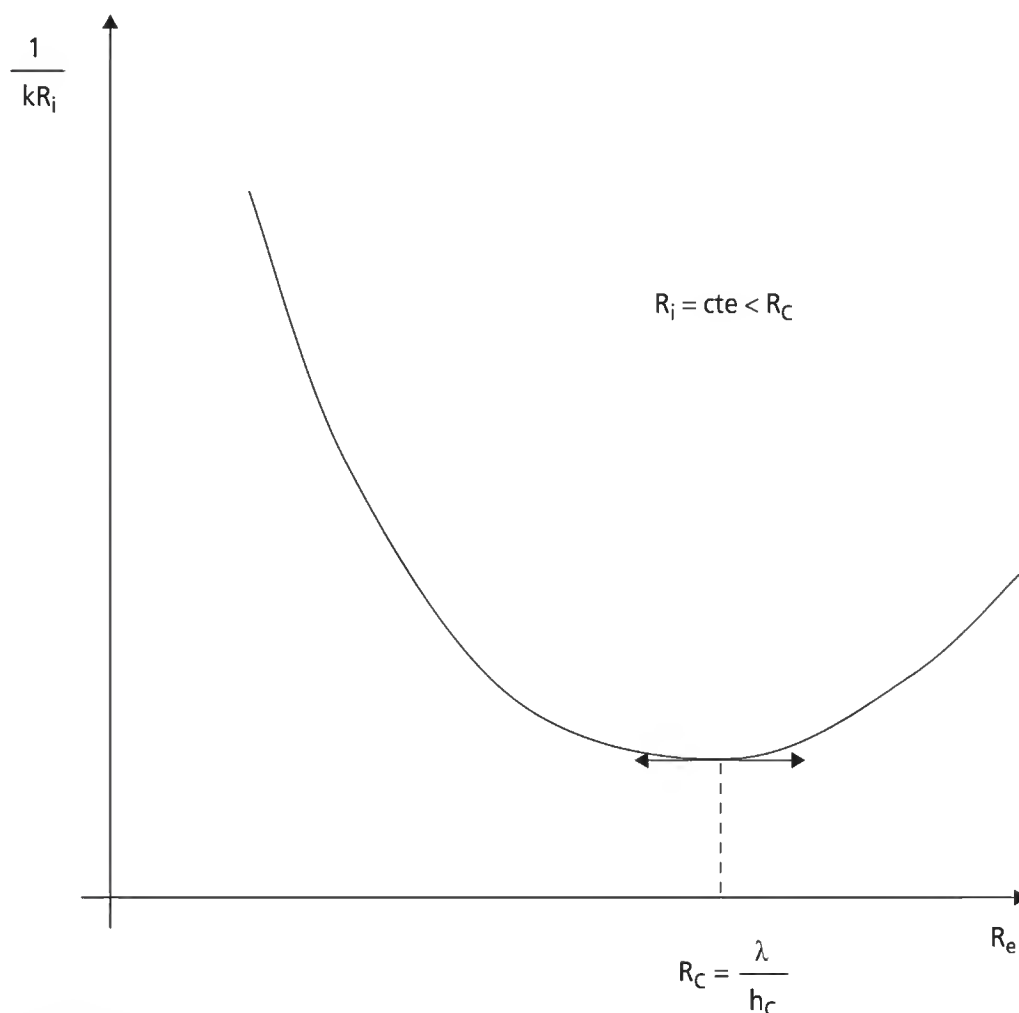
**Remarque 2 :** si l'épaisseur de tube  $e = (R_e - R_i)$  est petite devant  $R_i$ , le lecteur retrouvera aisément comme cas limite le cas plan du paragraphe b.

► Géométrie optimale de transfert thermique

En reprenant l'expression (13.43), et en supposant les températures des fluides données, il est aisé de montrer qu'il existe une géométrie optimale en termes de rayon externe (mais à rayon interne paramètre) qui maximise le flux de chaleur transmis par unité de longueur.

La figure 13.9 représente l'évolution de la résistance thermique linéïque ; cette résistance passe par un minimum pour une valeur de  $R_e = \lambda / h_c = R_c$  (rayon critique).

Si  $R_i < R_c$ , on a avantage à diminuer le rayon externe si cela est possible jusqu'à la valeur  $R_c$ .



**Figure 13.9** Évolution de la conductance de transfert par unité de longueur en fonction de  $R_e$ , à  $R_i = \text{cte} < R_c$ .

d) L'essentiel de l'encrassement des échangeurs thermiques

L'encrassement des échangeurs de chaleur correspond en fait à un régime transitoire, généralement de type glissant (ou lent).

L'encrassement détériore toujours les performances de l'échangeur dans le temps, tant du point de vue thermique, comme il a été vu ci-dessus, que du point de vue mécanique (augmentation des pertes mécaniques par frottement).

L'évolution des résistances d'encrassement se traduit par des dépôts obéissant à des mécanismes complexes. Les principaux mécanismes sont :

- entartrage : précipitation des sels ( $CaSO_4$  ;  $Ca(PO_4)_2$  ;  $CaCO_3$ ) ;
- encrassement particulaire : dépôt sur les parois de particules solides en suspension dans un fluide. Exemples : sable, débris de corrosion, imbrûlés dans un produit de combustion ;
- encrassement par réaction chimique : accumulation sur la surface d'échange des produits d'une réaction chimique véhiculés par le fluide (sans participation). Exemple : polymérisation cracking dans le traitement d'hydrocarbures ;
- corrosion : réaction chimique entre le fluide et la paroi.

Le tableau 13.4 rend compte des ordres de grandeur des résistances d'encrassement couramment rencontrées dans les applications.

TABLEAU 13.4 ORDRES DE GRANDEUR DE RÉSISTANCES D'ENCRASSEMENT.

Fluide et conditions	Résistance d'encrassement ( $m^2 \cdot ^\circ C / W$ )
Eau de mer $T < 50^\circ C$	$10^{-4}$
Eau de mer $T > 50^\circ C$	$2 \cdot 10^{-4}$
Eau de rivière sale	$10 \cdot 10^{-4}$
Eau traitée de chaudière	$2 \cdot 10^{-4}$
Vapeur non grasse	$10^{-4}$
Air industriel	$4 \cdot 10^{-4}$
Liquide réfrigérant	$2 \cdot 10^{-4}$
Gasoil	4 à $6 \cdot 10^{-4}$
Essence et kérosène	$2 \cdot 10^{-4}$

On remarquera que ces valeurs sont des valeurs forfaitaires moyennes, et par conséquent indépendantes du temps ; on reverra en fin de ce chapitre, que la connaissance d'une cinétique d'encrassement permet une optimisation du fonctionnement dans le temps de l'échangeur.

Les grandeurs fournies dans le tableau 13.4 sont utiles à la conception de l'échangeur, pour anticiper sur le phénomène d'encrassement et garantir un fonctionnement nominal.

e) *Quelques ordres de grandeur de coefficients de transfert de chaleur globaux*

Le tableau 13.5 rapporte un échantillonnage représentatif des principales utilisations rencontrées dans les échangeurs de chaleur sensible, selon la nature du fluide chaud et du fluide froid.

Chaque coefficient est donné avec une fourchette de variation qui représente l'influence de la nature du fluide (masse volumique, mélange), mais aussi des niveaux de température et des conditions d'écoulement.

On notera enfin que la rubrique condenseurs-évaporateurs ne relève que pour partie des transferts en chaleur sensible, puisque l'un des fluides subit un changement de phase ; ce point sera repris ci-après, vu son importance pratique et sa spécificité.

**TABEAU 13.5** QUELQUES ORDRES DE GRANDEUR DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT DE CHALEUR SURFACIQUE D'ÉCHANGEURS

Échangeurs		
Fluide chaud	Fluide froid	W/m <sup>2</sup> .°C
Eau	Eau	1 250-2 500
Solutions aqueuses	Solutions aqueuses	1 250-2 500
Organiques	Organiques	50-350
Réfrigérants		
Eau, méthanol, ammoniacque et solutions aqueuses	Eau	1 250-2 500
Organiques	Eau	50-750
Gaz	Eau	10-250
Eau	Saumure	500-1 000
Organiques	Saumure	200-500
Réchauffeurs		
Vapeur d'eau	Eau, méthanol, ammoniacque, solutions aqueuses	500-3 500
Vapeur d'eau	Organiques	50-1 000
Vapeur d'eau	Gaz	25-250
Condenseurs – Évaporateurs		
Organiques divers		300-600

► Valeurs approchées pour  $k$ 

N°	Type d'échangeur	$k$ (W/m²K)
1	Eau-eau	600 - 1 200
2	Vapeur-eau	800-1 500
3	Gaz brûlés-eau	20-100
4	Gaz brûlés-air	10-50
5	Vapeur saturée-air	15-80
6	Eau chaude-air	15-60

### 13.3 ÉCHANGEURS DE CHALEUR

On considère ci-après le cas d'un échangeur dont la conductance surfacique  $k$  est supposée constante ; on supposera de plus que le transfert de chaleur ne s'effectue qu'en chaleur sensible, avec des chaleurs spécifiques massiques constantes pour le fluide chaud  $c_{p_c}$  et pour le fluide froid  $c_{p_f}$ , correspondant aux débits massiques imposés  $\dot{m}_c$  et  $\dot{m}_f$ .

#### 13.3.1 Évolution des températures le long de l'échangeur

Cette étude suppose de choisir un sens de parcours le long de l'échangeur pour rendre compte de l'évolution du transfert. La variable choisie est la surface  $a$ , ayant participé au transfert depuis l'origine choisie pour le transfert, à savoir l'entrée du fluide chaud  $T_{c_o}$  ; la surface de sortie  $A$  rend compte de la dimension finie de l'échangeur. À  $T_{c_o}$  correspond  $T_{f_o}$  pour le liquide froid.

##### a) Équations de transfert de chaleur élémentaire

Il existe trois équations couplées pour rendre compte de la conservation de l'énergie sur un élément quelconque d'échangeur d'aire  $da$ , dans le cas où il n'y a pas de pertes thermiques (adiabacité) :

$$\begin{cases} d\dot{q} = -\dot{m}_c c_{p_c} dT_c & (a) \\ d\dot{q} = \dot{m}_f c_{p_f} dT_f & (b) \\ d\dot{q} = k(T_c - T_f) da & (c) \end{cases} \quad (13.45)$$

**Remarque :** ces trois équations sont exprimées en notation ingénieur ( $d\dot{q} > 0$ ) ; de ce fait, la première équation calorimétrique fait apparaître un signe moins ( $dT_c < 0$  : refroidissement du fluide chaud).

Le système (13.45) par combinaison des deux premières relations calorimétriques conduit à :

$$T_F + RT_C = cte = T_{Fo} + RT_{Co} \quad (13.46)$$

$$\text{avec : } R = \frac{\dot{m}_C c_{pC}}{\dot{m}_F c_{pF}} = \frac{\dot{C}_C}{\dot{C}_F}$$

$\dot{C}_C, \dot{C}_F$ , respectivement débit calorifique du fluide chaud (du fluide froid).

(13.46) fournit  $T_F$  en fonction de  $T_C$  ; l'élimination de  $T_F$  dans l'égalité entre (13.45 a et c) fournit le profil de température  $T_C$ , et par conséquent  $T_F$ , en tenant compte de la condition à l'origine :

$$T_C(a) = \frac{T_{Fo} + RT_{Co} + (T_{Co} - T_{Fo}) \exp \left[ -\frac{ka}{\dot{C}_C} (1+R) \right]}{1+R} \quad (13.47)$$

$$T_F(a) = \frac{T_{Fo} + RT_{Co} - R(T_{Co} - T_{Fo}) \exp \left[ -\frac{ka}{\dot{C}_C} (1+R) \right]}{1+R} \quad (13.48)$$

### b) Divers profils de température en échangeur

#### ➤ Échangeur à cocourant ou antiméthodique

La figure 13.10.a représente l'évolution des températures chaude et froide en échangeur cocourant.

On remarque alors que  $R$  a une valeur positive quelconque. Les températures chaude et froide tendent toutes les deux vers la même limite :  $T_{\lim} = \frac{T_{Fo} + RT_{Co}}{1+R}$ .

#### ➤ Échangeur à contre-courant ou méthodique

Dans ce cas de figure, les deux fluides de transfert s'écoulent en sens opposé ; vu la référence choisie, il en résulte pour le fluide froid un écoulement dans le sens opposé au parcours de la surface ( $\dot{C}_F$ , est cette fois négatif ;  $T_F$  diminue selon l'axe  $a$ ) : la valeur de  $R$  devient une quantité algébrique négative.

Trois cas de figure en résultent pour les profils de température.

#### Fluide chaud limitant

Si  $-1 < R < 0$ , le fluide chaud est le fluide de plus petit débit calorifique ; les profils de température correspondant sont représentés sur la figure 13.10.b. Le fluide chaud est celui qui connaît la plus grande variation de température : sa température tend vers une température limite de même expression formelle que ci-dessus.

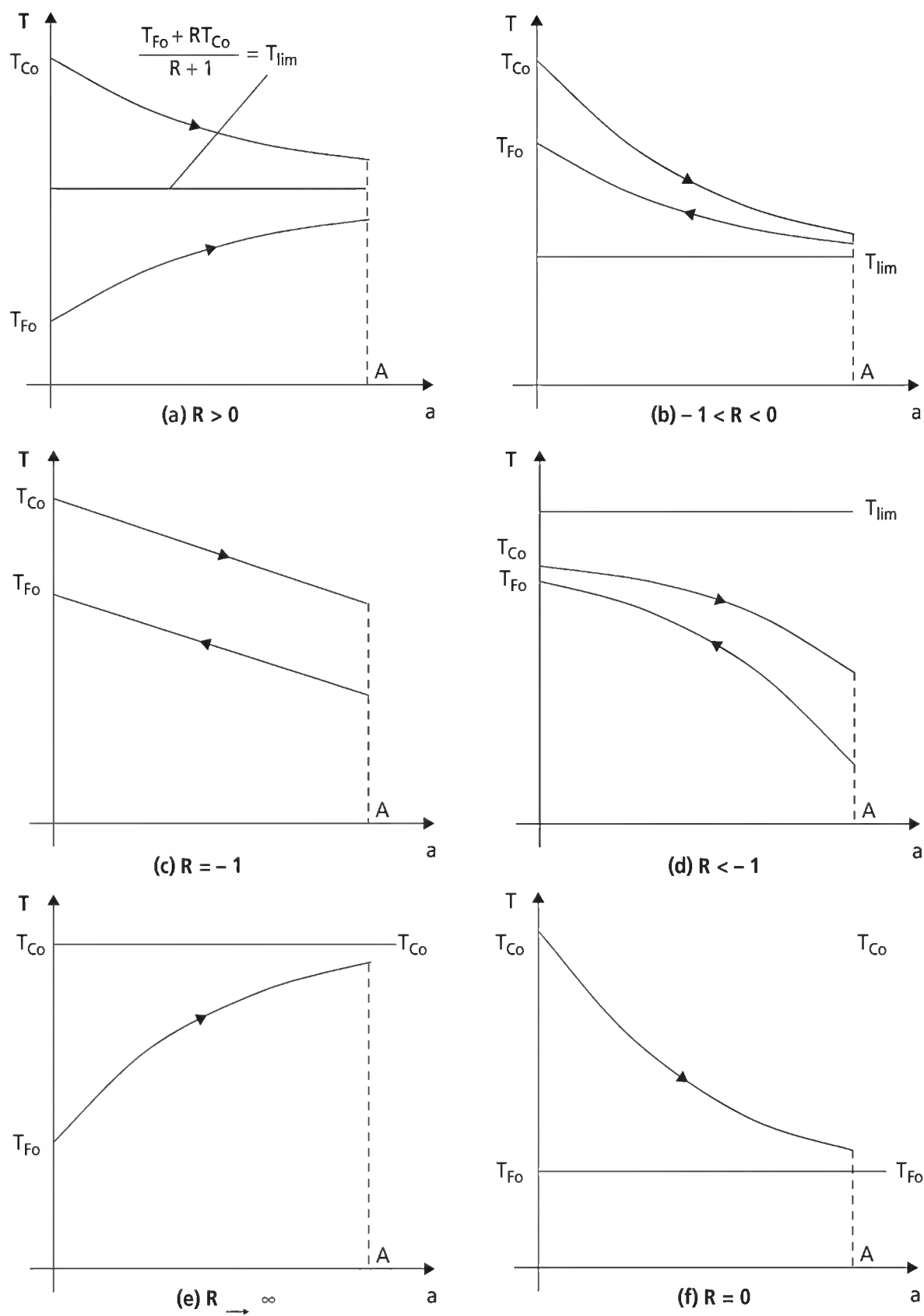


Figure 13.10 Divers profils de température en échangeur



*Échangeur équilibré*

Si  $R = -1$ , on rencontre alors le cas particulier où l'écart de température entre les deux fluides est constant, en tout point de l'échangeur (conformément à 13.46) : figure 13.10.c.

*Fluide froid limitant*

Si  $R < -1$ , le fluide froid devient limitant (fluide de plus petit débit calorifique) ; les profils de température correspondants sont représentés sur la figure 13.10.d. Le fluide froid voit cette fois sa température tendre vers la température limite.

**Remarque :** la température limite introduite a toujours la même expression formelle, sauf pour l'échangeur équilibré où elle disparaît. Cette notion a une signification physique en configuration cocourant ; par contre elle reste théorique en contrecourant, vu que  $T_{Fo}$  n'est pas une température d'entrée d'échangeur (paramètre).

➤ *Échangeur où l'un des fluides est à température constante*

Il y a ici deux possibilités selon que c'est le fluide chaud ou le fluide froid qui demeure à température constante ; ces deux cas de figure sont très importants en pratique : ils seront retrouvés dans la suite de l'ouvrage pour les applications dans les machines à cycles inverses (chapitre 15), mais aussi dans la production et l'utilisation de vapeur (essentiellement d'eau, chapitre 17). On reviendra dans la suite de ce chapitre sur ces échangeurs à changement de phases, pour l'essentiel. On se contente ici de les introduire, sous la forme d'un cas limite formel.

*Échangeur à condensation*

La relation (13.45.a) montre que à  $T_c = cte = T_{Co}$ , le flux de chaleur transféré ne peut être fini, que si  $\dot{C}_C$ , le débit calorifique associé tend mathématiquement vers l'infini ( $R \rightarrow \infty$ ) : on passe d'un transfert en chaleur sensible, à un transfert en chaleur latente.

La relation (13.48) du profil de température du fluide froid se simplifie en :

$$T_F(a) = T_{Co} - (T_{Co} - T_{Fo}) \exp \left[ \frac{-ka}{\dot{C}_F} \right] \quad (13.49)$$

La figure 13.10.e représente les évolutions de température des fluides dans un condenseur, pour un corps pur, en négligeant les pertes de pression.

**Remarque :** les configurations cocourant et contre-courant sont indifférenciées pour les condenseurs en fluide pur.

*Échangeur à vaporisation*

La relation 13.45.b montre cette fois que à  $T_F = cte = T_{Fo}$ , le flux de chaleur transféré ne peut être fini que si  $\dot{C}_F$  tend mathématiquement vers l'infini ( $R \rightarrow 0$ ) ; on passe à nouveau d'un transfert de chaleur sensible à un transfert de chaleur latente.

La relation (13.47) du profil de température du fluide chaud se simplifie en :

$$T_C(a) = T_{Fo} + (T_{Co} - T_{Fo}) \exp \left[ -\frac{ka}{\frac{o}{C_C}} \right] \quad (13.50)$$

La figure 13.10.f représente les évolutions de température des fluides dans un évaporateur, pour un fluide pur, en négligeant les pertes de pression.

### 13.3.2 Grandeurs caractéristiques globales d'un échangeur

Au modèle filaire précédent, va être utilement associé un modèle global d'échangeur de chaleur, dont la connaissance se résume aux données d'entrée et de sortie.

On conserve ici les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent, et la même référence (fluide chaud en entrée d'échangeur).

#### a) Températures caractéristiques et différences de températures dans un échangeur

Globalement, un échangeur de chaleur est un quadripôle thermique caractérisé par deux températures d'entrée des fluides chaud et froid  $T_{Ce}, T_{Fe}$  (paramètres), et deux températures de sortie  $T_{Cs}, T_{Fs}$  (variables).

À partir de ces quatre températures, on peut rechercher la température moyenne de chaque fluide ; le plus souvent cette moyenne est arithmétique :

$$T_{Cm} = \frac{T_{Ce} + T_{Cs}}{2} ; T_{Fm} = \frac{T_{Fe} + T_{Fs}}{2}$$

Ces températures sont utiles pour la détermination des propriétés thermophysiques des fluides (à cette température, ou la température de film).

**Remarque :** les températures  $T_{Ci}$  et  $T_{Fi}$  introduites sont des températures de mélange.

Pour un échangeur à faible variation de température entre entrées et sorties, il s'en déduit une différence de température moyenne arithmétique :

$$\Delta T_{nu} = T_{Cm} - T_{Fm} \quad (13.51)$$

La figure 13.11 rend compte de l'ensemble des différences de température qui apparaît naturellement sur l'échangeur (cas contre-courant).

Ainsi, quelle que soit la configuration de l'échangeur, on a toujours :

$$\Delta T_C = T_{Ce} - T_{Cs} ; \Delta T_F = T_{Fs} - T_{Fe}$$

$$\Delta T_{MAX} = T_{Ce} - T_{Fe}$$

Par contre, les écarts de température à l'entrée et à la sortie dépendent de la configuration sous la forme :

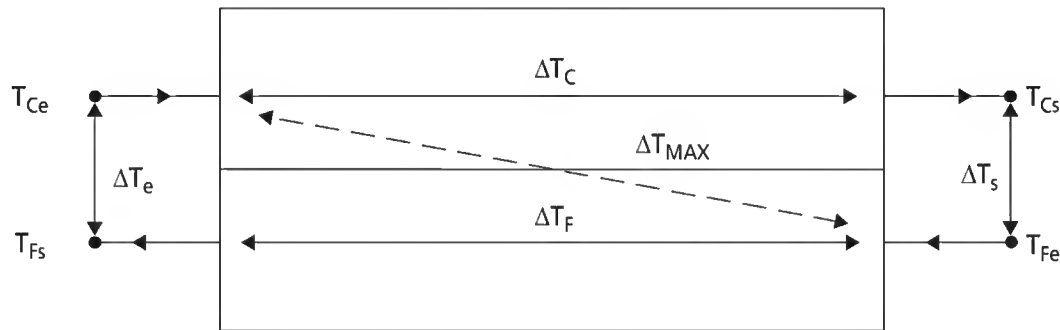


Figure 13.11 Différences de températures naturelles dans un échangeur

$$\Delta T_e = T_{Ce} - T_{Fe} \text{ (cocourant)} ; \Delta T_e = T_{Ce} - T_{Fs} \text{ (contre-courant)}$$

$$\Delta T_s = T_{Cs} - T_{Fs} \text{ (cocourant)} ; \Delta T_s = T_{Cs} - T_{Fe} \text{ (contre-courant)}$$

**Remarque 1 :** on montrera que pour les échangeurs de chaleur, il intervient une autre différence de température caractéristique : la différence de température moyenne logarithmique.

$$\Delta T_{ml} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_s}{\ln \frac{\Delta T_e}{\Delta T_s}} \quad (13.52)$$

**Remarque 2 :** la relation (13.51) qui constitue une approximation de la relation (13.52) peut toujours se mettre sous la forme générale suivante :

$$\Delta T_{ma} = \frac{\Delta T_e + \Delta T_s}{2} \quad (13.53)$$

Les équations calorimétriques entre entrée et sortie des fluides chaud et froid s'écrivent pour l'échangeur adiabatique :

$$\dot{q} = \dot{C}_C \cdot \Delta T_C = \dot{C}_F \cdot \Delta T_F \quad (13.54)$$

Il en résulte une nouvelle expression du rapport de  $R$  des débits calorifiques :

$$R = \frac{\dot{C}_C}{\dot{C}_F} = \frac{\Delta T_F}{\Delta T_C}$$

**Remarque :** certains ouvrages utilisent  $r = 1/R$ , comme rapport des débits calorifiques.

### b) Efficacité d'un échangeur de chaleur

#### ► Définition de l'efficacité d'un échangeur de chaleur

L'efficacité  $\varepsilon$  d'un échangeur de chaleur correspond à la valeur du rapport entre le flux réel échangé par cet échangeur  $\dot{q}$ , et le flux maximum échangeable dans les mêmes conditions,  $MAX \dot{q}$  :

$$\varepsilon = \dot{q} / \text{MAX } \dot{q} \quad (13.55)$$

Cette efficacité correspond à un rendement de l'échangeur, au sens du premier principe de la thermodynamique.

Sachant que le flux maximum échangeable vaut :

$$\text{MAX } \dot{q} = \dot{C}_{\min} \cdot \Delta T_{\text{MAX}} \quad (13.56)$$

avec  $\dot{C}_{\min} = \min \left[ \dot{C}_C; \dot{C}_F \right]$ , débit calorifique du fluide limitant.

► Efficacité de refroidissement d'un échangeur  $\varepsilon_C$

La combinaison des relations (13.54), (13.55), (13.56) conduit à :

$$\varepsilon_C = \frac{\dot{C}_C \cdot \Delta T_C}{\dot{C}_{\min} \cdot \Delta T_{\text{MAX}}}$$

Si  $\dot{C}_C < \dot{C}_F$ , il vient alors :

$$\varepsilon_C = \frac{\Delta T_C}{\Delta T_{\text{MAX}}}$$

► Efficacité de chauffage d'un échangeur  $\varepsilon_F$

Le même raisonnement que ci-dessus conduit à :

Si  $\dot{C}_F < \dot{C}_C$ , il vient alors :

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta T_F}{\Delta T_{\text{MAX}}}$$

Les expressions des efficacités seront utilisées dans le paragraphe qui suit.

### 13.3.3 Méthodes de calcul des échangeurs

On distinguera deux classes de méthodes permettant le calcul des échangeurs de chaleur :

- la méthode des Différences de Température Logarithmique Moyenne (DTLM) ;
- la méthode des Nombres d'Unités de Transfert (NUT).

On développera successivement ces deux méthodes.

## a) Méthode DTLM

Le calcul d'un échangeur de chaleur d'un point de vue global est basé sur l'intégration entre l'entrée et la sortie du système (13.45) : on dispose de trois équations pour trois inconnues. Deux des équations de bilan ont déjà été explicitées (13.54). Il reste à exprimer le transfert de chaleur à travers l'interface (la paroi).

On utilise pour ce faire (13.47) et (13.48) dont on fait la différence membre à membre ; il vient alors l'expression :

$$T_C(a) - T_F(a) = (T_{Co} - T_{Fo}) \exp \left[ \frac{-ka}{C_c} (1 + R) \right]$$

En particulierisant cette relation à la sortie chaude de l'échangeur, on a :

$$\ln \left( \frac{T_C(A) - T_F(A)}{T_{Co} - T_{Fo}} \right) = - \frac{kA}{C_c} (1 + R) \quad (13.57)$$

En se rappelant que les équations de bilan calorimétrique fournissent  $R$  sous la forme :

$$R = \frac{T_F(A) - T_{Fo}}{T_{Co} - T_C(A)} \quad (13.58)$$

La combinaison de (13.57) et (13.58) conduit après quelques manipulations à :

$$\dot{q} = kA \frac{[(T_C(A) - T_F(A)) - (T_{Co} - T_{Fo})]}{\ln \frac{T_C(A) - T_F(A)}{T_{Co} - T_{Fo}}} \quad (13.59)$$

Cette expression est l'expression générale de la différence de température logarithmique moyenne, qui conformément à la figure 13.11 sera écrite sous la forme :

$$\Delta T_{ml} = \frac{\Delta T_s - \Delta T_e}{\ln \frac{\Delta T_s}{\Delta T_e}} \quad (13.60)$$

**Remarque 1 :** la relation (13.60) est valable tant pour la circulation méthodique qu'antiméthodique.

**Remarque 2 :** le préalable à ce calcul est la connaissance de la conductance globale de transfert surfacique  $k$  (paragraphe 13.2) ; on rappelle aussi que la principale hypothèse au calcul précédent est que ce coefficient  $k$  soit une constante indépendante de la température (ceci n'est pas de fait).

## ► Extension de la méthode DTLM

La méthode DTLM a été présentement validée pour les deux configurations extrêmes d'échangeurs (co et contre-courant).

D'un point de vue technologique, les échangeurs sont géométriquement plus complexes. La figure 13.12 fournit quelques exemples d'échangeurs parmi les technologies les plus communes : échangeurs à faisceau de tubes et calandre, échangeurs à plaques, échangeurs compacts et à ailettes.

Il apparaît alors que les échangeurs peuvent être à écoulements croisés, à fluide brassé (mélangé) ou non, à passes multiples.

La façon la plus simple d'intégrer ces modifications dans le modèle consiste à généraliser la relation (13.59) sous la forme :

$$\dot{q} = F.k.A.\Delta T_{ml} \quad (13.61)$$

avec  $F$ , facteur correctif de la configuration généralement fournie par abaque.

**Remarque :** le facteur correctif représente pour l'échangeur considéré le rapport entre le  $\Delta T$  réel observé et le  $\Delta T_{ml}$  idéal de l'échangeur supposé en contre courant pur (situation thermodynamique la plus favorable : moindre irréversibilité thermique).

### b) Méthode NUT

Le nombre d'unités de transfert d'un échangeur, NUT, est un nombre sans dimension, caractérisant la capacité d'un échangeur à transmettre de la chaleur.

Cette définition était préfigurée dans les relations (13.47) et (13.48). D'un point de vue global sur l'échangeur, elle se traduit à partir des trois équations constitutives sous la forme :

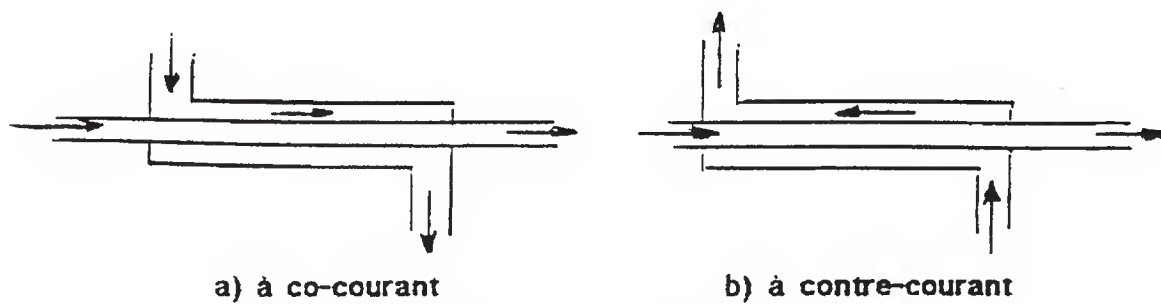
$$NUT_C = \frac{kA}{C_C} = \frac{\Delta T_C}{\Delta T_{ml}}$$

$$NUT_F = \frac{kA}{C_F} = \frac{\Delta T_F}{\Delta T_{ml}}$$

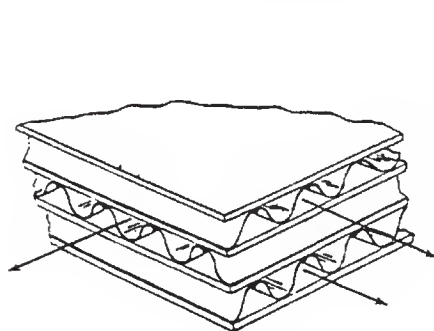
D'après la définition de l'efficacité, dans la méthode NUT, l'équation (13.61) est remplacée par la relation (13.62) :

$$\dot{q} = \varepsilon \dot{C}_{\min} \Delta T_{MAX} \quad (13.62)$$

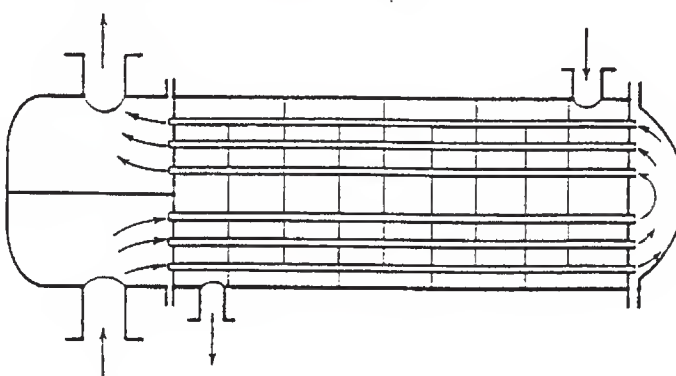
Dans cette relation, conformément aux développements proposés, il apparaît que  $\varepsilon$  est une fonction du NUT et de  $R$  ; ces relations restent accessibles pour les échangeurs de base méthodique et antiméthodique. Ces fonctions et les fonctions réciproques (NUT, fonction de  $\varepsilon$ ) sont données dans le tableau 13.6.



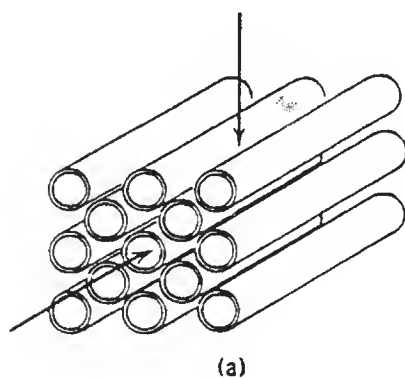
### ECHANGEURS à COURANTS PARALLELES



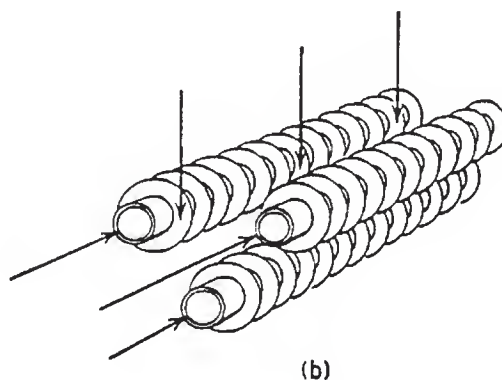
Echangeurs à plaques



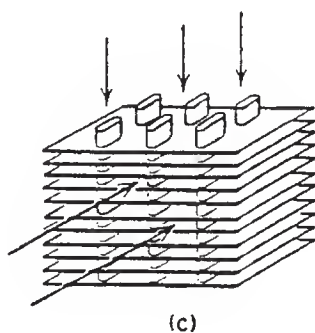
Echangeurs à tubes et calandre



(a)



(b)



(c)

### ECHANGEURS COMPACTS

Figure 13.12 Exemples d'échangeurs

**TABEAU 13.6** SYNTHÈSE COMPARATIVE DES RÉSULTATS  
POUR LES ÉCHANGEURS SIMPLES MÉTHODIQUE ET ANTIMÉTHODIQUE

	Courants parallèles	Contre-courant
$\Delta T_{ml} = \frac{\Delta T_e - \Delta T_s}{\ln \frac{\Delta T_e}{\Delta T_s}}$	$\Delta T_{mll} = \frac{(T_{ce} - T_{fe}) - (T_{cs} - T_{fs})}{\ln \left( \frac{T_{ce} - T_{fe}}{T_{cs} - T_{fs}} \right)}$	$\Delta T_{mlcc} = \frac{(T_{ce} - T_{fs}) - (T_{cs} - T_{fe})}{\ln \left( \frac{T_{ce} - T_{fs}}{T_{cs} - T_{fe}} \right)}$
$\varepsilon_c = \frac{\Delta T_c}{\Delta T_{MAX}}$	$\varepsilon_{c//} = \frac{1}{1+R} \left[ 1 - \exp(- (1+R) NUT_{c//}) \right]$	$\varepsilon_{ccce} = \frac{e^{(- (1+R) NUT_{ccc})} - 1}{Re^{(- (1-R) NUT_{ccc})} - 1}$
$\varepsilon_f = \frac{\Delta T_f}{\Delta T_{MAX}}$	$\varepsilon_{f//} = \frac{1}{1+r} \left[ 1 - \exp(- (1+r) NUT_{f//}) \right]$	$\varepsilon_{fcc} = \frac{e^{(- (1-r) NUT_{fcc})} - 1}{re^{(- (1-r) NUT_{fcc})} - 1}$
$NUT_c = \frac{\Delta T_c}{\Delta T_{ml}}$	$NUT_{c//} = \frac{1}{1+R} \ln \frac{1}{1 - \varepsilon_c (1+R)}$	$NUT_{ccc} = \frac{1}{1-R} \ln \frac{1 - R\varepsilon_c}{1 - \varepsilon_c}$
$NUT_f = \frac{\Delta T_f}{\Delta T_{ml}}$	$NUT_{f//} = \frac{1}{1+r} \ln \frac{1}{1 - \varepsilon_f (1+r)}$	$NUT_{fcc} = \frac{1}{1-r} \ln \frac{1 - r\varepsilon_f}{1 - \varepsilon_f}$
Échangeur à changement de phase $R = 0$ ou $r = 0$	$\varepsilon = 1 - \exp(-NUT)$ $\forall$ le sens de circulation	

**Remarque :** si  $R = 1 = r$   $\varepsilon = \frac{NUT}{1 + NUT}$

Pour les autres configurations d'échangeur, le lecteur est renvoyé vers la littérature spécialisée ; il y trouvera les abaques ou les expressions analytiques pour les divers échangeurs existants.

### c) Variantes de calcul des échangeurs de chaleur

Selon la méthode de calcul adoptée, le calcul global d'un échangeur de chaleur fait intervenir les deux équations calorimétriques :

$$\dot{q} = \dot{C}_C (T_{Ce} - T_{Cs})$$

$$\dot{q} = \dot{C}_F (T_{Fs} - T_{Fe})$$

et l'équation d'interface :

$$\dot{q} = F.A \Delta T \ln \text{ (méthode DTLM)}$$

ou

$$\dot{q} = \varepsilon \dot{C}_{\min} (T_{Ce} - T_{Fe}) \text{ (méthode NUT)}$$

On dispose donc de trois équations (trois degrés de liberté), dans un problème qui fait apparaître neuf données pour la méthode DTLM (8 pour la méthode NUT) : 6 (5 données) doivent donc être des paramètres du problème pour qu'une solution existe.



De nombreuses variantes sont donc possibles. On ne considère ci-après qu'une modélisation de la fonction thermique de l'échangeur à laquelle peuvent se rajouter des contraintes diverses (résistance thermomécanique, contraintes d'encombrement géométrique, coût) et aussi les conditions d'écoulement des fluides qui se traduisent par une dissipation mécanique.

On distinguera ci-après deux grandes catégories de calcul d'échangeur : recherche de conditions de fonctionnement pour un échangeur donné, dimensionnement d'un échangeur de chaleur répondant à un usage spécifié (conditions de fonctionnement imposées).

### ➤ Recherche de conditions de fonctionnement d'un échangeur

#### *Cas standard cas le plus simple*

La géométrie de l'échangeur est connue (A paramètre).

Les débits de fluide, ainsi que leurs propriétés thermophysiques  $\left(\dot{m}_i, C_{pi}\right)$ , donc les débits calorifiques  $\dot{C}_i$ .

Enfin, les températures d'entrée des fluides sont aussi des paramètres connus.

Les trois variables du problème sont donc  $\dot{q}, T_{Cs}, T_{Fs}$  qui satisfont aux trois équations précitées. La procédure de résolution de la simulation correspondante est rapportée pour les deux méthodes de calcul, dans le tableau 13.7.

**TABLEAU 13.7** PROCÉDURE DE SIMULATION DU FONCTIONNEMENT D'UN ÉCHANGEUR DE CHALEUR (RÉGIME DYNAMIQUE STATIONNAIRE)

Méthode de DTLM	Méthode NUT
Données : $A, \dot{C}_c, \dot{C}_f, T_{ce}, T_{fe}$	Données : $A, \dot{C}_c, \dot{C}_f, T_{ce}, T_{fe}$
Variables : $\dot{q}, T_{Fs}, T_{Cs}$	Variables : $\dot{q}, T_{Fs}, T_{Cs}$
Procédures de simulation : 1 Évaluation de k 2 Évaluation des températures de sortie à partir de l'approximation $\Delta T_{ma}$ 3 Itération sur les températures avec $\Delta T_{ml}$ 4 Évaluation de F 5 Calcul de $\dot{q} = FkA\Delta T_{ml}$ 6 Critère de convergence	Procédure de simulation : 1 Évaluation de k 2 Évaluation de $R \left( \dot{C}_{\min} \right)$ 3 Évaluation de $NUT = \frac{kA}{\dot{C}_{\min}}$ 4 Évaluation de $\varepsilon$ 5 Calcul de $\dot{q}$ $\dot{q} = \varepsilon \dot{C}_{\min} (T_{ce} - T_{fe})$ 6 Calculs de $T_{Cs}, T_{Fs}$

Il apparaît clairement sur le tableau 13.7 la différence essentielle entre la méthode DTLM, conduisant à une simulation simultanée, alors que la méthode NUT se résume dans ce cas à une simulation séquentielle : elle sera alors préférée.

D'autres alternatives de fonctionnement existent ; elles sont laissées à la sagacité du lecteur à titre d'exercice.

#### ► Dimensionnement d'un échangeur de chaleur

Le problème est alors un problème de conception.

Plusieurs cas de figure se présentent :

- dimensionnement à température  $T_{Fs}$  (chauffage), ou  $T_{Cs}$  (refroidissement) imposée ;
- dimensionnement à flux de chaleur imposé  $\dot{q}$ .

Dans ces deux cas, les paramètres restent les mêmes que dans le paragraphe précédent ; seules les variables  $T_{Cs}$  (ou  $T_{Fs}$ ) sont échangées avec les paramètres intégrés FkA (méthode DTLM) ou  $\varepsilon$  (méthode NUT). Le dimensionnement de l'échangeur est donc globalisé ; il comporte d'assez nombreux degrés de liberté et des contraintes permettant de nombreuses réponses ; d'où l'intérêt des études de sensibilité paramétrique successives et les optimisations qui s'ensuivent (voir exemples dans la suite de l'ouvrage).

- dimensionnement à variables intensives et extensive imposées.

Parmi l'ensemble des nombreuses situations possibles, on retiendra enfin le cas où  $T_{Cs}$ ,  $T_{Fs}$ ,  $\dot{q}$  sont imposés.

$T_{Ce}$ ,  $T_{Fe}$  restant paramètres, on voit alors que les variables du problème sont  $\dot{C}_C$ ,  $\dot{C}_F$ , FkA ou  $\varepsilon$  soit les caractéristiques géométrique et d'écoulements à fluides imposés.

On voit alors apparaître la dépendance entre les caractéristiques des écoulements et la géométrie à travers  $k$  (et les corrélations de transfert de chaleur) ; le couplage entre les transferts de chaleur et de matière induit ici un compromis conduisant à optimisations.

### 13.3.4 L'essentiel des échangeurs tubulaires et à plaques

Les deux types d'échangeurs les plus utilisés sont les échangeurs à faisceau de tubes et calandre, puis les échangeurs à plaques.

#### a) Échangeurs à faisceau de tubes et calandre

Il existe dans la littérature de nombreuses corrélations tant pour les transferts de chaleur, que pour les pertes de charge ; celles-ci sont spécifiques soit aux écoulements internes aux tubes (voir paragraphe 13.2.2.b) soit aux écoulements externes aux tubes (écoulement en calandre) ; le principal problème rencontré est alors la détermination du diamètre hydraulique.

Le logiciel CETUC (Mercier P.) développé au GRETh permet une étude précise de ce type d'échangeur de chaleur.

Ces échangeurs sont utilisés tant en écoulement monophasique qu'en vaporisation, condensation. Leur surface spécifique volumique d'échange varie dans l'intervalle  $[500 \text{ m}^2/\text{m}^3 - 1000 \text{ m}^2/\text{m}^3]$ .

Le facteur correctif  $F$  de la méthode DTLM est approché par l'approximation

$$F = \frac{\Delta T_{ml} - \Delta T_s}{\Delta T_e - \Delta T_s}.$$

### b) Échangeurs à plaques

Ces échangeurs nécessitent des corrélations spécifiques sur la base de l'étude de la plaque lisse. Si on tient compte des deux faces des plaques canalisant l'écoulement (hormis les plaques d'extrémités) le diamètre hydraulique  $D_H$  du motif élémentaire vaut :

$$D_H = \frac{2le}{l+e} \approx 2e$$

$l$ , largeur de la plaque

$e$ , espace entre deux plaques ( $e \ll l$ ).

#### ► Échangeurs à plaque lisse

Pour les échangeurs à plaques lisses, il vient :

$$Nu = 2,51 \left( \frac{D_H}{L} \cdot Re \cdot Pr \right)^{1/3} \quad \text{si } Re < 2\,000$$

$$Nu = 0,023 Re^{0.8} \cdot Pr^{1/3} \left( 1 + 6 \frac{D_H}{L} \right) \quad \text{si } Re > 10^4$$

$L$ , longueur de la plaque

#### ► Échangeurs à plaques à chevrons

Pour les échangeurs à plaques à chevrons, il vient :

$$Nu = a Re^b \cdot Pr^{1/3} \quad 750 < Re < 15\,000$$

$a$  et  $b$  sont fonctions de l'angle  $\beta$  des chevrons par rapport à la direction d'écoulement d'ensemble (axe de la plaque).

Le tableau 13.8 fournit les valeurs des coefficients  $a$  et  $b$  pour diverses valeurs de  $\beta$ .

**TABEAU 13.8** COEFFICIENTS  $a$  ET  $b$  POUR DES PLAQUES À CHEVRONS

$\beta$	$a$	$b$
30	0,140	0,720
45	0,338	0,658
60	0,455	0,660
75	0,525	0,640

La corrélation proposée admet un domaine unique de  $Re$  pour les plaques dures ( $\beta > 30^\circ$ ). Pour les plaques douces ( $\beta < 30^\circ$ ), on prendra  $\beta = 15^\circ$  avec

$a = 0,411$  ;  $b = 0,480$  si  $750 < Re < 1\,500$ , puis  $a = 0,042$  ;  $b = 0,804$  si  $1\,500 < Re < 15\,000$ .

- Comparaison entre les échangeurs à plaques et les échangeurs à faisceau de tubes et calandre

#### *Limitations thermodynamiques*

Les échangeurs à plaques peuvent se présenter sous forme d'échangeurs à plaques soudées ou brasées ; auquel cas les limitations thermodynamiques sont les mêmes que pour les échangeurs à faisceau de tubes et calandres, de même que les principaux avantages et inconvénients.

#### *Compacité*

Le principal avantage des échangeurs à plaques est la compacité qui vient essentiellement du coefficient global surfacique de transfert ; le tableau 13.9 rend compte de cet avantage.

**TABLEAU 13.9** COMPARAISON DES COEFFICIENTS GLOBAUX SURFACIQUES DES ÉCHANGEURS À PLAQUE ET DES ÉCHANGEURS TUBULAIRES

kW/m <sup>2</sup> K	Échangeur à plaques	Échangeur tubulaire
Eau-Eau	2 000-5 000	1 000-2 000
Organique-Eau	800-1 500	300-600
Organique-Organique	200-500	100-300

On voit sur ce tableau que les valeurs favorables du coefficient  $k$  pour l'échangeur à plaques induisent un moindre encombrement, une moindre surface au sol et un moindre poids à même service.

Dans le cas d'un échangeur à plaques et à joints, les limitations en température et en pression sont au voisinage de  $T_{MAX} = 200\text{ °C}$ ,  $P_{MAX} = 20$  atmosphères ; le démontage possible se traduit par une moindre sensibilité à l'encrassement (cela est primordial en usage agroalimentaire).

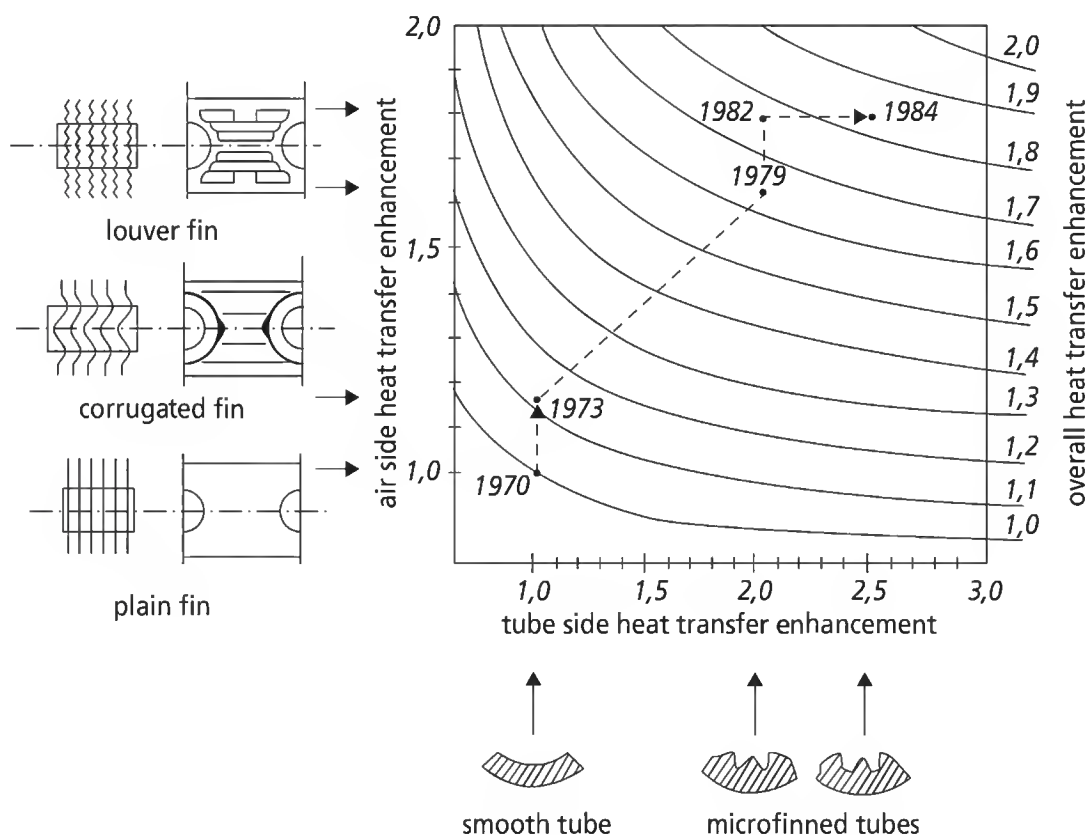
Il existe un logiciel de calcul développé par le GRETH, dédié aux échangeurs à plaques : logiciel CEP AJ.

#### *c) D'autres échangeurs*

Même si les échangeurs à faisceau tubulaire et à plaques sont dominants, le monde des échangeurs ne se limite pas à ces deux géométries phares (cylindrique et plane) ; on a vu aussi l'importance des surfaces ailetées.

### ► Batteries à ailettes

Les batteries à ailettes constituent une application importante dans le domaine (Marvillet C.) ; la figure 13.13 rend compte de l'amélioration dans le temps des transferts tant du côté interne tube que du côté de la surface ailettée.



**Figure 13.13** Amélioration des transferts de surfaces ailettées  
(références tube lisse, ailette plane)

Un article récent propose de nouvelles corrélations pour les échangeurs à tubes ronds et ailettes (Abu Madi M. *et al.*). Des travaux sont réalisés dans le groupe de l'auteur pour les échangeurs à ailettes en présence de condensation externe (encrassement par dépôt d'un film d'eau liquide) (Khalfi M.).

Les tubes par ailleurs bénéficient de surfaces améliorées par microailettes (Biancon Copetti J. *et al.*) ou d'autres techniques dont les corrugations.

### ► Échangeurs compacts

Parmi les préoccupations du moment figure en bonne place l'encombrement des échangeurs, tout particulièrement pour les applications dans les transports, dont l'application en climatisation automobile. Les échangeurs compacts ont pour but de répondre à cette demande.

Une autre question est aussi corrélée à cet impératif : la minimisation de la charge en fluide dans les circuits. Cette problématique revêt une importance cruciale dans les évaporateurs et les condenseurs de machines à cycles inverses, où il s'agit de



minimiser la charge en fluide frigorigène ; on sait par ailleurs que pour le fonctionnement de ces machines, il existe une charge optimale (Marvillet C.).

Actuellement, se développent aussi des études plus fondamentales sur les microcanaux et les microéchangeurs. Il est probable qu'à ces échelles les mécanismes de transferts conduisent à de nouvelles corrélations, mais aussi et surtout à une nouvelle physique vu l'importance amplifiée des phénomènes d'interface fluide-structure. Les applications des microcanaux commencent à voir le jour ; cela ne saurait tarder pour les microéchangeurs.

## 13.4 ÉCHANGEURS DE CHALEUR LATENTE

On a vu dans le paragraphe 13.3 que les échangeurs de chaleur latente se présentaient comme des cas particuliers des échangeurs à chaleur sensible, vu le palier de changement de phase isotherme pour les corps purs, sans perte de pression, en vaporisation comme en condensation.

Cette simplicité n'est qu'apparente et le présent paragraphe a pour but de dégager les particularités associées à ces échangeurs.

### 13.4.1 Vaporisation d'un fluide

#### a) Quelques considérations générales sur la vaporisation

On complète ici les notions introduites pour les changements de phase à l'équilibre d'un corps pur. On voit ainsi apparaître en dehors des domaines stables liquide et vapeur trois zones dans le domaine liquide + vapeur.

La zone intermédiaire qui va de C à E correspond à une zone fondamentalement instable où se produit la transition liquide vapeur (ou vapeur liquide pour la condensation).

En dehors de cette zone, on rencontre de B à C, du liquide métastable dit surchauffé ; ce liquide est hors équilibre.

**Remarque :** au point B, le liquide est dit saturé ; dans la zone liquide, le fluide est dit sous-refroidi.

Dans la zone qui s'étend de E à F, on a de la vapeur métastable dite sous-refroidie ; cette vapeur est hors équilibre.

**Remarque :** au point F, la vapeur est dite saturée sèche (par opposition à la vapeur saturée humide dans le domaine liquide-vapeur) ; dans la zone vapeur au-delà de F, la vapeur est dite surchauffée.

Ce qui vient d'être dit pour un corps pur se renouvelle aussi pour un mélange, hormis qu'il apparaît un glissement de température à pression donnée (ou une évolution de pression à température donnée), fonction du mélange (binaire, ternaire, autre) : de façon générale, les composantes du mélange se vaporisent dans l'ordre du plus volatile vers le moins volatile.

On va ici se centrer sur la transformation diphasique d'un corps pur, malgré l'importance des mélanges de fluides dans le domaine du froid.

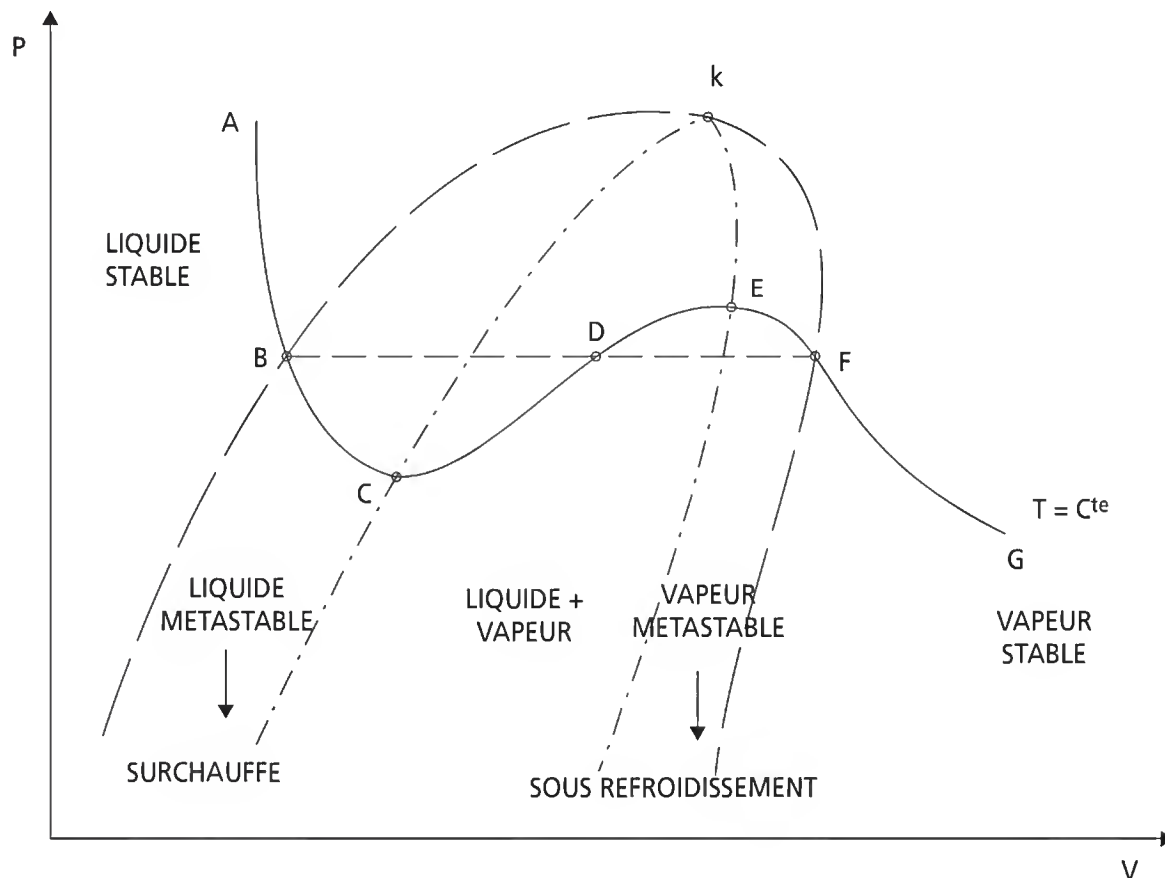


Figure 13.14 Diagramme d'équilibre des phases de Clapeyron (cas du corps pur)

### ► Ébullition - Évaporation

Bien que cette distinction ne soit pas très respectée dans la littérature, il est important de remarquer la différence entre le phénomène d'ébullition, qui est un phénomène d'apparition de bulles dans le volume de contrôle (nucléation homogène) et sur sa frontière (nucléation surfacique), et le phénomène d'évaporation, qui est un phénomène purement surfacique. Exemple : évaporation à la surface d'un lac.

### ► Courbe d'ébullition de Nukiyama

L'étude des phénomènes d'ébullition a été rapportée pour l'ébullition en liquide stagnant (dite ébullition en vase, réservoir ou piscine) par Nukiyama (figure 13.15).

Cette expérience réalisée sur un fil métallique plongé dans un bain liquide montre l'évolution de la densité surfacique de flux échangée en fonction de l'écart de température (en régime dynamique stationnaire)  $\Delta T_e = T_p - T$  ;  $T_p$ , température de paroi ;  $T$ , température d'équilibre du fluide ( $T_{sat}$  à  $P_{sat}$  donnée).

On voit apparaître successivement sur la courbe, lorsque  $\Delta T_e$  augmente (variable de commande) :

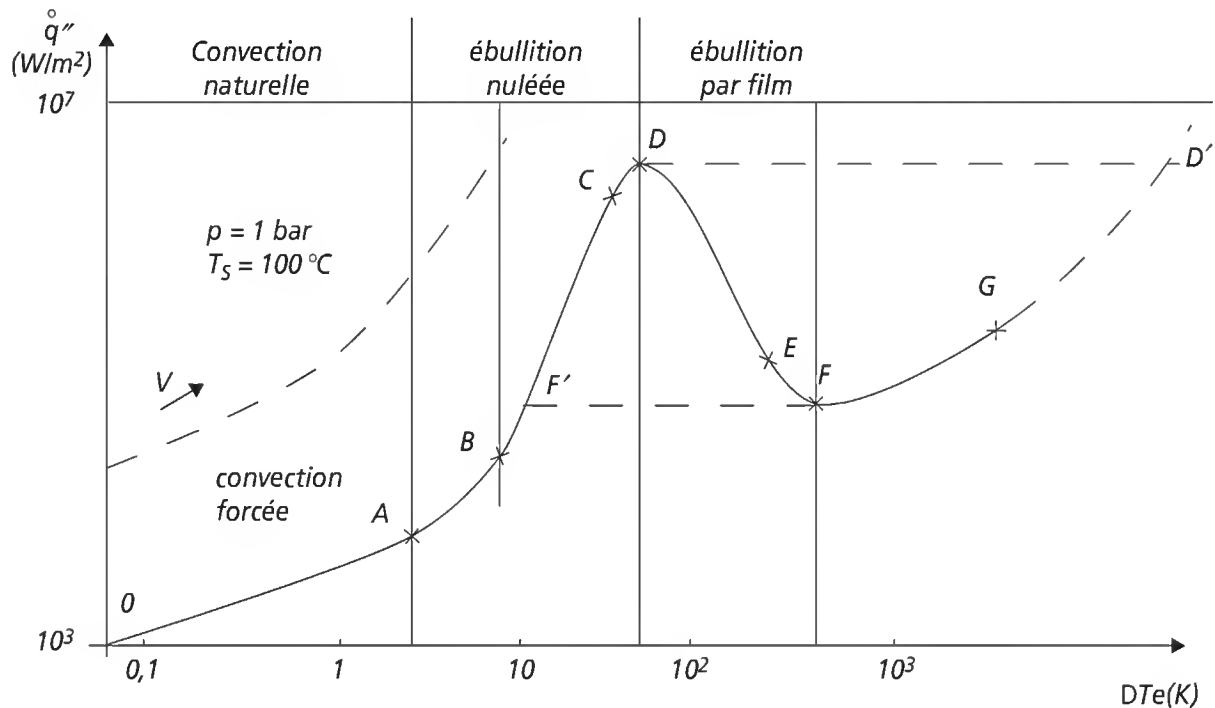


Figure 13.15 Courbe d'ébullition de l'eau selon Nukiyama

- la convection naturelle (sur liquide sous-refroidi ou surchauffé) ;
- l'ébullition nucléée qui se poursuit jusqu'à la crise d'ébullition, qui fait apparaître une densité maximale de flux, appelée flux critique : cette densité surfacique de flux correspond à une instabilité qui fait passer le système du point D au point D'. Vu les  $\Delta T$  associés, cette transition est dangereuse pour le système (destruction de la surface) ;
- l'ébullition de transition correspond à la zone instable (de D à F). Elle correspond aussi à un hystérésis ; en effet, si le système part du point G, la diminution de l'écart de température  $\Delta T_e$  ramène au point F. Puis au minimum local de densité surfacique de flux se produit la transition vers F' ;
- l'ébullition en film (dernière partie de la courbe).

Cette ébullition s'effectue de la surface vers le liquide à travers un film de vapeur, qui génère une gaine isolante entre surface et liquide (augmentation de la résistance de transfert, conduisant à même flux à une augmentation de  $\Delta T_e$ ).

#### ► Courbes d'ébullition convective

À l'ébullition en vase, il y a lieu d'ajouter l'ébullition convective. Cette ébullition correspond à un changement de phase en présence d'écoulement du fluide.

Le mouvement du fluide (convection forcée) amplifie les phénomènes de transfert, comme le montre la courbe en trait discontinu associée à une certaine vitesse d'écoulement du fluide  $V$  ; plus  $V$  augmente plus la courbe de transfert se décale vers le haut.



### ► Mécanismes d'ébullition – notions

L'approche macroscopique des changements de phase se fait à partir de la loi de Laplace. En supposant une symétrie de révolution, l'équilibre mécanique de la bulle de vapeur satisfait à :

$$P_{sat} - P_L = \frac{2\sigma}{r}$$

Il faut donc une surchauffe du liquide pour équilibrer une bulle de rayon  $r$ .

$P_{sat} \approx P_{gaz}$  ;  $P_L$ , pression du liquide  $\gg P_{gaz}$  ;  $\sigma$ , tension superficielle du fluide.

En utilisant l'équation de Clapeyron avec  $v_L \ll v_g = \frac{RT}{P}$  et  $\frac{2\sigma}{\rho_L R} \ll 1$ , il vient :

$$T = \frac{T_{sat}}{1 - \frac{RT_{sat}}{L_{LV}} \frac{2\sigma}{rP_{sat}} \frac{\rho_L}{\rho_L - \rho_V}}$$

Il ressort des considérations précédentes que :

- la pression dans une bulle est supérieure à celle dans le liquide ;
- la pression du liquide sous une surface courbe est inférieure à celle d'un liquide sous une surface plane ;
- la température d'une goutte de liquide est inférieure à la température de vapeur sous une surface plane.

À ces écarts à l'équilibre, peuvent se rajouter des effets locaux ou transitoires tels que l'entraînement de gouttelettes par une vapeur surchauffée ou l'entraînement de bulles par un liquide sous-refroidi.

Aux effets de volume peuvent s'ajouter des effets de surface : ébullition d'un liquide sous-refroidi au contact d'une surface chaude.

La succession des mécanismes d'ébullition d'une bulle en paroi fait apparaître une phase de grossissement, puis détachement, avant remouillage de la paroi ; l'apparition de bulles en volume suppose généralement la présence de germes (impuretés). Pour plus de détails voir (Feidt M.).

### b) Modèles d'écoulement

#### ► Description des écoulements diphasiques

Un écoulement de deux phases fluides non miscibles est la superposition de deux écoulements monophasiques dont la complexité est essentiellement due aux interfaces qui le plus souvent sont en évolution rapide.

La première caractéristique de tels écoulements est donc la configuration d'écoulement. L'observation visuelle amène à la séparation des régimes d'écoulements en plusieurs grandes classes selon le degré de fractionnement de la phase gazeuse dans le liquide.

Dans les écoulements gaz-liquide cocourant en conduite verticale, on distingue trois régimes principaux : écoulement à bulles ( $\alpha$ , taux de vide  $< 30\%$ ), écoulement à bouchons ou à poches, écoulement annulaire.

Pour les écoulements en conduite horizontale, on rencontre aussi les écoulements stratifiés, puis à vagues.

Les configurations d'écoulement peuvent être plus complexes dans les échangeurs (voir figure 13.16). Elles sont parfois difficiles à prévoir.

	Tubes		Échangeurs de chaleur (circuits croisés)	
	Écoulement vertical	Écoulement horizontal	Écoulement vertical	Écoulement horizontal
à bulles				
à bouchon			—	—
stratifié	—		—	
à vagues	—		—	—
à poche	—			—
annulaire				

Figure 13.16

### ► Cartes d'écoulement

Les études menées jusqu'à ce jour ont permis de dresser des cartes d'écoulement (voir figure 13.17) qui bien qu'incomplètes, permettent de prévoir l'écoulement à partir, souvent, de paramètres adimensionnels.

Ainsi, pour la carte présentée :

$$F = \left[ \frac{\rho_g}{\rho_l - \rho_g} \right]^{1/2} \frac{(1-x)G}{(gD \cos \theta)^{1/2} \rho_l} \quad K = \left[ \frac{(1-x)xG^2}{(\rho_l - \rho_g) \rho_g \mu_l \cos \theta} \right]^{1/2}$$

$$T = \left[ \frac{(dp/dz)_l}{(\rho_l - \rho_g)q \cos \theta} \right]^{1/2}$$

avec  $\theta$  inclinaison du tube sur l'horizontale.

Les cartes d'écoulement les plus connues sont pour l'écoulement horizontal : la carte de Baker, l'écoulement vertical : la carte de Hewitt, les échangeurs : la carte de Grant et Murray.

Les variables indépendantes qui apparaissent alors sont liées :

- à la frontière de l'écoulement (section de passage, forme, longueur, rugosité, propriétés thermiques, géométrie amont) ;
- à l'écoulement de chaque phase : valeur initiale et évolution ;
- aux propriétés physiques des phases : tension superficielle et interfaciale, mouillabilité de la paroi, propriétés de nucléation ;
- au flux de chaleur : distribution surfacique de flux.

On notera par ailleurs l'importance relative des critères liés aux écoulements avec transfert (variables liées) :

- coefficient de transfert de chaleur et/ou de masse (moyen ou local), pertes de pression, taux de vide, flux maximum ;
- évolution et stabilité de l'écoulement ;
- évolutions locales de paramètres liés à l'écoulement, la distribution des phases (vitesse, température, distribution des bulles, gouttes, entraînement), angle de contact, contrainte de cisaillement.

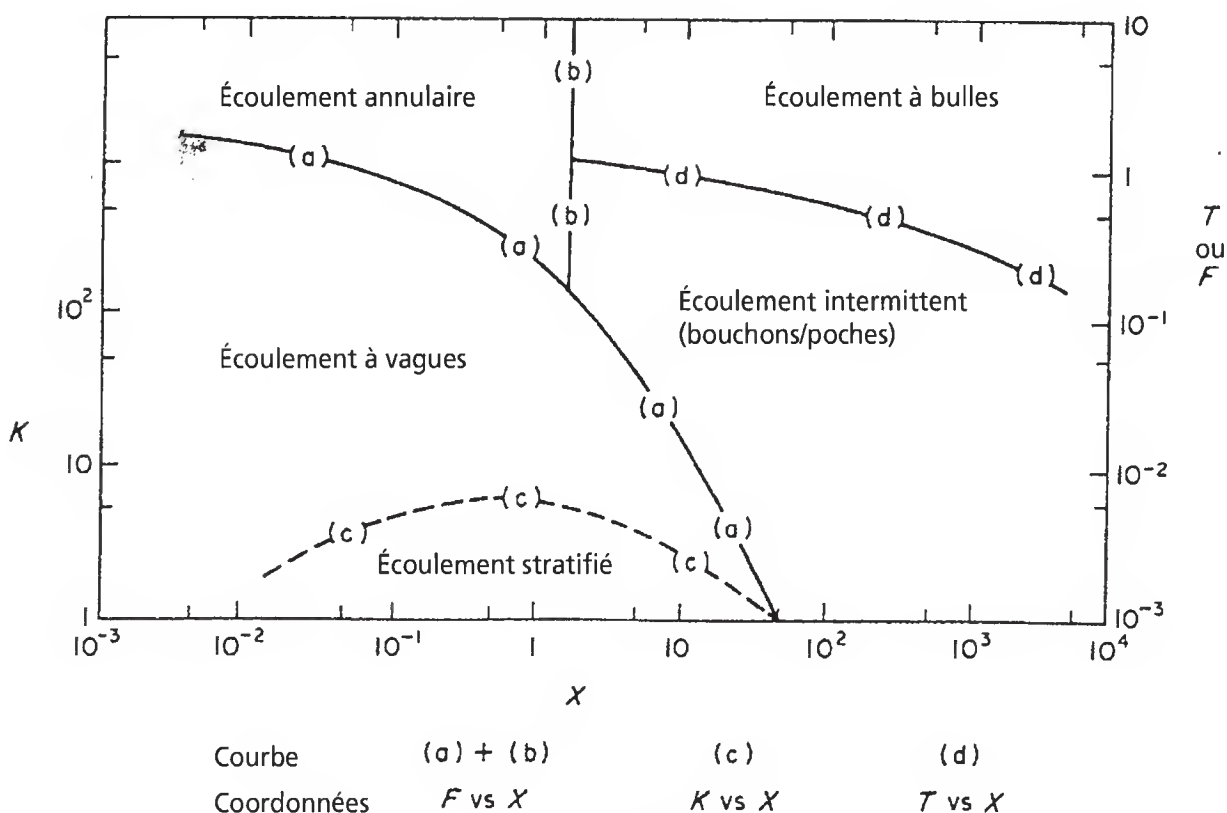


Figure 13.17

### ► Modèles d'écoulements parallèles

#### *Approche rigoureuse*

L'approche rigoureuse de ces modèles a été abordée par J.M. Delhay *et al.* au CENG depuis 1970. Cette approche utilise l'écriture locale et instantanée des lois de conservation, avec conditions d'interface. Ensuite, on effectue généralement une prise de moyenne sur la géométrie et dans le temps.

Lors des diverses manipulations d'équation, il y a lieu de bien noter les hypothèses restrictives introduites (par exemple, effet de la tension superficielle négligeable, tube cylindrique, homogénéité de pression dans une section pour les deux phases... sont des simplifications courantes).

#### *Modèle homogène*

Le modèle le plus simple suppose que les phases se déplacent à la même vitesse. Il vient alors :

$$\frac{1}{\rho_H} = \frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l}$$

#### *Modèle à phase séparée*

Dans ce cas interviennent trois paramètres  $\alpha$ ,  $x$ ,  $K$  qui ne sont pas indépendants :

Le titre massique vapeur  $x_g = x = \dot{m}_g / \dot{m}$  est le titre de référence ( $x_l = 1 - x_g$ ). Il est à noter qu'il diffère généralement du titre thermodynamique.

Le taux de vide ou la fraction de vide  $\alpha = \alpha_g = A_g / A$  ( $\alpha_l = 1 - \alpha_g = A_l / A$ ).

Le modèle à phases séparées distingue les vitesses des phases :

– les vitesses superficielles :

$$u_{gs} = \frac{\dot{V}_g}{A} \quad u_{ls} = \frac{\dot{V}_l}{A}$$

– les vitesses moyennes :

$$u_g = \frac{\dot{V}_g}{A_g} = \frac{u_{gs}}{\alpha} \quad u_l = \frac{\dot{V}_l}{A_l} = \frac{u_{ls}}{1-\alpha}$$

À partir des vitesses moyennes, s'introduit la notion de glissement  $K$  :

$$K = \frac{u_g}{u_l} = \frac{u_{gs}}{u_{ls}} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

D'où la liaison entre les trois paramètres principaux :

$$\alpha = \frac{\frac{x}{\rho_g}}{\frac{x}{\rho_g} + \frac{K(1-x)}{\rho_l}}$$

Puis l'expression correspondante de la masse volumique équivalente :

$$\rho_{TP} = \frac{x + K(1-x)}{\frac{x}{\rho_g} + \frac{(1-x).K}{\rho_l}}$$

Il vient alors l'écriture suivante des équations de conservation (cas d'une conduite) :

– conservation de la matière :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{TP}.A) + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}.A) = 0$$

avec :  $\dot{m} = \rho_l u_l (1-\alpha) + \rho_g u_g \alpha$

– conservation de la quantité de mouvement :

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - g\rho_{TP} \sin \theta - \frac{\tau_p \cdot p}{A} = \frac{\partial \dot{m}}{\partial t} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left[ \frac{(1-x)^2}{\rho_l(1-x)} + \frac{x^2}{\rho_g \alpha} \right] \dot{m}^2 . A \right]$$

**Remarque :** il faut y adjoindre une méthode de détermination de  $\tau_p$ .

– conservation de l'énergie :

$$\frac{d}{dz} [\rho_g u_g h_g \alpha + \rho_l u_l h_l (1-\alpha)] = \frac{4 \dot{q}''}{D}$$

**Remarque :** la forme d'équation précédente suppose une section constante, le régime dynamique stationnaire, l'équilibre thermodynamique, pas de source interne, les énergies cinétiques et potentielles négligeables.

S'il y a entraînement de liquide (plus particulièrement en écoulement annulaire, alors il faut une relation supplémentaire pour déterminer la fraction de liquide entraînée :

$$F_E = \frac{\dot{m}_{le}}{\dot{m}_l}$$

**Corrélations de détermination du glissement  $K$**

La forme la plus générale des corrélations est :

$$K = A \left[ \frac{1-x}{x} \right]^{p-1} \cdot \left[ \frac{\rho_g}{\rho_l} \right]^{q-1} \cdot \left[ \frac{\mu_l}{\mu_g} \right]^r$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + A \left[ \frac{l-x}{x} \right]^p \cdot \left[ \frac{\rho_q}{\rho_l} \right]^q \cdot \left[ \frac{\mu_l}{\mu_q} \right]^r}$$

Le tableau suivant donne les valeurs des coefficients des corrélations selon divers auteurs.

**TABLEAU 13.10** CORRÉLATIONS DE GLISSEMENT

MODÈLES	A	p	q	r
Homogène	1	1	1	0
Zivi	1	1	0,67	0
Lockart-Martinelli	0,28	0,64	0,36	0,07
Thom	1	1	0,89	0,18
Baroczy	1	0,74	0,65	0,13

Il faut noter que si  $p = 1$ ,  $K$  est indépendant de  $x$ , et que le modèle homogène ne convient bien que pour des flux massiques surfaciques élevés ( $> 2\,000 \text{ kg/m}^2\cdot\text{s}$ ).

Les corrélations précédentes ne tiennent pas compte de l'effet du débit sur le taux de vide, ni du type d'écoulement, ni de l'inclinaison du tube, ni de la variation de  $x$ . En conséquence, d'autres propositions sont apparues dont les plus significatives sont les corrélations de Smith, Zuber, Premoli qui ne sont pas explicitées ici.

### c) Nombres adimensionnels

#### ➤ Nombres adimensionnels spécifiques aux écoulements avec changement de phase

Aux nombres adimensionnels classiques introduits précédemment dans le cours du chapitre, il y a lieu de rajouter des nombres adimensionnels spécifiques aux écoulements avec changement de phase.

Les écoulements diphasiques d'un corps pur nécessitent la connaissance de paramètres supplémentaires pour leur caractérisation, en particulier le titre massique en vapeur  $x$ , la fraction de vide  $\alpha$  ; ces deux quantités ne sont pas indépendantes.

Mais il apparaît aussi selon les cas :

- le nombre de Weber :

$$We = \frac{\rho u^2 l}{\sigma} \text{ rapport des forces d'inertie, aux forces de tension superficielle}$$

- le nombre de Jakob :

$$Ja = \frac{c_l \rho_l (T_p - T_l)}{h_{lv} \rho_g}$$

– le nombre d'ébullition :

$$Bo = \frac{\dot{q}'''_o}{h_{lv} \rho_g}$$

– le nombre de convection :

$$Co = \left[ \frac{1-x}{x} \right]^{0.8} \cdot \left[ \frac{\rho_g}{\rho_l} \right]^{0.5}$$

– le nombre de Reynolds de bulle :

$$Re_b = \frac{\rho_g u_b D_b}{\mu_g}$$

– le nombre de flottabilité :

$$Nf = \frac{\rho_l - \rho_g}{\rho_l}$$

– le nombre de sous-refroidissement :

$$N_{sub} = \frac{\Delta h_{sub} (\rho_l - \rho_g)}{h_{lv} \rho_g}$$

– le paramètre de Martinelli :

$$X = \left[ \frac{\rho_g}{\rho_l} \right]^{0.5} \cdot \left[ \frac{\mu_l}{\mu_g} \right] \cdot \left[ \frac{1-x}{x} \right]^{0.9}$$

**Remarque :** d'autres nombres peuvent intervenir (recensement non exhaustif), par exemple, le nombre de changement de phase, le nombre de Marangoni thermique tenant compte de la variation de tension superficielle avec la température  $\sigma(T)$  :

$$Ma = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{l^2}{\mu a} \quad a, \text{ diffusivité thermique}$$



➤ Nombres adimensionnels spécifiques aux interfaces

En écoulement thermique apparaissent :

- le rapport de glissement :

$$S = \frac{u_g}{u_l}$$

- le nombre de glissement en surface :

$$N_D = \frac{u_{g, surface}}{u_{l, surface}}$$

Dans le cas où le transfert se fait à travers l'interface (évaporation), d'autres nombres apparaissent du fait que le transfert thermique devient fortement couplé au transfert de matière :

- le nombre de Schmidt :  $Sc = \frac{\mu}{\rho D}$  (rapport de coefficients de diffusion visqueux et matière).
- le nombre de Stanton (ou Margoulis) :  $St = \frac{h}{\rho C_p u} = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$
- le nombre de Lewis :  $Le = \frac{a}{D} = \frac{Sc}{Pr}$ .

Enfin, dans le cas des mélanges, d'autres paramètres doivent être introduits. On notera à titre d'exemple le nombre de Bond :  $Bo = \frac{\sigma}{g l^2 \Delta \rho}$ , utile dans le cas des fluides superposés avec intervention de la tension superficielle et de la gravité.

**Remarque :** tout au long du paragraphe,  $l$  dimension caractéristique.

➤ Conclusion partielle

L'analyse dimensionnelle nécessite une bonne description mathématique préalable du problème physique avec changement de phase étudié. Elle permet d'envisager des similitudes souvent partielles, nécessitant un classement des paramètres en paramètres prépondérants ou primaires, puis secondaires. Exemple : Loi des états correspondants en thermodynamique :

$$\left[ \frac{P}{P_c} + 3 \frac{v}{v_c} \right] \left[ 3 \frac{v}{v_c} - 1 \right] = 8 \frac{T}{T_c}$$

Les applications qui en sont faites vont des cartes d'écoulement aux corrélations du taux de vide avec le rapport de glissement, en passant par les transferts, les pertes de pression, les densités de flux critique.



## d) Quelques corrélations de transfert en ébullition (vaporisation)

## ► Transfert en ébullition avec écoulement

Il s'agit là d'une étude phénoménologique dont les interprétations doivent s'appuyer sur la description des régimes d'écoulement, ainsi que les études des mécanismes d'ébullition.

Dans cette partie, on tiendra surtout compte de la géométrie du canal en distinguant les transferts dans des tubes à section circulaire horizontaux ou verticaux (les configurations les plus étudiées). Quelques résultats existent pour les transferts entre plaques, un peu plus sur les transferts en écoulement à l'extérieur de faisceaux de tubes. Ils seront évoqués. D'autres configurations ne seront pas abordées : espaces annulaires, singularités.

La figure 13.18 représente les régimes d'écoulement et les mécanismes d'échange de chaleur dans un tube vertical sous forme schématique ;  $x_{th}$  représente sur cette figure le titre thermodynamique en vapeur :

$$x_{th}(z) = x(z) = \frac{h(z) - h_l}{h_{LV}}$$

Les hypothèses principales des études rapportées ci-après sont le régime dynamique stationnaire et un chauffage uniforme de la paroi.

On notera aussi que la transition entre les régions E et F se fait par passage d'un phénomène d'ébullition à un phénomène d'évaporation.

Le phénomène d'évaporation implique un couplage des transferts de chaleur et de masse :

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \left[ \frac{M}{2\pi RT} \right]^{1/2} \cdot \Delta P \\ h_i &= \frac{\dot{m} \cdot h_{lv}}{\Delta T_i} = \left[ \frac{M}{2\pi R} \right]^{1/2} \cdot \frac{h_{lv}^2}{T^{3/2} (v_g - v_l)} \end{aligned}$$

Le coefficient de transfert thermique interfaciale  $h_i$  s'exprime en première approximation par :

$$h_i = \frac{\sigma}{2 - \sigma} \left[ \frac{M}{2\pi R} \right]^{1/2} \frac{h_{lv}^2}{T^{3/2} (v_g - v_l)}$$

Si on tient compte de  $\sigma$ , le coefficient de condensation ou de collage (pour l'eau  $\sigma = 0,04$  ; en fait, il peut être plus grand).

La figure 13.19 est la représentation tridimensionnelle des remarques précédentes, traduite en fonction du titre thermodynamique, du flux de chaleur, et de la température d'équilibre.

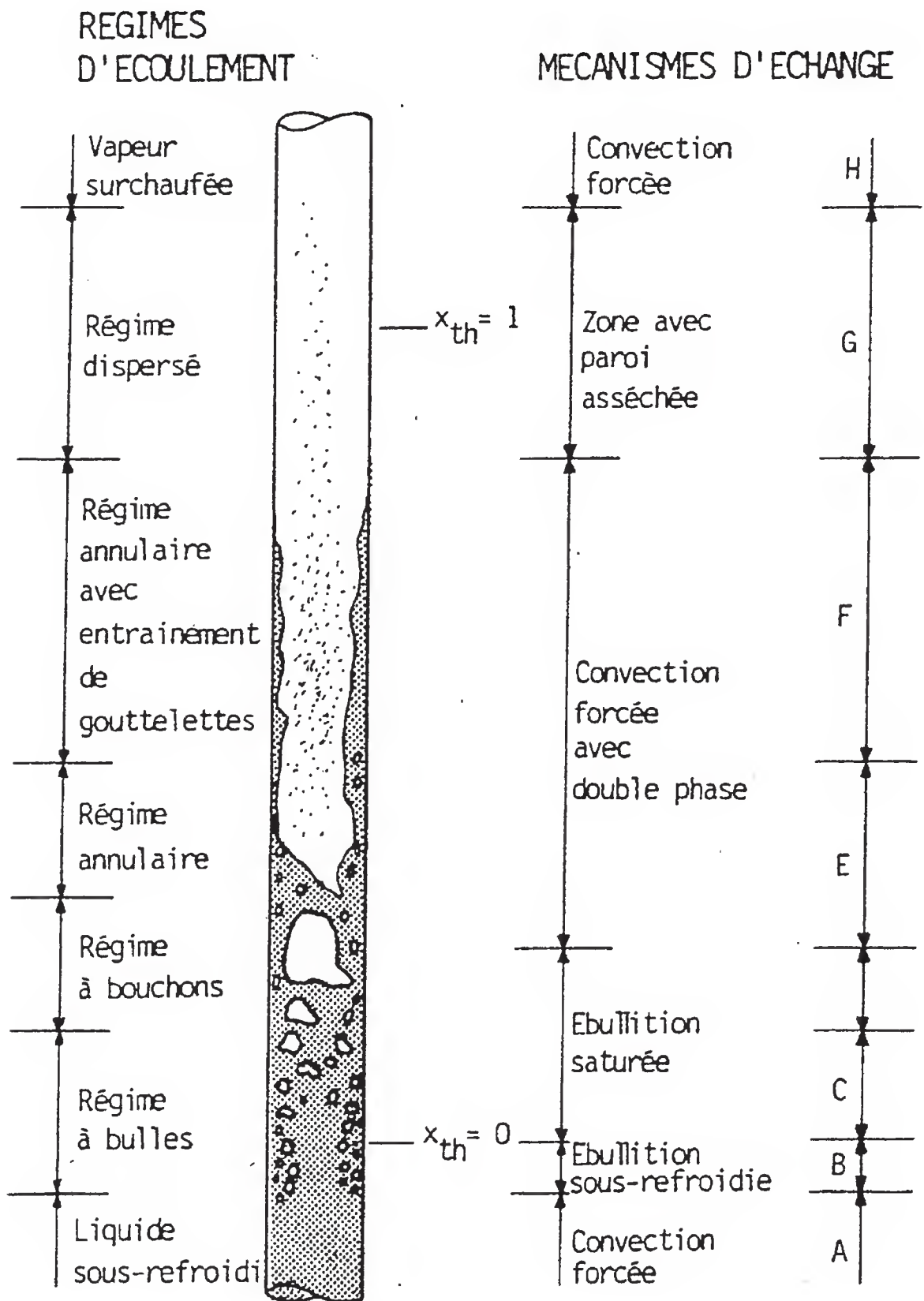


Figure 13.18 Régimes d'écoulement et mécanismes d'échange de chaleur dans un tube vertical.

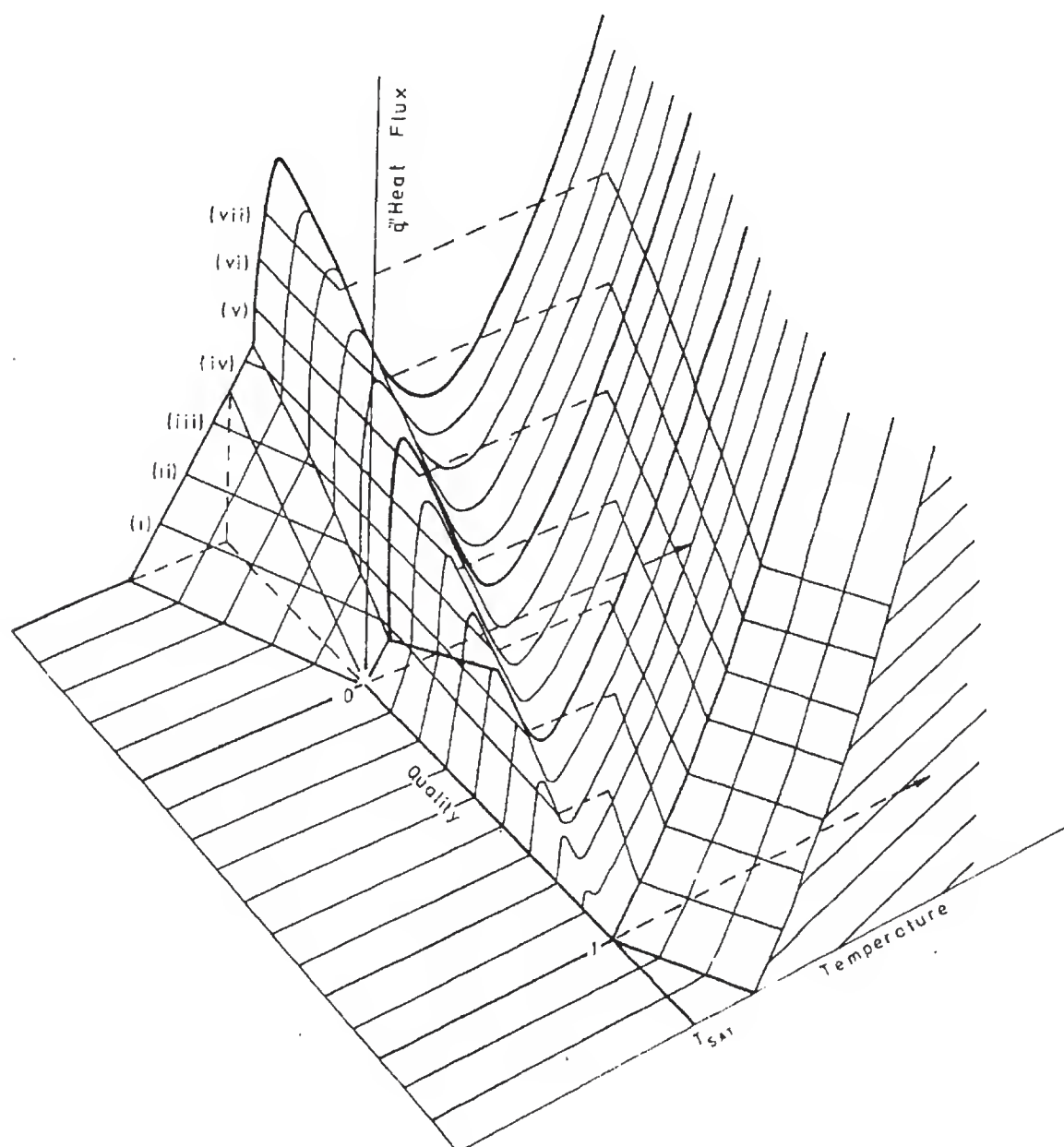


Figure 13.19 Ébullition en convection forcée  $(T, x, q'')$  selon Collier C.J.

### ► Corrélation de Chen

La corrélation de Chen reconnue comme une des meilleures, couvre la région d'ébullition nucléée à saturation ( $h_{NB}$ ) et la région d'ébullition convective ( $h_c$ ), en supposant l'additivité des transferts (méthode de superposition) :

$$h_{TP} = h_{NB} + h_c$$

$h_c$  est fourni pour une équation de type Dittus-Boelter :

$$h_c = 0,023 \cdot \text{Re}_{TP}^{0,8} \cdot \text{Pr}_{TP}^{0,4} \cdot \left[ \frac{\lambda_{TP}}{D} \right]$$

Une amélioration a été apportée en remarquant que ce transfert se fait à travers le film liquide :

$$\lambda_{TP} \rightarrow \lambda_l \quad \text{Pr}_{TP} \approx \text{Pr}_l$$

D'où :

$$F = \left[ \frac{\text{Re}_{TP}}{\text{Re}_l} \right]^{0,8} = \left[ \frac{\text{Re}_{TP}}{G(1-x)D / \mu_l} \right]^{0,8}$$

Le facteur  $F = f(X_{tt})$  est lié à l'hydrodynamique de l'écoulement. Il vient alors :

$$h_c = 0,023 \left[ \frac{G(1-x)D}{\mu_l} \right]^{0,8} \cdot \left[ \frac{\mu_c \rho}{\lambda} \right]^{0,4} \cdot \left[ \frac{\lambda_l}{D} \right] \cdot F$$

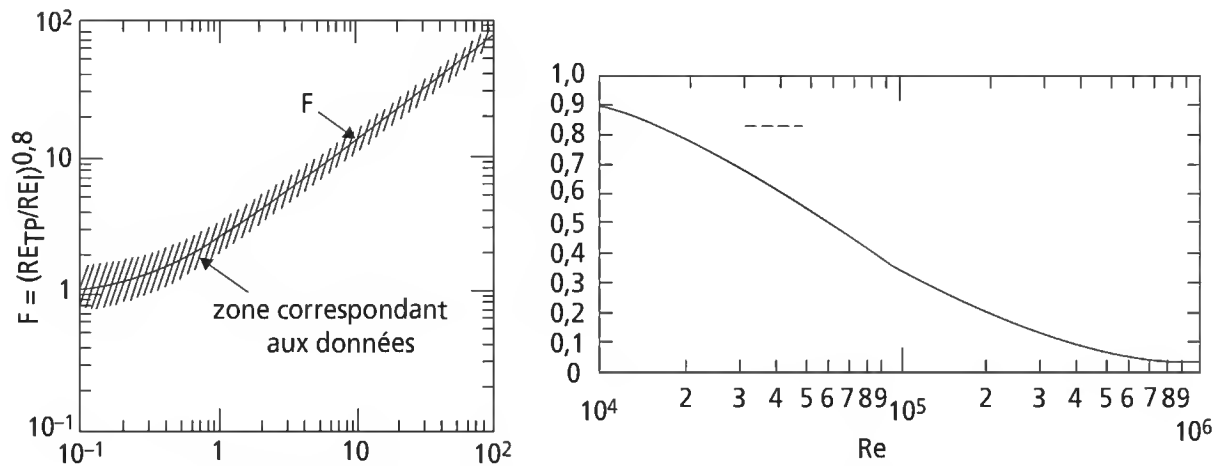


Figure 13.20 Courbes d'évolution du facteur  $F$  et du facteur  $S$  (coefficient de suppression d'ébullition nucléée).

La corrélation de Forster et Zuber est utilisée pour l'évaluation de  $h_{NB}$  en supposant que le transfert est commandé par la croissance des bulles.

Mais la surchauffe de la vapeur n'est pas constante en ébullition en piscine, ni dans la couche limite en ébullition convective, car elle diminue de la paroi vers le fluide. La surchauffe effective  $\Delta T_e < \Delta T_{sat}$ .

En ébullition en piscine, Forster et Zuber supposent  $\Delta T_e \neq \Delta T_{sat}$ . En ébullition convective,  $\Delta T_{e,conv} < \Delta T_{e,pool} < \Delta T_{sat}$  de sorte que :

$$h_{NB} = 0,00122 \left[ \frac{\lambda_l^{0,79} \cdot C_{pl}^{0,45} \cdot \rho_l^{0,49}}{\sigma^{0,5} \cdot \mu_l^{0,29} \cdot h_{lv}^{0,24} \cdot \rho_g^{0,24}} \right] \cdot \Delta T_e^{0,24} \cdot \Delta P_e^{0,75}$$

En posant :

$$S = \left[ \frac{\Delta T_e}{\Delta T_{sat}} \right]^{0,24} \cdot \left[ \frac{\Delta P_e}{\Delta P_{sat}} \right]^{0,75} \approx \frac{\Delta T_e}{\Delta T_{sat}} \quad (\text{d'après Clapeyron}).$$

il vient :

$$h_{NB} = 0,00122 \left[ \frac{\lambda_l^{0,79} \cdot C_{pl}^{0,45} \cdot \rho_l^{0,49}}{\sigma^{0,5} \cdot \mu_l^{0,29} \cdot h_{lv}^{0,24} \cdot \rho_g^{0,24}} \right] \cdot \Delta T_{sat}^{0,24} \cdot \Delta P_{sat}^{0,75} \cdot S$$

$S$ , facteur de suppression =  $Re_l \cdot F^{1,25}$ .

### Remarques :

– Extension possible de la corrélation en ébullition sous refroidie avec  $F = 1$  et  $S = f(Re_l)$

$$\dot{q}'' = h_{NB} (T_p - T_{sat}) + h_c (T_p - T_f(z))$$

– Ajustements de  $F$  et  $S$

$$F = 1 \quad \text{si} \quad \frac{1}{X_{tt}} \leq 0,1$$

$$F = 2,35 \left[ \frac{1}{X_{tt}} + 0,213 \right]^{0,736} \quad \text{si} \quad \frac{1}{X_{tt}} > 0,1$$

$$S = \frac{1}{1 + 2,53 \cdot 10^{-6} Re_{TP}^{1,17}}$$

– Estimation grossière et rapide des coefficients de transfert (en ébullition ou condensation) si  $\rho_l/\rho_g < 50$  :

$$\text{valeur locale } h_{TP} = h_{lo} \sqrt{\frac{\rho_l}{\rho_g}}$$

$$\text{valeur globale } \bar{h}_{TP} \approx \frac{h_{lo}}{2} \left[ 1 + \left[ \frac{\rho_l}{\rho_g} \right]^{1/2} \right]$$

### Sensibilité paramétrique

Les résultats du présent paragraphe ont été affinés durant les dix dernières années. Si les transferts abordés sont assez bien compris en tubes verticaux, d'autres géomé-

tries restent à considérer : tubes horizontaux (corrélation de Shah), plaques, tubes à écoulement externe.

L'influence de la géométrie apparaît sous forme de longueur d'établissement, de singularités, d'espace confiné ; l'état de surface a un rôle fondamental en nucléation, de même que les dépôts et la corrosion. Des surfaces améliorées sont proposées dans la littérature spécialisée. Les divers points ci-dessus ne peuvent pas être ignorés dans les corrélations de transfert.

#### e) *Applications – Conclusions sur la vaporisation*

##### ➤ Les résultats les plus fiables actuellement

En géométrie tubulaire, la corrélation de Chen en transfert thermique, la corrélation de Shah en ébullition nucléée et ébullition convective (fluide pur).

Aucun résultat général en pertes de charges n'est valable pour tous les régimes d'écoulement. Les résultats et modèles connus permettent le calcul des performances d'évaporateur avec une précision voisine de 10 % à 15 %.

Les méthodes employées selon la finesse du résultat recherché vont de la méthode globale aux méthodes locales avec ou sans prise en compte de la carte d'écoulement.

L'observation des phénomènes physiques a permis une compréhension des mécanismes élémentaires mis en jeu.

##### ➤ Aperçu sur les recherches actuelles et à développer

Si le comportement de fluides purs dans des tubes à section circulaire horizontaux et verticaux est bien connu, il n'en est pas de même pour d'autres géométries essentielles d'un point de vue pratique.

Il s'agit là d'ébullition convective entre plaques et espaces confinés, puis à l'extérieur de tubes et de faisceaux de tubes.

La compréhension des mécanismes de transfert conduit par ailleurs à la recherche actuelle de tubes à géométrie améliorée ou à surface traitée spécialement.

Par ailleurs, la remise en cause des fluides courants utilisés conduit à l'étude de fluides composés (mélanges). De nombreuses études restent à faire en ce sens.

Des études plus fondamentales se développent quant à la description des écoulements d'une part, et à des situations hors équilibre d'autre part.

Il nous semble important de développer des études en ébullition avec écoulement forcé dans des géométries complexes : distribution du fluide dans les échangeurs et écoulements dans les dispositifs de détente.

##### ➤ Principales applications

On retiendra que l'ébullition (évaporation) peut être contrôlée soit en flux, soit en température.

Les configurations d'échangeurs faisant intervenir la vaporisation sont surtout :

- les évaporateurs, avec deux configurations : ébullition en tube, dit évaporateur dry-ex, ébullition en calandre, ou évaporateur noyé ;

- les bouilleurs : ces appareils produisent une vapeur saturée. Exemple : bouilleur de chaudière ; bouilleur de machine à absorption (voir chapitres 15 et 17)
- le dessalement d'eau de mer (procédé de plus en plus important pour répondre aux besoins en eau grandissants) ;
- les réacteurs (divers) ;
- les échangeurs à contact direct (tour de distillation).

### 13.4.2 Condensation d'un fluide

#### a) Le phénomène de condensation

La condensation d'une vapeur sur une paroi peut s'effectuer de deux façons : condensation en film (toute la surface condensante est mouillée à conditions égales) ; condensation en goutte.

*A priori*, ce second mode de condensation est plus favorable, vu qu'il n'apparaît pas de conduction dans un film, entravant le transfert de chaleur.

Dans les deux cas de figure, on note que du fait du changement de phase, il y a de fait un couplage entre transfert de matière et transfert de chaleur.

#### b) Modèle de condensation en film

Ce modèle est le modèle de base ; il est dû à Nusselt (1916).

##### ► Hypothèses du modèle

Il utilise pour hypothèses principales :

- une géométrie plane verticale : cette géométrie favorise l'écoulement des condensats. Le problème devient alors un problème bidimensionnel, dans le plan  $(x, y)$  conformément à la figure 13.21 ; l'épaisseur du film de condensat  $\delta$  est supposée nulle en  $x = 0$ .
- condensation d'une vapeur d'un corps pur ;
- écoulement de type laminaire établi dans le film de condensat.

##### ► Profil de vitesse dans le film

L'équilibre mécanique d'un élément de volume  $dV_c = l dx dy$ , sous l'effet des forces de pesanteur, poussée d'Archimède de la vapeur, contraintes tangentielles, conduit selon l'axe des  $x$  à :

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = - \frac{\rho_L - \rho_v}{\mu_L} \cdot g \quad (13.63)$$

En notant que  $\frac{dv_x}{dy} = 0$ , pour  $y = \delta$  (contrainte tangentielle nulle en surface du film), et  $v_x = 0$ , pour  $y = 0$ , il vient pour le profil de vitesse dans le film de condensat :



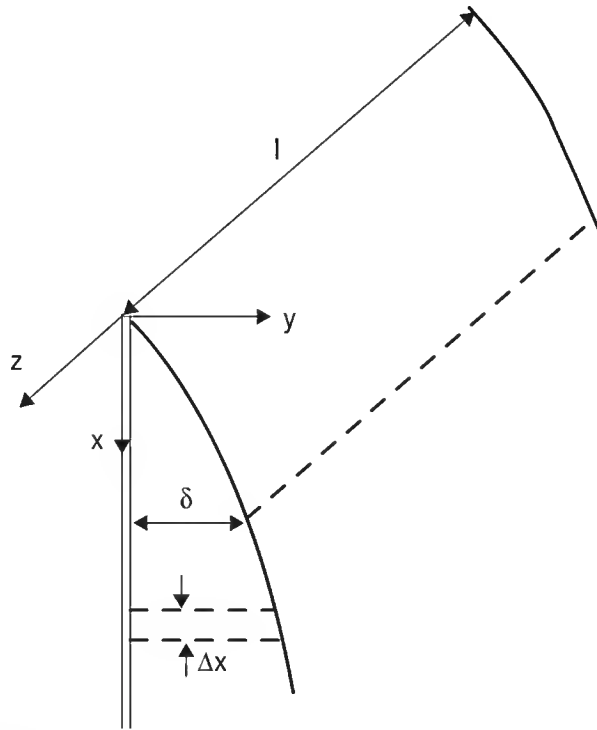


Figure 13.21 Condensation en film-modèle de Nusselt

$$v_x = \frac{(\rho_L - \rho_v) g \delta^2}{\mu} \left[ \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (13.64)$$

► Débit massique par unité de largeur de plaque

$$\frac{dm}{dl} = \rho_L \int_0^\delta v_x \cdot dy = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_v) g \delta^3}{3\mu} \quad (13.65)$$

Cette relation est vraie pour tout  $x > 0$  ; elle rend compte de la conservation des quantités mécaniques. Il en résulte l'expression différentielle de la variation du débit masse avec  $x$  :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dm}{dl} \right) = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_v) g \delta^2}{3\mu} \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (13.66)$$

► Conservation de l'énergie dans le transfert

On rajoute alors deux hypothèses pour développer le modèle : le transfert est purement conductif dans le film (en régime laminaire), la température varie linéairement en  $y$  dans le film liquide entre  $T_p$ , température de la paroi et  $T_{sat}$ , la température de la vapeur.



Il vient alors :

$$\dot{q}_y = \frac{\lambda_L}{\delta} (T_{sat} - T_p) = \rho_L \left[ L_{LV} + \frac{1}{\rho_L} \int_0^\delta \rho_L v_x C_{p_L} (T_{sat} - T_p) dy \right] \frac{d}{dx} \left( \frac{dm}{dl} \right) \quad (13.67)$$

avec  $L_{LV}$ , chaleur latente du changement de phase.

Le premier terme du crochet représente la chaleur de condensation ; le second terme le refroidissement par chaleur sensible du liquide. Par intégration, il vient :

$$\dot{q}_y = \frac{\lambda_L}{\delta} (T_{sat} - T_p) = \rho_L \left[ L_{LV} + \frac{3}{8} C_{p_L} (T_{sat} - T_p) \right] \frac{d}{dx} \left( \frac{dm}{dl} \right) \quad (13.68)$$

Par combinaison de (13.67) et (13.68), il vient après simplification et intégration, l'expression de l'épaisseur du film  $\delta(x)$  :

$$\delta = \left\{ \frac{4 \lambda_L \mu (T_{sat} - T_p) x}{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \left[ L_{LV} + \frac{3}{8} C_{p_L} (T_{sat} - T_p) \right]} \right\}^{1/4} \quad (13.69)$$

#### ► Coefficients de transfert

Les relations (13.67) et (13.69) conduisent alors au coefficient de transfert local sur la plaque  $h(x)$  :

$$h(x) = \frac{\dot{q}_y}{T_{sat} - T_p} = \left\{ \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \lambda_L^3 \left[ L_{LV} + \frac{3}{8} C_{p_L} (T_{sat} - T_p) \right]}{4 \mu (T_{sat} - T_p) x} \right\}^{1/4} \quad (13.70)$$

Le coefficient de transfert moyen sur une surface de hauteur  $H$  s'en déduit :

$$\bar{h} = \frac{1}{H} \int_0^H h(x) dx = 0,943 \left\{ \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \lambda_L^3 \left[ L_{LV} + \frac{3}{8} C_{p_L} (T_{sat} - T_p) \right]}{4 \mu (T_{sat} - T_p)} \right\}^{1/4} \quad (13.71)$$

**Remarque :** pour une surface inclinée d'un angle  $\theta$ , sur l'horizontale, il faut multiplier par  $\sin \theta$  le terme à l'intérieur de l'accolade.

La relation précédente est en bon accord avec l'expérience, si  $Pr > 0,5$  et  $C_{p_L} (T_{sat} - T_p) / L_{LV} < 1,0$ .

### ► Extensions du modèle

Le modèle générique précédent a connu de nombreuses retouches et extensions (retouche par Roshenow ; extension par usage de la théorie de la couche limite ; autres). Le lecteur intéressé pourra trouver des détails dans un article récemment paru dans les Techniques de l'Ingénieur (Panday P.K.).

### c) Quelques corrélations et applications

#### ► Applications

Les échangeurs de type condenseur sont utilisés dans d'assez nombreuses applications. On citera l'usage dans les centrales thermiques (chapitre 17), les industries chimiques (distillation), le domaine du froid, de la climatisation et des pompes à chaleur (chapitre 15), l'agroalimentaire et le séchage, les installations à compression mécanique de vapeur (CMV).

Des exemples illustrant ces applications apparaîtront dans la suite de cette partie. Il y a lieu toutefois de remarquer que ces applications font toutes intervenir des situations (géométriques au moins) très différentes de celles présentées en 13.4.2.b. Exemples : condensation sur des tubes verticaux, condensation sur des tubes horizontaux.

Par ailleurs, la condensation peut être interne ou externe au tube ; l'écoulement en situation verticale peut être ascendant ou descendant ; le fluide peut être un mélange.

Ainsi, il y a lieu de bien caractériser la situation étudiée, pour rechercher ensuite la méthode ou la corrélation adaptée à la résolution du cas étudié.

**Remarque 1 :** la présence d'un gaz incondensable même à faible pression partielle, fait chuter très rapidement le coefficient de transfert à la paroi.

**Remarque 2 :** comme en vaporisation, la condensation en présence d'écoulement, nécessite la prise en compte du type d'écoulement qui modifie fondamentalement les mécanismes de transfert.

La figure 13.22 présente en coupe un condenseur vertical.

#### ► Quelques corrélations

Les corrélations les plus courantes dans la littérature sont relatives aux régimes annulaires et aux corps purs.

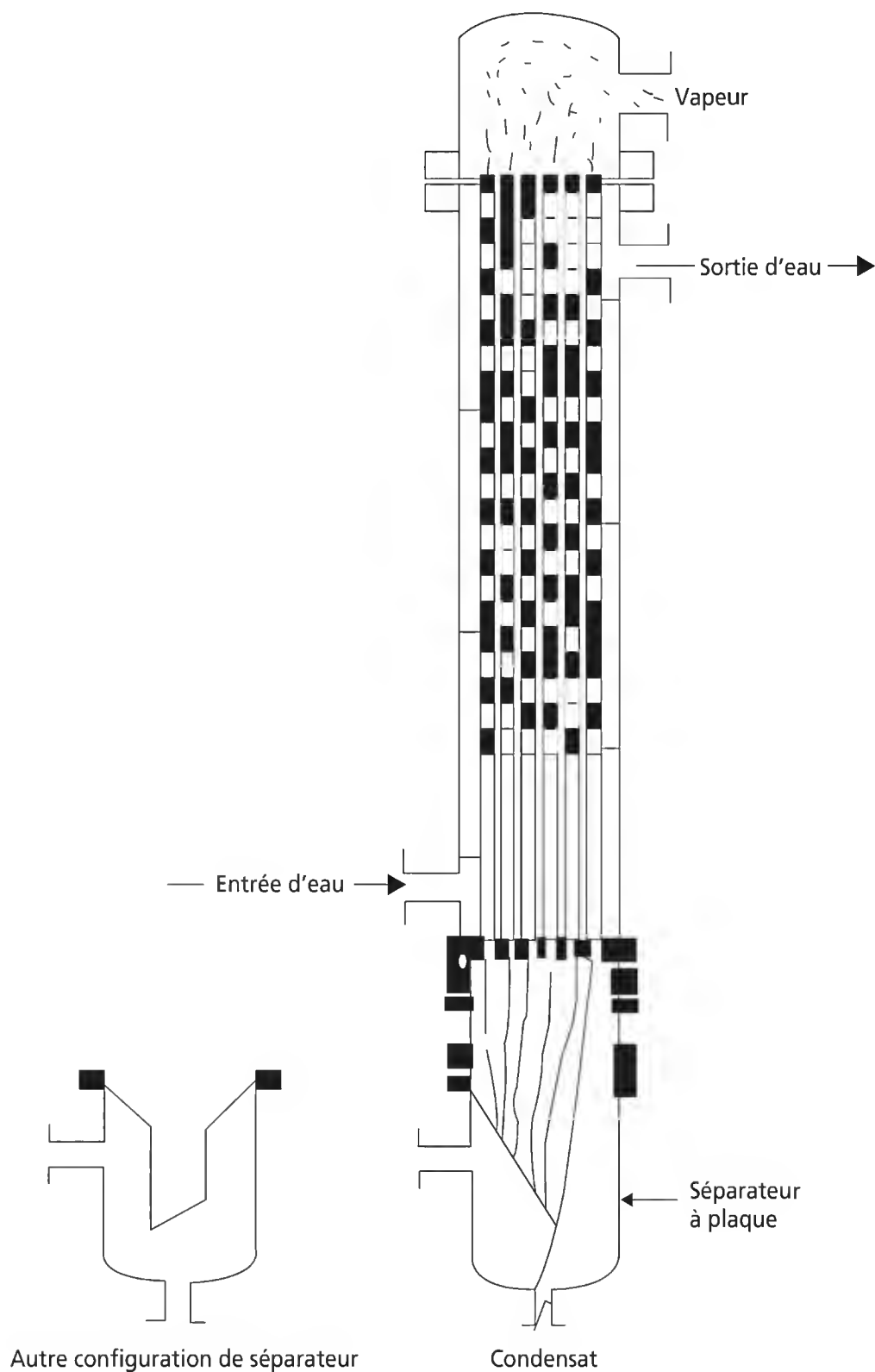
#### *Corrélation de Shah*

On retiendra ici une corrélation de type empirique, mais qui a le mérite d'intégrer tous les régimes d'écoulement ; cette corrélation est due à Shah. Elle s'écrit sous la forme :

$$Nu = F.Nu_{Lo} = F.0,023.Re_{Lo}^{0,8} Pr^{0,4}$$

avec :

$$F = \left\{ (1-x)^{0,8} + \left[ 3,8x^{0,76} (1-x)^{0,04} \right] / \left( \frac{P}{P_{crit}} \right)^{0,38} \right\}$$



**Figure 13.22** Condenseur vertical (écoulement descendant intérieur tube)

$Nu_{Lo}$ , est le nombre de Nusselt calculé pour le liquide s'écoulant seul dans la canalisation (*liquid only*).

#### *Condensation à l'extérieur de tubes horizontaux*

Il faut alors prendre garde au fait qu'il y a interaction des condensats dans une rangée de tubes ; ainsi si  $N$  est le nombre de tubes d'une rangée verticale, on admet que le coefficient de condensation de la rangée  $h_N$  est relié au coefficient de transfert  $h$  pour un tube seul par :

$$h_N = \frac{1}{N^{1/6}} \cdot h$$

## 13.5 OPTIMISATION D'ÉCHANGEURS DE CHALEUR

### 13.5.1 Le monde des échangeurs de chaleur

Les échangeurs de chaleur ont des applications nombreuses et variées qui font qu'il existe une très grande variété de configurations d'usage.

Celles-ci peuvent se différencier par la nature des matériaux employés (métalliques, verres, plastiques, céramiques, graphite) ; le choix du matériau résulte souvent de contraintes d'usage, mais aussi de considérations économiques. Exemples :

- contraintes thermomécaniques (niveaux de température et pression) ;
- agressivité des produits traités (attaque chimique, corrosion) : l'ammoniaque nécessite des conduits en acier ;
- la nature et les écoulements des fluides de transfert : liquide, gaz, mélanges polyphasiques (gaz-liquide), liquide-particules, gaz-particules) ; écoulements pulvérulents (poudres, grains) ;
- le type d'échangeurs : on citera de façon non exhaustive : les échangeurs à ruissellement, les échangeurs rotatifs, les échangeurs-réacteurs, les aéroréfrigérants, les échangeurs spirales, les échangeurs à baïonnette, les échangeurs à plaques, les échangeurs tubulaires.

Les deux dernières catégories citées sont les plus courantes.

Les échangeurs à tubes présentent eux-mêmes une riche subdivision : échangeurs à serpentins, échangeurs à faisceau immergé, échangeurs à chicanes, échangeurs à tubes ailettes, échangeurs à tubes améliorés.

La grande variété des solutions possibles conduit à l'optimisation de l'échangeur en situation. Il apparaît alors deux problèmes successifs d'optimisation.

L'optimisation statique de l'échangeur dans le système ou le procédé : cette optimisation doit répondre à un dimensionnement optimal de l'échangeur pour un fonctionnement donné (optimisation de conception) ou à un fonctionnement optimisé pour un dimensionnement existant.

Cette alternative à l'optimisation globale peut donner lieu à des variantes intermédiaire (voir ci-après).

**Remarque :** à l'approche globale (systémique) précédente peut correspondre une approche locale ; celle-ci correspond alors à une optimisation des phénomènes de transfert.

L'optimisation dynamique de l'échangeur : l'échangeur de chaleur étant en situation, ces conditions de fonctionnement peuvent varier avec le temps. Il s'agit alors d'optimiser dans le temps la performance de l'échangeur : optimisation du comportement en régime transitoire.

On notera ici une difficulté fondamentale, liée à ce cas de figure : la notion de coefficient de transfert de chaleur a-t-elle un sens physique en situation instationnaire ? La réponse à cette question n'est pas simple et nécessite d'être nuancée (Padet J.). Elle fait l'objet de recherches en cours. Quelques développements seront donnés à la suite.

### 13.5.2 Optimisation statique d'échangeurs de chaleur

#### a) Optimisation au sens du premier principe

Le problème général revêt trois approches pratiques essentielles : on cherche à l'usage d'un échangeur, soit à augmenter sa performance, soit à réduire les coûts qui lui sont associés, soit à réduire son encombrement. On remarquera qu'à ces trois objectifs peuvent correspondre des contraintes diverses. Par ailleurs, la recherche du maximum d'efficacité thermodynamique coïncide généralement avec le minimum de coût de fonctionnement (première approche).

#### ► Quelques critères globaux

Parmi les critères d'évaluation de performance d'un échangeur, on retiendra l'augmentation de  $\dot{q}$  (effet utile), la diminution de  $A$  (coût de fabrication) ; la diminution du coût mécanique (puissance de pompage :  $\Delta P$ , pertes de pression ou coût de fonctionnement).

**TABEAU 13.11** TABLEAU DES CRITÈRES D'ÉVALUATION D'ÉCHANGEURS (SELON A.E. BERGLES)

Critère (numéro)									
	Géométrie	1	2	3	4	5	6	7	8
Contraintes (imposé)	Débit-masse	X	X	X	X				
	Perte de pression	X						X	X
	Puissance pompage		X				X		X
	Flux échangé				X	X	X	X	X
Objectif	Augmentation de $\dot{q}$	X	X	X					
	Réduction de puissance de pompage				X				
	Réduction de taille d'échangeur					X	X	X	X

➤ Quelques contraintes globales

À chacune des fonctions objectifs précédentes sont souvent associées des contraintes. Les exemples les plus classiques sont les suivants :

- minimum de surface de transfert à puissance de pompage et puissance thermique échangée imposée ;
- MAX de conductance de transfert à puissance de pompage et volume d'échangeur imposés ;
- minimum de puissance de pompage à puissance thermique et volume d'échangeurs imposés.

**Remarque 1 :** à l'approche globale précédente peut correspondre une approche locale, tout particulièrement pour les surfaces à caractéristique de transfert augmentée. Souvent, le critère d'amélioration est fourni (pour les alternatives) sous forme d'un ratio ; ainsi, pour les tubes avec des écoulements monophasiques, le tube lisse est la référence naturelle.

**Remarque 2 :** aux optimisations indiquées précédemment il est possible de rajouter d'autres optimisations dites hybrides ; par exemple, en approche locale, on rencontre dans la littérature le critère obtenu en faisant le rapport du coefficient de transfert augmenté relatif à la référence ( $h_a/h_{ref}$ ), divisé par le rapport des pertes de pression unitaire de la configuration augmenté relatif à la référence ( $\Delta p_a/\Delta p_{ref}$ ).

b) *Optimisation au sens du second principe*

L'optimisation au sens du second principe peut être réalisée sur une base purement entropique (analyse entropique) ou une base exergetique, voire un prolongement thermoéconomique (exergoéconomique).

Le propos va être centré ici sur l'aspect entropique, vu son importance fonctionnelle ; il met en évidence l'existence d'un compromis et s'avère plus physique que la proposition faite à la remarque 2 du paragraphe 13.5.2.a. Par ailleurs la démonstration est développée dans le cas monophasique (transfert de chaleur sensible) qui est le moins favorable pour les transferts ; mais la démarche peut être étendue moyennant quelques précautions (hypothèses) au cas diphasique.

➤ Analyse entropique et modèle filaire

On considère l'un des flux (chaud ou froid) dans un échangeur de chaleur ; conformément à la figure 13.23, en régime dynamique stationnaire sur un élément de longueur  $dx$ , il vient selon les premier et second principe de la thermodynamique :

$$\dot{m} dh = \dot{q}'_i dx \quad (13.72)$$

$$\dot{m} ds = \dot{q}'_i \frac{dx}{T + \Delta T} + d\dot{S}_i \quad (13.73)$$

sachant que :

$$dh = Tds + \frac{dP}{\rho} \quad (13.74)$$

La combinaison de (13.72), (13.73) et (13.74) conduit à :

$$\dot{S}_i = \frac{\dot{q}' \cdot \Delta T}{T^2 \left( 1 + \frac{\Delta T}{T} \right)} - \frac{\dot{m}}{\rho T} \cdot \frac{dP}{dx} \quad (13.75)$$

**Remarque :** si  $\Delta T/T \ll 1$  (13.75) peut se simplifier sous la forme :

$$\dot{S}_i \approx \frac{\dot{q}' \cdot \Delta T}{T^2} + \frac{\dot{m}}{\rho T} \left( -\frac{dP}{dx} \right).$$

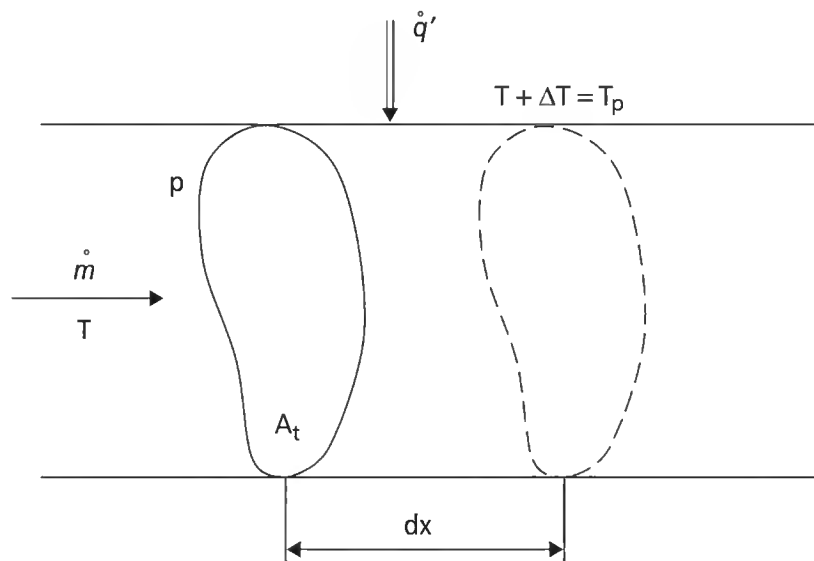


Figure 13.23 Convection forcée en géométrie quelconque : modèle filaire.

La relation (13.75) montre clairement le compromis thermomécanique apparaissant dans les échangeurs de chaleur : une augmentation des transferts de matière suppose une perte de pression augmentée donc une plus grande dissipation mécanique  $\dot{S}_{\Delta P}$  (deuxième terme de (13.75) qui est positif et croît du laminaire vers le turbulent) ; mais il est connu que la turbulence favorise les transferts de chaleur, et par conséquent diminue les irréversibilités thermiques  $\dot{S}_{\Delta T}$ .

De façon générale,  $\dot{S}_i = \dot{S}_{\Delta T} + \dot{S}_{\Delta P}$ .



**Remarque :** généralisation du modèle en local volumique :

$$\dot{S}_i^m = \lambda \left[ \frac{\overline{grad T}}{T} \right]^2 + \frac{\mu \cdot \phi}{T}$$

pour un fluide dont  $\phi$  est la fonction de dissipation.

### ► Incidence du couplage des transferts

La relation (13.75) a mis en évidence le couplage fort entre les transferts de chaleur et de matière. On va ici expliciter ce couplage en introduisant les corrélations de transfert.

Le transfert de chaleur est tel que :

$$\dot{q}' = h \cdot p \cdot \Delta T \quad (13.76)$$

Le transfert de matière satisfait à :

$$-\frac{dP}{dx} = \Lambda \frac{\rho V^2}{2} \cdot \frac{1}{D_H} \quad (13.77)$$

$\Lambda$ , coefficient de pertes de charge régulière est une fonction de l'écoulement ( $Re$ ), de la géométrie et de la nature de la surface, comme on sait,

$h$  est fourni sous forme adimensionnelle par une corrélation :

$$Nu = \frac{h D_H}{\lambda} = Nu(Re, Pr)$$

en convection forcée ( $V$ , vitesse moyenne débitante).

La combinaison de (13.75), (13.76), (13.77) implique deux expressions selon les conditions frontières à la paroi :

Si  $T_p$  imposé :

$$\dot{S}_i = \frac{\lambda (T_p - T)^2}{T T_p} \cdot \frac{p^2}{4 A_t} Nu(Re, Pr) + \frac{\dot{m}^3}{8 \rho^2 T} \cdot \frac{P}{A_i^3} \Lambda(Re) \quad (13.78)$$

avec :  $Re = \frac{4 \dot{m}}{\mu p}$ .

$\dot{m}, \rho, Re$  étant liés, il n'est pas possible de conclure directement à l'existence d'optimum ; il faut préciser les contraintes (géométrie imposée,  $\rho$  ; ou  $Re$  imposé, régime d'écoulement ; ou débit matière imposé).

La connaissance des deux lois de transfert est aussi indispensable.

Si  $\dot{q}'$  imposé,  $\dot{S}_i = \frac{4 \dot{q}'^2 A_t}{\lambda \rho^2 T T_p Nu(Re, Pr)} + \frac{\dot{m}^3}{8 \rho^2 T} \cdot \frac{P}{A_i^3} \Lambda(Re) \quad (13.79)$

On notera que (13.76) permet l'élimination de  $T_p$  (l'approximation  $\Delta T$  fournit directement l'expression approchée conformément à la remarque du paragraphe précédent).



À  $Re$  imposé, l'élimination de  $\dot{m}$ , montre que  $\dot{S}_i$  dépend de deux variables géométriques  $A_i$  et  $p$ , qui peuvent donner lieu à optimisation vu leurs influences opposées dans les deux termes de l'expression.

Le lecteur particularisera aisément au cas du tube circulaire et à d'autres contraintes que le  $Re$ .

**Remarque :** les expressions (13.78) et (13.79) de la génération d'entropie ont été exprimées en fonction des variables géométriques  $A_i$  et  $p$  à travers le diamètre hydraulique  $D_H$ . On rappelle que le diamètre hydraulique se définit

$$\text{de deux façons : } D_H = \frac{4A_i}{p} = \frac{4V}{A_L}.$$

On voit que la deuxième définition fait intervenir le volume offert au fluide ; cette définition sera préférée si on introduit une contrainte d'encombrement en volume ou de charge en fluide.

#### ► Incidence du couplage entre fluides

Le couplage entre les fluides apparaît dans les équations de bilan exergétique par le coefficient d'échange surfacique  $k$ .

On va aussi montrer qu'il existe un couplage à travers la dissymétrie de l'écoulement ; en effet, dans l'hypothèse où les pertes de charge sont négligeables, l'irréversibilité due au transfert thermique demeure seule et vaut pour un liquide incompressible ou un gaz parfait :

$$\dot{S}_i = \dot{C}_F \ln \frac{T_{Fs}}{T_{Fe}} + \dot{C}_c \ln \frac{T_{Cs}}{T_{Ce}}$$

En gardant comme référence le fluide chaud, il vient :

$$\dot{S}_i = \dot{C}_c \ln \left\{ \frac{T_{Fe}}{T_{ce}} \left[ 1 + \frac{T_{Ce} - T_{Fe}}{c T_{Fe}} \right]^c \right\} \quad (13.80)$$

En supposant  $\dot{C}_c$  fluide limitant, avec  $T_{Cs} = T_{Fe}$  ;  $c = \frac{\dot{C}_F}{\dot{C}_c} > 1$ , (13.80) montre que

la dissymétrie des écoulements ( $c \neq 1$ ) est un facteur d'irréversibilité ; mais il y a lieu de compléter par la dimension finie de la surface  $A_L$  (irréversibilité thermique), puis la dimension finie de la section de passage  $A_i$  (irréversibilité mécanique).

#### c) Quelques exemples d'applications

De nombreux exemples d'application existent dans la pratique quotidienne qui s'appuie sur la méthodologie du paragraphe 13.5.2. On se contentera d'en citer deux.

► La caractérisation et l'optimisation de surfaces de transfert améliorées

Cette recherche est appliquée, tant aux transferts en chaleur sensible qu'aux transferts avec changement de phase.

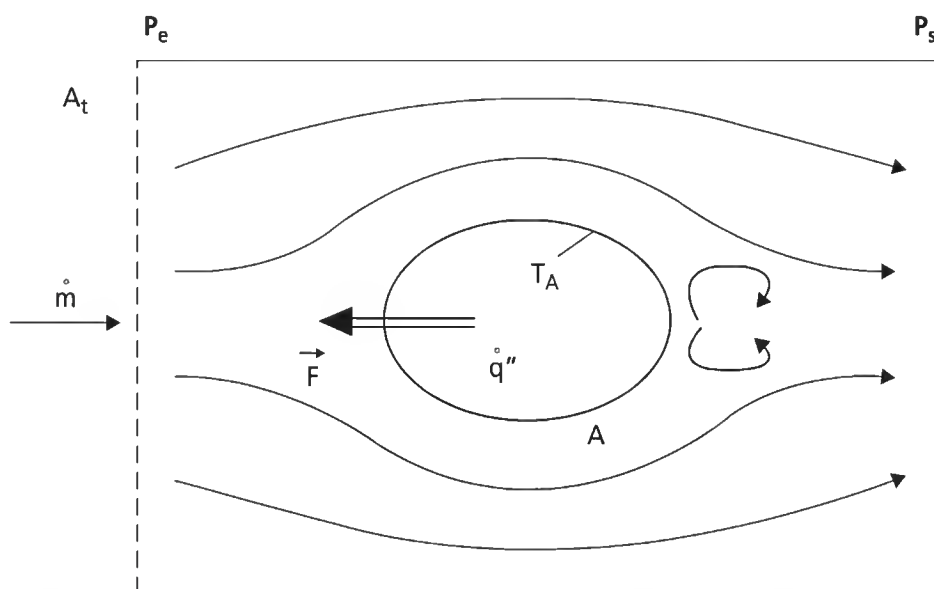
La figure 13.13 montre des exemples de surface améliorée en tube tant du point de vue interne qu'externe, pour des applications dans les évaporateurs, mais aussi dans les condenseurs.

Le même type d'optimisation est recherché pour les surfaces ailetées, de façon à équilibrer les transferts (figure 13.13).

► Écoulement autour d'un obstacle – application aux plaques

Ici, nous sommes dans le cas d'un écoulement externe ; ceux-ci interviennent dans les échangeurs à faisceaux de tubes ou à ailettes, comme il a été vu, d'où leur importance pratique.

La figure (13.24) représente le volume de contrôle que nous supposons grand par rapport au corps immergé dans l'écoulement de sorte que la frontière du volume de contrôle peut être supposée adiabatique et sans frottements mécaniques  $(T_\infty, V_\infty)$ .



**Figure 13.24** Volume de contrôle associé au transfert de chaleur convectif dans l'écoulement autour du corps immergé

*Application au transfert convectif sur une plaque plane*

Cette application est développée dans le cas du transfert à travers la couche limite laminaire, pour une densité surfacique de flux uniformément répartie  $\dot{q}''$  donnée ; le problème se rapporte à un problème 1D par la connaissance de la densité linéique de flux par unité de largeur  $l$ .

La couche limite laminaire développée sur plaque plane satisfait aux deux corrélations suivantes exprimées en unités SI :

$$Nu_x = \frac{h_x \cdot x}{\lambda} = 0,458 Pr^{1/3} \cdot Re_x^{1/2} \quad (13.81)$$

$$Cf_x = \frac{\tau_x}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 0,664 Re_x^{1/2} \quad (13.82)$$

$h_x$ , coefficient de transfert local à l'abscisse  $x$

$\tau_x$ , contrainte de cisaillement locale à l'abscisse  $x$

Pour une plaque à densité surfacique  $\dot{q}''$  uniforme sur A, il vient :

$$\dot{S}_i = \frac{\dot{q}''^2 l}{T_\infty^2} \int_0^L \frac{dx}{h_x} + \frac{1}{2} \frac{\rho V_\infty^3 l}{T_\infty} \int_0^L C_{fx} dx \quad (13.83)$$

La combinaison de (13.81), (13.82), (13.83) et la définition de  $Re_x$  conduisent alors à une entropie  $\dot{S}_i$  fonction de  $L$ , longueur de la plaque.

En exprimant  $\dot{S}_i$  en fonction de  $Re_L = \frac{\rho V_\infty L}{\mu}$ , le minimum de  $\dot{S}_i$  en résulte (Bejan A.) ; le calcul précédent est transposable à d'autres configurations.

**Remarque :** l'expression (13.83) peut être adimensionnée ; on aboutit alors au concept de nombre de génération d'entropie  $N_s$ , qui est à rapprocher du concept d'unité de dégradation d'énergie (NUE) proposé par P. Le Goff (Le Goff P.).

### 13.5.3 Optimisation dynamique des échangeurs de chaleur

#### a) Divers types de transitoires

Le problème considéré ici est un problème récurrent depuis de nombreuses années (Pierson P.).

Les perturbations rencontrées en entrée d'échangeur peuvent être de température, de débit pour l'essentiel.

#### ► Transitoires long ou court

Les transitoires peuvent en conséquence conduire à des réponses de l'échangeur très différentes. On distinguera les transitoires longs des transitoires courts.

Un exemple de transitoire long en échangeur (ou transitoire glissant) est l'encrassement des échangeurs. Un exemple de transitoire court est l'ouverture d'une vanne d'alimentation en fluide par tout ou rien. Ces deux exemples conduisent à des constantes de temps complètement différentes : de l'ordre de la journée au minimum dans le premier cas, de l'ordre de la seconde ou la minute, selon que l'on considère les aspects mécanique ou thermique dans le second cas.

► Transitoires sur les températures ou puissances échangées

La réponse de l'échangeur de chaleur peut être recherchée soit en température  $T$  (variable intensive), soit en quantité de chaleur échangée  $\dot{q}$  (variable extensive).

Les études les plus courantes dans la littérature sont relatives à la variable intensive  $T$ . Le modèle empirique le plus simple fait apparaître une réponse exponentielle conformément aux expressions suivantes :

$$T_s(t) = T_s^o \quad \forall t \leq t_0$$

$$T_s(t) = T_s^\infty + (T_s^0 - T_s^\infty) \exp\left(-\frac{t - t_r}{\tau}\right) \quad \forall t > t_0$$

$T_s^0$ , température de sortie du fluide avant perturbation

$T_s^\infty$ , température de sortie du fluide après perturbation

La perturbation imposée ici est un échelon de température ou de débit  $\tau$ , constante de temps de la réponse en température,  $t_r$ , temps de retard sur la réponse en température.

La même démarche a été appliquée avec succès pour les réponses en puissance thermique  $\dot{q}$  (Henrion M., Feidt M.).

b) Exemple de transitoire court

L'exemple retenu correspond au chauffage ou au refroidissement d'un bain parfaitement agité. Cette opération est une opération industrielle courante qui peut se faire par serpentin immergé dans le bain, ou par double paroi (figure 13.25).

► Chauffage par un fluide isotherme (condensation)

En supposant le bain adiabatique par rapport à l'extérieur, le bilan d'énergie entre  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$MC \frac{dT_F}{dt} = kA(T_c - T_F)$$

avec  $T_{ce} = T_{cs} = T_c \quad \forall t$  et  $T_F(0) = T_F^0$ .

Par intégration, il vient :

$$\frac{T_c - T_F(t)}{T_c - T_F^0} = e^{-\frac{kA}{MC}t}$$

**Remarque :** pour un refroidissement par un fluide isotherme (évaporation), on trouverait de la même façon :

$$\frac{T_c(t) - T_F}{T_c^0 - T_F} = e^{-\frac{kA}{MC}t}$$

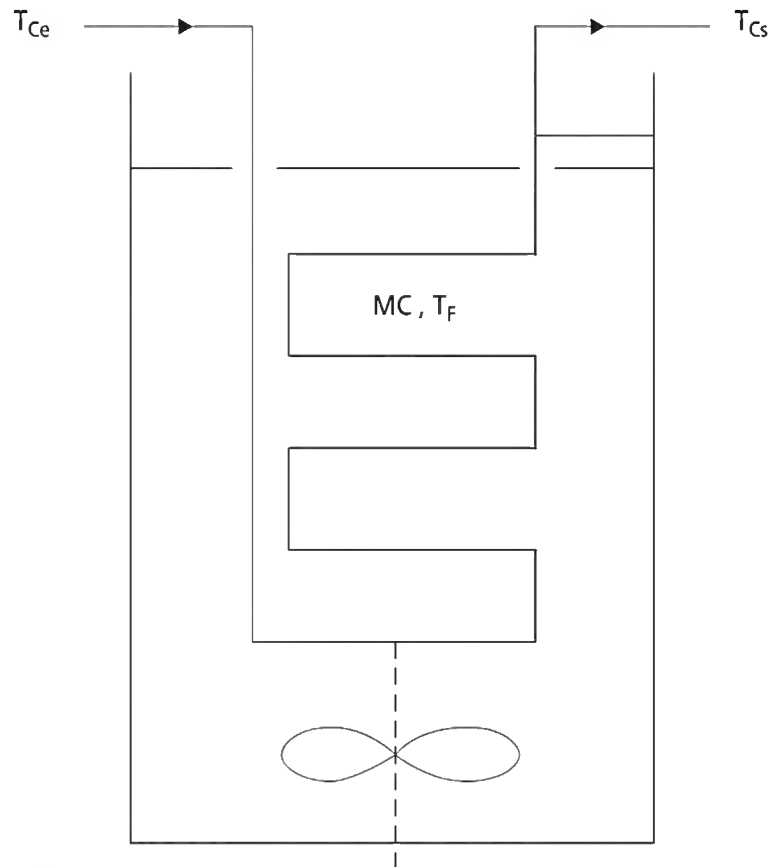


Figure 13.25 Chauffage ou refroidissement d'un bain parfaitement agité

### ► Chauffage anisotherme

Ce chauffage est un chauffage par chaleur sensible, pour lequel à nouveau les propriétés physiques sont supposées constantes ( $C$  ;  $k$ ).

Le bilan d'énergie sur l'intervalle de temps  $dt$  conduit à :

$$MC \frac{dT_F}{dt} = \overset{o}{C}_c [T_{ce} - T_{cs}(t)] = kA \frac{T_{ce} - T_{cs}(t)}{\ln \frac{T_{ce} - T_F}{T_{cs}(t) - T_F}}$$

$\overset{o}{C}_c$ , débit calorifique du fluide chaud

On en déduit :

$$T_{cs}(t) = T_F + (T_{ce} - T_F) e^{-\frac{kA}{\overset{o}{C}_c}} = T_F + \frac{T_{ce} - T_F}{K}$$

D'où :

$$MC \frac{dT_F}{dt} = \overset{o}{C}_c \frac{K-1}{K} [T_{ce} - T_F(t)]$$

Par intégration, il vient :

$$\frac{T_{ce} - T_F(t)}{T_{ce} - T_F^o} = \exp \left[ -\frac{C_c}{MC} \cdot \frac{K-1}{K} \cdot t \right]$$

**Remarque :** pour un refroidissement par un fluide non isotherme, on trouverait de la même façon :

$$\frac{T_c - T_{Fe}}{T_c^o - T_{Fe}} = \exp \left[ -\frac{C_F}{MC} \cdot \frac{K-1}{K} \cdot t \right] \text{ avec } K = C \frac{\frac{kA}{C_c}}{C_F}$$

L'extension de la méthode proposée est immédiate avec un échangeur de chaleur interne. On pourrait aussi reprendre la démarche pour un chauffage ou un refroidissement sans mélangeage (stratification) ; on aurait alors des écoulements de type piston : ceux-ci conduisent à une augmentation discrète de la température du bain à chaque renouvellement (la modélisation correspondante est discrète et se traduit par un raisonnement itératif). Ce dernier cas de figure est utile en pratique, mais ne sera pas développé ici faute de place.

### c) Exemple de transitoire lent

#### ► L'encrassement des échangeurs

Les phénomènes d'encrassement sont généralement des transitoires lents par rapport aux phénomènes thermiques classiques (échelle de temps supérieure) : on les qualifie aussi de transitoires glissants. Deux exemples communs sont l'encrassement des chaudières ; généralement, un nettoyage annuel suffit pour des dépôts par les fumées. Dans le domaine du froid, l'air humide est à l'origine d'un encrassement par dépôt de givre. La fréquence de dégivrage est alors plus courte ; elle peut même être automatisée, d'où la nécessité d'une bonne maîtrise des phénomènes.

#### ► Cinétique de dépôt

Pour l'optimisation envisagée, la cinétique de dépôt joue le rôle d'équation d'état du système, en faisant apparaître la variable temps. On remarquera aussi que le modèle thermodynamique de l'encrassement s'appuie sur quelques hypothèses, dont l'uniformité de l'épaisseur du dépôt (homogénéisation).

La durée optimale de fonctionnement du système ou du procédé  $t_1^*$  est par ailleurs paramétrée en fonction du temps de nettoyage  $t_2$ , qui est variable selon la procédure (mécanique, chimique, physique).

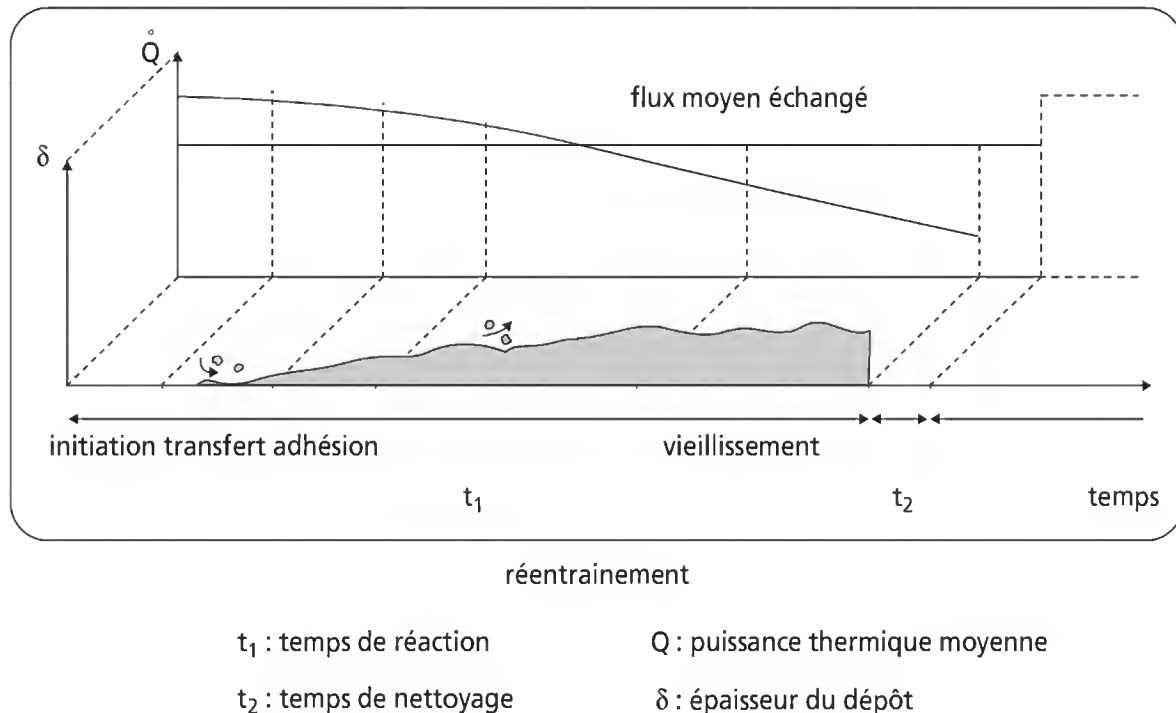
À titre d'exemple, on citera les nettoyages par grattage ou balayage, par attaque chimique ou par ultrason.

Selon la nature du dépôt, les cinétiques diffèrent. Les cas les plus courants sont l'évolution linéaire (elle conduit au bouchage), l'évolution quadratique (encore plus), l'évolution en racine carrée du temps (type diffusionnelle).



Ces trois lois sont de type puissance avec comme paramètre l'exposant.

L'évolution asymptotique est une loi typique de l'encrassement particulaire, avec une compétition entre les mécanismes de dépôt et de ré-entraînement.



**Figure 13.26** Évolution de la puissance thermique échangée avec l'épaisseur du dépôt au cours du temps.

### ► L'optimisation de la séquence de nettoyage

Le problème est formalisé en approche globale sur l'échangeur ; il s'applique quel que soit le type d'échangeur.

La méthode employée est la méthode reliée à l'efficacité de l'échangeur  $\varepsilon(t)$  conformément à :

$$\dot{q}(t) = \varepsilon(t) \dot{C}_{\min} (T_{ce} - T_{Fe})$$

L'efficacité  $\varepsilon(t)$  est une fonction de  $NUT(t)$ , ainsi que de  $R = \dot{C}_{\min} / \dot{C}_{\max}$ .  $NUT(t)$  dépend du temps par l'intermédiaire de la résistance thermique d'encrassement, donc par la cinétique de dépôt, à travers l'épaisseur  $\delta(t)$  de celui-ci.

Il y a lieu de remarquer que selon les contraintes externes imposées,  $\dot{C}_{\min} = \left( \dot{m} C_p \right)_{\min}$  peut aussi dépendre du temps par la variation de section transversale et (ou) de la vitesse débitante ; de même, la surface de transfert de référence  $A_L$  peut varier avec  $t$ .

Conformément à la figure 13.26, durant la période  $(t_1 + t_2)$  la quantité totale de chaleur échangée vaut :

$$q = \int_0^{t_1} \dot{q}(t) dt$$

en supposant l'arrêt de l'installation, durant la séquence de nettoyage.

La fonction objective retenue ici est le maximum de puissance moyenne échangée  $\bar{q}$  (FO) :

$$MAX(\bar{q}) = MAX \frac{1}{t_1 + t_2} \int_0^{t_1} \dot{q}(t) dt$$

Cet optimum au sens du premier principe correspond à :

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t_1} = 0 = \frac{(t_1 + t_2) \frac{\partial}{\partial t_1} \left[ \int_0^{t_1+t_2} \dot{q}(t) dt \right] - \int_0^{t_1+t_2} \dot{q}(t) dt}{(t_1 + t_2)^2}$$

En utilisant le théorème approprié du chapitre 11 paragraphe 3, il vient la condition d'existence de l'optimum :

$$\dot{q}(t_1 + t_2) - \int_0^{t_1+t_2} \dot{q}(t) dt = 0$$

Cette équation transcendante fournit  $t_1^*$ .

On illustre ci-après la méthode, en fournissant quelques résultats pour un fluide chaud limitant encrassant, seule la surface interne d'un tube, en écoulement laminaire cocourant (Schaal L.).

La figure 13.27 montre par contre la sensibilité de  $t_1^*$  à la cinétique d'encrassement.

Cette figure confirme la tendance précédente par rapport à  $\tau_2 = t_2/\tau_e$ , mais elle montre de plus la forte variation de  $\tau_1^* = t_1^*/\tau_e$  avec la cinétique : il est donc essentiel avant toute tentative d'optimisation dynamique d'avoir une bonne connaissance de la cinétique d'encrassement du cas étudié.

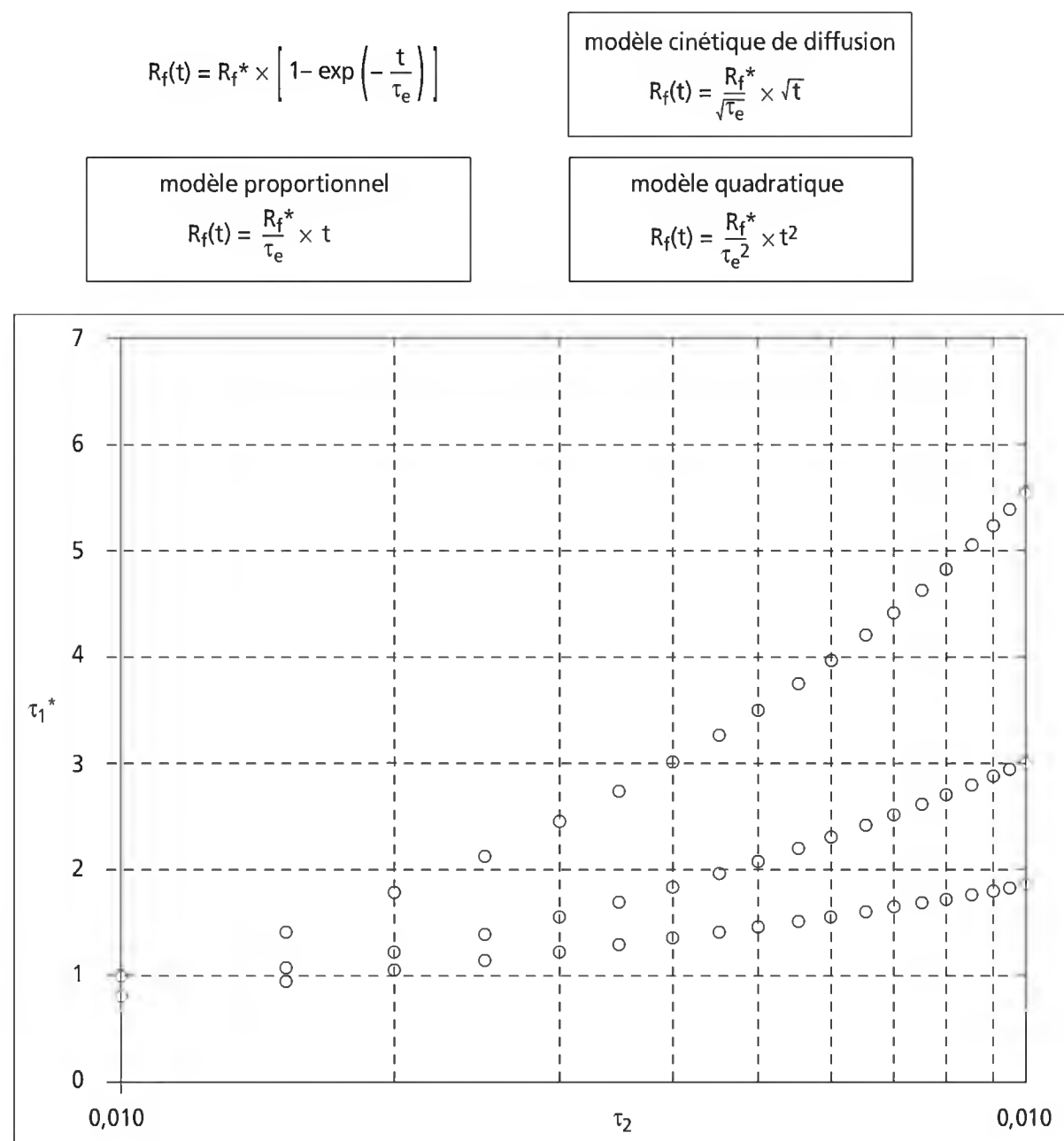
La figure 13.28 représente l'évolution du temps optimal de fonctionnement sous forme réduite par rapport à la constante de temps de la cinétique exponentielle  $\tau_e$ .

On voit sur la figure que plus la procédure de nettoyage est longue, plus le temps optimal augmente. De plus les conditions d'écoulement influent assez peu sur le temps optimal  $t_1^*$ .

#### d) Conclusions et applications principales

L'optimisation dynamique de l'encrassement des échangeurs par une approche thermodynamique est prometteuse, vu les nombreux enjeux (dont financiers) associés. L'exemple développé ici est relatif à un critère énergétique au sens du





**Figure 13.27** Sensibilité du temps optimal  $\tau_1^*$ , à la cinétique d'encrassement

premier principe ; il est possible de réaliser cette optimisation selon d'autres critères (au sens du second principe : résultats disponibles auprès de l'auteur ; selon des critères économiques).

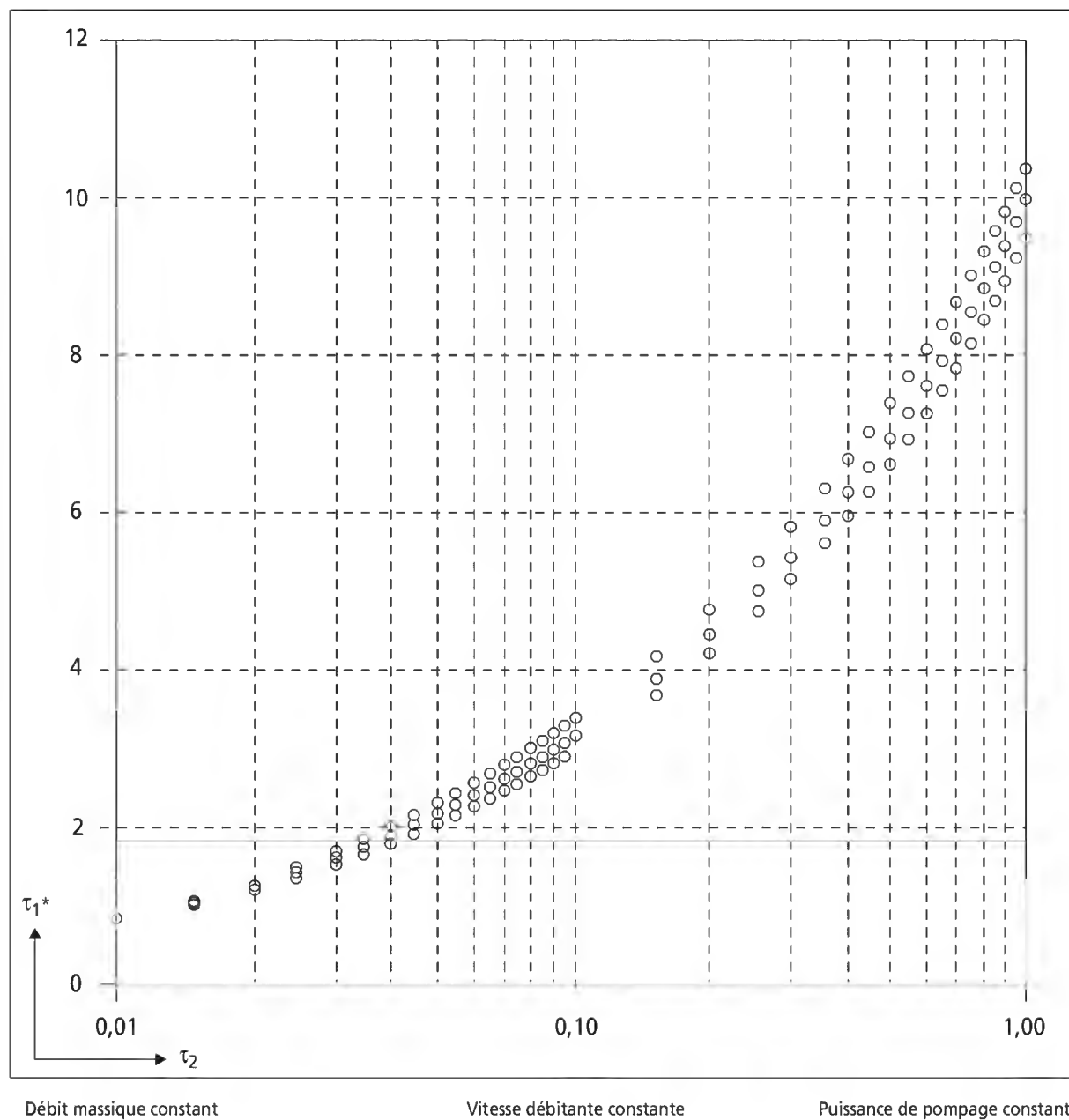
Parmi les applications transitoires en échangeur, on notera les fours (cinétiques de chauffage et refroidissement), les stockages sensible ou latent (lits de pierre), les systèmes solaires foncièrement intermittents, et enfin les échangeurs récupérateurs et régénérateurs (Feidt M.).

Temps réduit optimal

$$\tau_1^* = \frac{t_1^*}{\tau_e}$$

Paramètre

$$\tau_2 = \frac{t_2}{\tau_e}$$



**Figure 13.28** Temps optimal de fonctionnement pour diverses conditions d'écoulement.

## 13.6 ÉTUDES DE CAS SUR LES ÉCHANGEURS DE CHALEUR

### 13.6.1 Optimisation thermoéconomique

Exemple simple d'optimisation thermoéconomique du refroidissement d'un fluide. Soit un fluide chaud, dont la température d'entrée  $T_{ce} = 175^\circ\text{C}$ , qu'on va refroidir à  $T_{cs} = 150^\circ\text{C}$ .

On dispose pour ce faire d'eau à  $T_{fe} = 85^\circ\text{C}$  ( $C_p = 4,18 \text{ J/gK}$ ).

On admettra un coefficient de transfert surfacique interne chaud  $h_c$  égal au coefficient de transfert surfacique externe  $h_f$ :

$$h_c = h_f = 1000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

On en déduit le coefficient de transfert surfacique global, en négligeant la résistance de conduction à travers la paroi.

L'échangeur étant un échangeur à contre-courant pur, dont l'eau (perdue) est un fluide à propriétés physiques constantes ( $v_e$ , coût de l'unité de masse d'eau), il existe un compromis débit massique d'eau-surface de transfert; le coût d'investissement de l'unité de surface  $v_a$  induit un coût global  $c_g$ , dont on cherche l'expression en fonction de paramètres de fonctionnement et de la variable température de sortie d'eau  $T_{fs}$ . On indique un fonctionnement de 6 000 h/an pendant dix ans.

À partir de l'expression  $c_g$ , on recherche la température optimale  $T_{fs}$ . On donne l'application numérique et on conclura.

$$\frac{1}{kg} = \frac{1}{h_e} + \frac{1}{h_f}; \quad kg = 500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

**Remarque :** si on tient compte d'une résistance d'encrassement standard,

$R_e'' = 0,004 \text{ m}^2 \text{ K/W}$ ; la résistance d'encrassement contrôle le transfert vu que

$$R_e'' > \frac{1}{kg} = 0,02 \text{ m}^2 \text{ K/W}.$$

En présence d'encrassement, le coefficient surfacique de transfert devient  $kg = 150 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . Cette valeur est retenue pour la suite des calculs.

$$c_g = \frac{\dot{q}}{c_p (T_{fs} - T_{fe})} \cdot \Delta t \cdot v_e + \frac{\dot{q}}{kg \cdot \Delta T_{\ln}} \cdot v_a$$

$\Delta t$ , durée de vie de l'installation

$\dot{q}$ , puissance thermique de l'échangeur telle que :

$$\dot{q} = \dot{m} c_p (T_{fs} - T_{fe}) = kg \cdot A \cdot \Delta T_{\ln}$$

$$\text{avec } \Delta T_{\ln} = \frac{(T_{ce} - T_{fs}) - \Delta T_s}{\ln \frac{T_{ce} - T_{fs}}{\Delta T_s}}$$

$$\Delta T_s = T_{cs} - T_{fe} = 150 - 85 = 65^\circ\text{C} \quad (\text{paramètre})$$

La température optimale du fluide de refroidissement est fournie analytiquement par :

$$\frac{dC_g}{dT_{Fs}} = 0 = \text{fonction non linéaire de } T_{Fs} \text{ à résoudre.}$$

**Remarque :** l'approximation linéaire du  $\Delta T_{\ln}$  conduit à une solution analytique approchée :

$$T_{Fsopl} = \frac{(T_{ce} + T_{cs})a + (1-a)T_{fe}}{1+a}$$

$$\text{avec } a = \sqrt{\frac{kg \cdot \Delta t \cdot v_E}{C_p \cdot v_A}}$$

### 13.6.2 Optimisation entropique d'un échangeur à courants croisés

On se propose de faire l'étude entropique d'un échangeur récupérateur de chaleur à air. La représentation schématique ci-dessous rend compte du fonctionnement de cet

échangeur, avec  $T$  température,  $p$  pression,  $\dot{V}$  débit volumique).

Les caractéristiques de l'échangeur peuvent être calculées par la méthode  $\varepsilon$  (efficacité), NUT (nombre d'unités de transfert), avec la donnée des températures d'entrée des deux fluides, de leurs débits massiques identiques dans ce cas  $\dot{m}$ , en plus du type d'échangeur et des propriétés physiques du fluide supposées constantes :

$$\varepsilon = \frac{T_{1,i} - T_{1,o}}{T_{1,i} - T_{2,i}} = \frac{T_{2,o} - T_{2,i}}{T_{1,i} - T_{2,i}}$$

$$NUT = \frac{AK}{\dot{C}}$$

$A$ , surface de transfert de l'échangeur

$K$ , coefficient global surfacique de transfert de chaleur

$$\dot{C} = \dot{m}C_p$$

Selon les auteurs de l'article (I.J.H.M.T., vol. 41, n° 2, p 373-381, 1998) :

$$\varepsilon = 1 - 0,477 NUT^{0,4}$$

1. On donne l'expression de l'entropie générée dans l'échangeur.

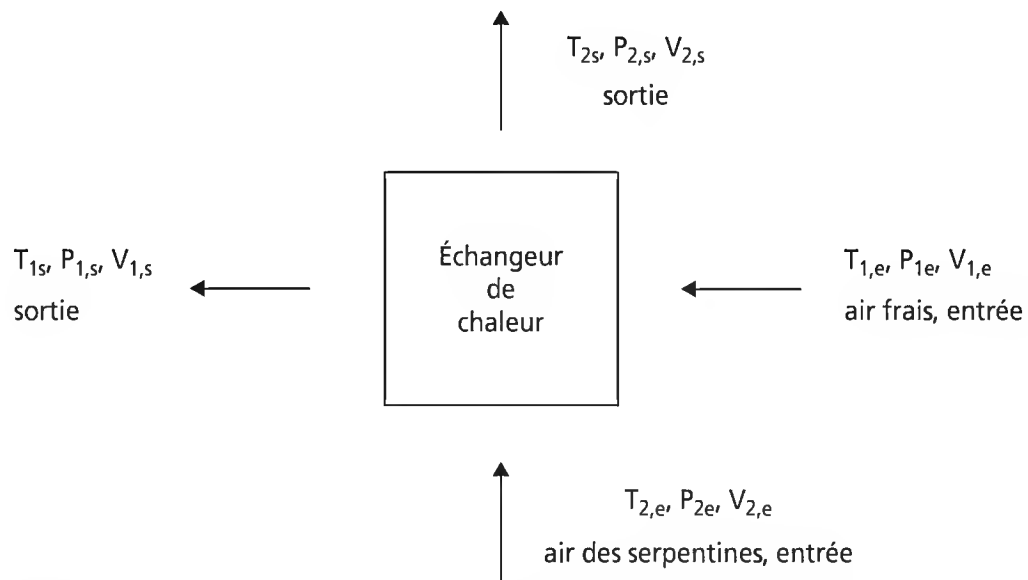


Figure 13.29 Représentation schématique d'un échangeur à courants croisés.

2. En tenant compte des définitions de  $\varepsilon$ ,  $\dot{C}$  et des pertes de charge ( $\Delta P_i = P_{i,i} - P_{i,0}$ ), on donne l'expression réduite du nombre de création d'entropie

$$N_s = \frac{\dot{S}_{gen}}{\dot{C}}.$$

3. On simplifie cette dernière expression sachant que  $(1 - \varepsilon)$  et  $\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_i$  sont très inférieurs à l'unité.

4. Connaissant la définition de NUT, et en négligeant la résistance thermique de conduction à travers la paroi de l'échangeur, on montre que :  $NUT = \frac{Ah}{2C}$ .

$h$ , coefficient de transfert de chaleur convectif entre l'air et la surface de transfert, supposé identique des deux côtés.

On en déduit que :

$$NUT = \frac{\lambda}{2C} \cdot \frac{A}{D} \cdot Nu$$

avec :

$\lambda$ , conductibilité thermique de l'air

$Nu$ , nombre de Nusselt ( $hD/\lambda$ ), fonction de  $Re$  et  $Pr$

$Re$ , nombre de Reynolds ( $\rho VD/\mu$ )

$Pr$ , nombre de Prandtl ( $\mu C_p/\lambda$ )

$V$ , vitesse débitante

$D$ , diamètre hydraulique  $= 4A_t/p$

$A_t$ , section de passage du fluide

$p$ , périmètre mouillé

$\mu$ , viscosité cinématique de l'air

5. En posant  $\Delta T^* = \frac{T_{2,i} - T_{1,i}}{\sqrt{T_{2,i} T_{1,i}}}$ , différence de température adimensionnelle, et

sachant que  $\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_i = f \cdot \frac{4L}{D} \frac{\rho V^2}{P}$ , ( $P = P_1 = P_2$ ), avec  $f$ , coefficient de frottement, fonction de  $Re$ .

On en déduit une nouvelle expression de  $N_s$  en fonction de  $Nu$ ,  $f$ ,  $Re$ .

6. Si le  $Re$  est imposé, donc  $Nu$  et  $f$ , on peut se demander s'il existe une géométrie optimale pour l'échangeur associée à  $N_s$  minimale.

Si un optimum existe, on le caractérise (géométrie optimale et  $\min N_s$  associé).

Référence : Analyse entropique d'un échangeur à courants croisés (I.J.H.M.T., Vol. 41, n° 2, p373-381, 1998).

Selon Bayazitoglu et Ozisik :

$$\varepsilon = 1 - \exp \left\{ NUT^{0,22} \cdot \exp \left[ (-NUT)^{0,78} \right] - 1 \right\}$$

selon les auteurs peut se réécrire sous la forme :

$$\varepsilon = 1 - 0,477 NUT^{-0,4}$$

$$1. \quad \overset{o}{S}_{gen} = \overset{o}{m} Cp \left[ \ln \frac{T_{1,0}}{T_{1,i}} + \ln \frac{T_{2,0}}{T_{2,i}} \right] - \overset{o}{m} R \left[ \ln \frac{P_{1,0}}{P_{1,i}} + \ln \frac{P_{2,0}}{P_{2,i}} \right]$$

2.

$$\begin{aligned} N_s \frac{\overset{o}{S}_{gen}}{\overset{o}{C}} &= \ln \frac{T_{2,i}}{T_{1,i}} \left[ 1 - (1 - \varepsilon) \frac{T_{2,i} - T_{1,i}}{T_{2,i}} \right] + \ln \frac{T_{1,i}}{T_{2,i}} \left[ 1 - (1 - \varepsilon) \frac{T_{2,i} - T_{1,i}}{T_{2,i}} \right] - \\ &\frac{R}{cp} \left\{ \ln \left[ 1 - \left( \frac{\Delta P}{P} \right)_1 \right] + \ln \left[ 1 - \left( \frac{\Delta P}{P} \right)_2 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$3. \quad N_s = (1 - \varepsilon) \cdot \frac{(T_{2,i} - T_{1,i})^2}{T_{1,i} T_{2,i}} + \frac{R}{cp} \left[ \left( \frac{\Delta P}{P} \right)_1 + \left( \frac{\Delta P}{P} \right)_2 \right]$$

$$N_s = 0,477(NUT)^{-0,4} (\Delta T^*)^2 + 2 \frac{R}{cp} \cdot f \cdot \frac{4L}{D} \cdot G^{*2}$$

$$4. \quad NUT = \frac{AK}{\overset{o}{C}} ; \frac{1}{K} = \frac{2}{h} ; \overset{o}{C} = \rho C_p V A_i$$

$$NUT = \frac{Ah}{2\overset{o}{C}} = \frac{\lambda ANu}{2\overset{o}{C}D} = \frac{2\lambda L Nu}{\rho C_p V} \cdot \frac{1}{D^2} = \frac{2L}{D} \cdot \frac{Nu}{Re} \cdot \frac{\lambda}{\mu C_p} = \frac{2L}{D} \cdot \frac{Nu}{Re.Pr}$$

$$5. \quad N_s = 0,477 \left( \frac{2L}{D} \cdot \frac{Nu}{Re.Pr} \right)^{-0,4} \Delta T^{*2} + 2 \frac{R}{C_p} f \frac{4L}{D^3} \frac{\mu^2}{\rho P} R_e^2$$

La géométrie apparaît par  $L$  et  $D$ , ou  $\frac{L}{D}$  et  $D$  (ou  $L$ ).

$$6. \quad \text{À } Re \text{ donné (Nu, } f \text{ constant)} \quad x = \frac{L}{D}$$

$$N_s = Ax^{-0,4} + \frac{B}{D^2} x \quad A \text{ et } B > 0$$

d'où  $N_s$  monotone décroissante de  $D$ .

$$\frac{\partial N_s}{\partial x} = -0,4Ax^{-1,4} + \frac{B}{D^2} = 0 \Rightarrow 0,4Ax^{-1,4} = \frac{B}{D^2} \exists \text{ un optimum } x^* = \left( 0,4 \frac{A}{B} D^2 \right)^{\frac{1}{1,4}}$$

d'où  $\min N_s$ .

## 13.7 CONCLUSION GÉNÉRALE

L'étude et l'optimisation statique ou dynamique des échangeurs de chaleur sont un des challenges majeurs dans le domaine énergétique tant en recherche que dans les nombreuses utilisations de ces composants. De nombreux livres traitent des problèmes fondamentaux associés aux échangeurs (Padet J.).

Le GRETh en France se consacre entièrement à cette thématique en relation avec le monde industriel.

Des prolongements existent aux méthodes proposées, par exemple :

- le couplage en réseau des échangeurs de chaleur (Guiglion C.). Cela sera repris sur une forme légèrement différente dans le chapitre 19, selon ce que les Anglo-saxons appellent la « *pinch technology* »,
- l'approfondissement du couplage des transferts dans les échangeurs.

Ainsi, la miniaturisation des échangeurs en cours (mini canaux, micro canaux) conduit à des interactions plus fortes (conductive-convective par exemple) induisant de nouveaux comportements, voire de nouvelles corrélations physiques.

Le comportement instationnaire fait apparaître une limitation fondamentale, dans la définition et la signification de la notion de coefficient de transfert. Néanmoins, la démarche proposée reste utilisable et suffisante en première approche.

Cette démarche sera complétée dans les chapitres qui suivent à l'occasion d'applications impliquant des échangeurs en tant que composants.

## BIBLIOGRAPHIE

- ABU MADI M. *et al.*, Performance characteristics correlation for round tube and platefinned heat exchangers, *Int. J. Refrig.*, Vol. 21, n° 7, p. 507-517, 1998.
- BEJAN A., A study of entropy generation in fundamental convective heat transfer, *Int. J. Heat Transfer*, Vol. 101, p. 718, 1979.
- BIANCON-COPETTI J. *et al.*, Experiments with microfin tube in single phase, *Int. J. of Refrigeration*, Vol. 27, p. 876-883, 2004.
- BOREL M., *Les phénomènes d'ondes dans les moteurs*, Paris, Éditions Technip, 2000.
- COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides, Tome II, Dynamique des fluides réels, Turbomachines*, Paris, Masson, 1982, 3<sup>e</sup> édition.
- CORVISIER P., LAZARD M., FEIDT M., ALBANO G., Non ideal gas flow simulation : a new formulation of conservation equations, *European J. of Mecha and Environ. Eng.*, Vol. 48, n° 2, p. 67-72, 2003.
- FEIDT M. *et al.*, *Thermodynamical time dependent models of heat regeneration process in STIRLING engine*, ECOS, Tome 2, p 1344-1351, Berlin, Germany.
- FEIDT M., *Transfert de chaleur et de matière avec changement de phase*, École d'Été du GUT, 2-11 juillet 1990, Pont-à-Mousson, France, Tome 1 et 2 (dont ébullition en écoulement forcé, p. 547-611).
- GUIGLION C. *et al.*, Critères thermodynamiques pour la conception de réseaux d'échangeurs de chaleur, *Rev. Gén. De Therm.*, n° 387, p. 161-180, 1994.
- HENRION M., FEIDT M., Comportement en régime transitoire de divers types d'échangeurs de chaleur ; Modélisation et conséquences, *Int. Com. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, p. 731-740, 1991.
- KHALFI M. *et al.*, Étude expérimentale d'une batterie froide en conditions de paroi mouillée, *Int. J. Therm. Sci.*, 40, p. 42-51, 2001.
- Le GOFF P., Énergétique industrielle : analyse thermodynamique et mécanique des économies d'énergie, *Tec & Doc*, Tome 1, chapitre VI, 1979.
- MARVILLET C., Évaluation et minimalisation de la charge dans les évaporateurs et condenseurs de fluides frigorigènes, *Rev. Gén. Froid*, p. 27-32, juin 1995.
- MARVILLET C., Innovations technologiques dans les échangeurs, *Revue Générale du Froid*, n° 1001, p 59-64, mars 2000.
- MARVILLET C., *Les évolutions technologiques des échangeurs de chaleur pour les équipements frigorifiques*, article de synthèse du bulletin 99.3 de l'Institut International du Froid (IIF), p. 2-17, 1999.



- MERCIER P., RATEL G., Dimensionnement des échangeurs à tubes et calandre, *Rev. Gén. Therm.*, n° 313, p 28-34, janvier 1988.
- PADET J., *Échangeurs thermiques*, Masson, Paris, 1994. (en accès libre sur le site [www.sft.asso.fr](http://www.sft.asso.fr))
- PANDAY P.K. Transferts en changements de phase, condensation sur des surfaces lisses, *Techniques de l'Ingénieur*, Volume BE2, article BE 8238, janvier 2006.
- PIERSON P. *et al.*, Simulation du fonctionnement des échangeurs thermiques soumis à des conditions aux limites variables, *Rev. Phys. Appli.*, Vol. 24, p. 93-107, 1989.
- QUEIROS-CONDÉ D. *et al.*, A scale entropy diffusion equation to describe the multiscale features of turbulent flames near a wall, *Physica A*, vol. 387, p. 6712-6724, 2008.
- SACADURA J.F., *Initiation aux transferts techniques*, Tec et Doc, 1980.
- SCHAAL L., FEIDT M., Optimization of the dynamic behavior of a heat exchanger subject to fouling ; comparison of three optimisation models, *Int. J. Applied Thermodynamics*, Vol. 2, n° 2, p. 89-96, 1999.

## Chapitre 14

# Transferts de matière (et machines)

### 14.1 MÉCANIQUE DES FLUIDES ET TRANSFERT DE MATIÈRE

Dans la grande majorité des systèmes et procédés, apparaissent des composants ou des transformations nécessitant des transferts de matière. Cette opération élémentaire se fait généralement par des machines réceptrices (pompes, ventilateurs, compresseurs, par exemple) qui assurent le transfert avant d'autres transformations (ou après) : transfert de chaleur, réaction chimique ou physique, conversion d'énergie.

Il apparaît alors que d'autres machines peuvent être motrices (génératrices) : turbine hydraulique, éolienne.

#### 14.1.1 Fluides incompressibles et compressibles

##### *a) Hydrodynamique*

Parmi les machines réceptrices, on a indiqué les pompes qui véhiculent des liquides et relèvent donc de ce qu'il est convenu d'appeler l'hydrodynamique ; les écoulements correspondants (sauf cas particulier) sont réputés incompressibles : les équations de conservation sont alors simplifiées (fluide isovolume).

##### *b) Gazodynamique*

Il y a lieu de remarquer que l'écoulement des gaz, de par la nature de ceux-ci, diffère de l'écoulement de liquide par le coefficient de compressibilité (soit  $\chi_s$ , soit  $\chi_T$ ) qui pour les gaz est beaucoup plus fort et de ce fait non négligeable : le formalisme correspondant est appelé gazodynamique.

Toutefois, dans les cas limites où la variation de pression dans l'élément considéré (ventilateur) où la transformation reste faible, on pourra considérer l'écoulement de gaz comme isovolume : on rejoint donc le formalisme du paragraphe précédent.

Le domaine dans lequel cette hypothèse est recevable est limité à une variation de 10 % de la pression de part et d'autre de la pression initiale ; c'est le cas dans la majorité des applications aérauliques (conditionnement d'air).

### c) Écoulements diphasiques

#### ➤ Écoulements gaz-liquide

Les écoulements diphasiques sont de traitement plus difficile comme il a été vu à l'occasion des transferts de matière et de chaleur dans les échangeurs de type évaporateur et condenseur.

La phase vapeur occupe très rapidement (pour un titre en vapeur faible) l'essentiel du volume de l'écoulement (taux de vide élevé) ; il en résulte des difficultés de cyclage en machine de fluides diphasiques (érosion d'aubages, fragilisation), voire d'autres difficultés telle que le phénomène de cavitation.

D'où la nécessité de cartes d'écoulement, qui sont l'objet de recherches actuelles, mais aussi de nombreux autres développements en dehors du champ de l'ouvrage.

L'essentiel des écoulements gaz-liquide se fait en conduite de formes variées donnant lieu à résistance à l'écoulement conformément à :

$$\Delta P = R_m \cdot \dot{m} = \frac{1}{K_m} \cdot \dot{m} \quad (14.1)$$

$\Delta P$ , perte de pression dans l'élément, de résistance  $R_m$ , sous le débit massique global  $\dot{m}$ .

**Remarque 1 :**  $K_m$ , conductance de transfert de matière, est l'inverse de la résistance  $R_m$ .

**Remarque 2 :** la relation (14.1) confirme la dissipation d'énergie mécanique associée à l'écoulement (irréversibilité des frottements fluides) ; cette dissipation justifie le présent chapitre qui considère les machines permettant de compenser ces dégradations d'énergie.

Le formalisme introduit par la relation (14.1) s'applique aussi aux écoulements liquide ou gaz ; dans le domaine diphasique, le cas le plus simple consiste à se ramener aux deux cas précédents en faisant l'hypothèse d'un fluide homogène équivalent.

#### ➤ Écoulements liquide-solide

Ceux-ci revêtent aujourd'hui une importance renouvelée, tout particulièrement dans le domaine du froid, avec l'apparition des coulis, écoulement d'un liquide véhiculant des particules de glace, mais aussi pour d'autres écoulements (pâte à papier, fluides chargés entraînant des particules, tant en écoulement gazeux que liquide). Les propriétés de ces écoulements sont étudiées actuellement.

#### d) Extension à d'autres écoulements

Les écoulements diphasiques ne constituent qu'un cas particulier des écoulements polyphasiques, qui ne seront pas abordés ici, sauf cas particulier.

L'apparente simplicité de la relation (14.1) ne doit pas cacher la forte non linéarité des phénomènes d'écoulement, même en fluide homogène et à propriétés physiques constantes (dont fluide newtonien pour les fluides isovolumes) ; on se rappelle que  $K_m$  est une fonction non quelconque de  $\dot{m}$ .

L'étude des fluides non newtoniens a précisément pour but de fournir des corrélations (équations d'état) permettant la simulation et l'optimisation des écoulements, tout en apportant une connaissance des mécanismes physiques sous-jacents.

Il en est de même pour les écoulements pulvérulents (sable, grain).

### 14.1.2 Rappels et données essentielles sur les pertes de pression

#### a) Pertes de charge régulière, singulière

##### ► Pertes de charge régulières

L'analyse dimensionnelle a permis de montrer que de façon générale en écoulement dynamique stationnaire en conduite (modèle 1D) :

$$\frac{dP_t}{dx} = \Lambda \frac{1}{D_H} \rho \frac{V^2}{2} \quad (14.2)$$

$P_t$ , pression totale ( $P + \rho gz$ ), différente de la pression dynamique  $Pd = P_t + \rho \frac{V^2}{2}$ .

$\Lambda$ , coefficient de perte de charge (écoulement monophasique) ou coefficient de Darcy.

**Remarque 1 :** pour une longueur établie  $L$ , il en résulte :

$$\Delta P_t = \Lambda \frac{L \rho V^2}{D \ 2}$$

**Remarque 2 :** la charge (hauteur correspondante de liquide) s'en déduit en divisant par  $\rho g$  :

$$\Delta H = \Lambda \frac{L V^2}{D \ 2g}$$

Cette quantité est très utilisée par les hydrauliciens.

*Relation de  $\Lambda$  avec  $C_f$ , coefficient de frottement*

L'équation d'état du fluide étant supposée telle que :

$$\tau = C_f \cdot \frac{\rho V^2}{2} \quad (14.3)$$

$C_f$ , coefficient de frottement

$\tau$ , contrainte de cisaillement à la paroi, rendant compte du frottement.

L'équilibre mécanique d'un élément de longueur  $dx$  de tube s'écrit (figure 14.1) :

$$dP_t A_t - \tau \cdot p dx = 0 \quad (14.4)$$

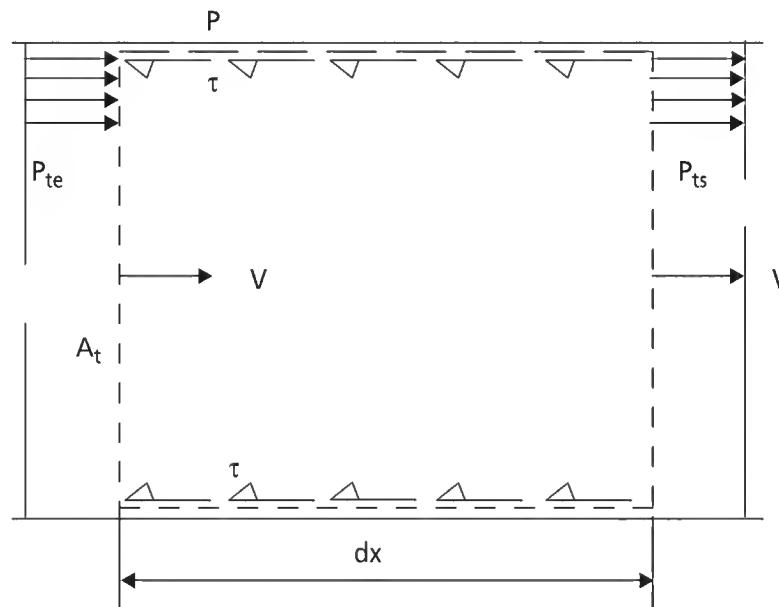


Figure 14.1 Équilibre mécanique d'un élément de tube soumis à écoulement en régime dynamique stationnaire.

Il en résulte :

$$\frac{dP_t}{dx} = C_f \frac{p}{A_t} \frac{\rho V^2}{2} \quad (14.5)$$

La comparaison de (14.2) avec (14.5) connaissant la définition du diamètre hydraulique  $D_H = \frac{4A_t}{p}$  conduit à :

$$\Lambda = 4C_f$$

**Remarque :** certains livres introduisent un facteur de perte de charge  $f$ , tel que  $f = 4C_f$  ; le lecteur prendra garde à ces définitions diverses, sources d'erreurs.

### Écoulement laminaire – écoulement turbulent

On rappelle ici l'existence de deux régimes d'écoulement essentiels : le régime laminaire, pour lequel  $R_e \leq 2\,300$  et le régime turbulent, pour lequel  $R_e > 5\,000$ .

Entre ces deux régimes existe un régime de transition.

Dans le régime d'écoulement laminaire, le coefficient de Darcy  $\Lambda$  est relié au  $R_e$  de l'écoulement conformément à la formule de Hagen-Poiseuille :

$$\Lambda = \frac{64}{R_e} \quad (14.6)$$

Dans le régime turbulent, le coefficient de Darcy est relié non seulement au  $R_e$ , mais aussi à la rugosité relative  $\varepsilon$  de la conduite, conformément à la formule de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,71} \right) + \frac{2,51}{R_e \sqrt{\Lambda}} \quad (14.7)$$

La rugosité relative  $\varepsilon$  est le rapport de la hauteur moyenne des rugosités de surface à  $D_H$ .

La relation (14.7), sous forme implicite, nécessite itération, mais elle présente l'intérêt industriel de rendre compte des écoulements turbulents sous une forme analytique empirique unique, dont l'équivalent est le diagramme de Moody déjà vu.

Pour des compléments, le lecteur est renvoyé vers la référence (Comolet R.).

#### ► Pertes de pression en diphasique

L'évaluation de cette perte peut se faire de deux façons, selon le modèle de répartition des phases liquide et vapeur adopté.

##### *Modèle homogène équivalent*

Le modèle le plus simple suppose que les deux phases ont la même vitesse de déplacement ; il n'y a donc pas de dissipation par le phénomène de glissement aux interfaces (le modèle de Zivi du chapitre 13 considère ce problème de façon simple).

##### *Modèles à phases séparées*

Des modèles beaucoup plus complexes peuvent être mis en œuvre. La référence (Ishii M.) (en anglais) donne un aperçu de ces modèles, qui ont été perfectionnés, en particulier sous l'impulsion de J.-M. Delhay.

Le modèle à phase séparée suppose une différence de vitesse entre les deux phases ; le modèle de base a été introduit par Lockhart et Martinelli (Lockhart R.W.) ; la méthode proposée est de calculer la perte de pression du mélange, au moyen d'un coefficient multiplicateur de la perte de pression en liquide seule due à Martinelli :

$$dP_L = 4C_f \frac{L}{D_H} m^2 \frac{(1-x)}{2\rho_L} \quad (14.8)$$

avec :  $C_f = 0,076 R_{e_L}^{-0,25}$  si  $R_{e_L} > 2\,100$  et  $C_f = 16 R_{e_L}^{-1}$  si  $R_{e_L} < 2\,100$

On pose alors :

$$dP_M = \phi_L^2 . dP_L \quad (14.9)$$

avec  $\phi_L^2 = 1 + \frac{20}{\chi_u} + \frac{1}{\chi_u^2}$ , (glissement de vitesse entre la vapeur et le liquide).

$\chi_u = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{0,90} \left(\frac{\rho_V}{\rho_L}\right)^{0,5} \left(\frac{\mu_L}{\mu_V}\right)^{0,1}$ , facteur de Martinelli (dans le cas d'écoulement turbulent-turbulent pour les deux phases).

**Remarque :** le titre en vapeur du mélange est souvent pris égal à celui correspondant au maximum du coefficient de transfert en tube, soit voisin de 0,75.

### ► Pertes de charges singulières

Les pertes de charge singulières correspondent aux effets d'établissements dans les tubes, effets d'entrée, mais aussi aux effets de sortie ; par ailleurs, les géométries rencontrées dans les applications pratiques ne comportent pas que des tubes droits, mais aussi des géométries très variées, dont les rétrécissements ou les élargissements brusques, les convergents ou les divergents, les tubes courbes dont les coudes, puis des vannes, sans oublier les singularités diverses dans les machines dont les entrefers entre rotor et stator.

Ces situations complexes conduisent difficilement à des résultats de modèles.

#### *Méthode directe*

Aussi, les pertes de charge singulières sont représentées par analogie avec les pertes de charge régulières sous la forme :

$$\Delta P = \zeta \cdot \frac{\rho V^2}{2} \quad (14.9)$$

$\zeta$ , coefficient de perte de charge singulière

Les exemples ci-après illustrent la situation classique de base, relative au chauffage d'un pavillon, le système de chauffage comportant une chaudière, des radiateurs, des tubes, puis des élargissements et rétrécissements brusques.

Exemples :

- chaudière fonte :  $\zeta = 2,5$
- chaudière acier :  $\zeta = 4 - 9$
- radiateur :  $\zeta = 2,5$
- élargissement brusque :  $\zeta = 1$
- rétrécissement brusque :  $\zeta = 0,5$

De nombreuses singularités ont été recensées et sont disponibles dans le livre de synthèse réalisé par Idelcik (Idelcik).

#### *Méthode indirecte*

La méthode indirecte, qui est plus une méthode de métier, consiste à exprimer, pour une installation dont la tubulure donnant lieu à pertes de charges régulières est de



diamètre  $D_H$ , la longueur équivalente de tube de même diamètre pour la singularité étudiée.

### b) L'enjeu énergétique

L'exemple ci-après reste centré sur l'application à l'habitat ; il est bien connu que le système de chauffage le plus courant en France (et sans doute en Europe) est le chauffage à eau chaude.

#### ► Les contraintes du chauffage à eau chaude

On ne considèrera ci-après que le système de chauffage à circulation forcée (et non le thermo-siphon) comportant un circulateur (pompe de circulation) : voir l'exemple ci-dessous.

Ce système est en effet plus performant que le système à thermo-siphon, mais la dépense énergétique est plus élevée et mérite un chiffrage. Pour cela, on considèrera que l'eau circule à une température comprise entre 15 °C et 90 °C (domaine d'usage physique pour lequel les propriétés sont connues).

Le diamètre des tubulures adopté dépend des besoins en chauffage, mais aussi de la vitesse moyenne débitante  $V$  en tube ; celle-ci est sujette à limitations. Dans l'habitat lui-même, on limitera  $V$  au domaine 0,3 m/s à 0,8 m/s. La borne basse est liée au fait que sous cette vitesse le dégazage de l'installation devient problématique. La borne haute fait apparaître les nuisances sonores.

**Remarque :** en chaufferie et gaines techniques, le domaine de vitesse est différent ; il peut s'établir à :  $0,8 \text{ m/s} < V < 2 \text{ m/s}$ .

Les figures 14.2 a et b donnent les vitesses débitantes en canalisation, en fonction du diamètre  $D_H$ , pour diverses valeurs de  $R_e$  et deux températures.

#### ► Puissance de la pompe de circulation

### Exemple

On recherche successivement dans trois cas de figure :

- la puissance de la pompe ;
- la consommation électrique annuelle en supposant que sur un an (8 640 h), la pompe fonctionne 5 040 h.
- le coût de fonctionnement associé sur la base d'un kwh à  $7,65 \cdot 10^{-2} \text{ €}$ .

Les trois cas de figure sont :

- un pavillon (2 m<sup>3</sup>/h avec 5 m C.E.)
- un petit collectif (7 m<sup>3</sup>/h avec 5 m C.E.)
- un grand collectif (37,5 m<sup>3</sup>/h avec 7,5 m C.E.).

On supposera que, pour ces applications, le rendement électromécanique (ou global) des petites pompes est de l'ordre de  $\eta_g = 0,25$ .



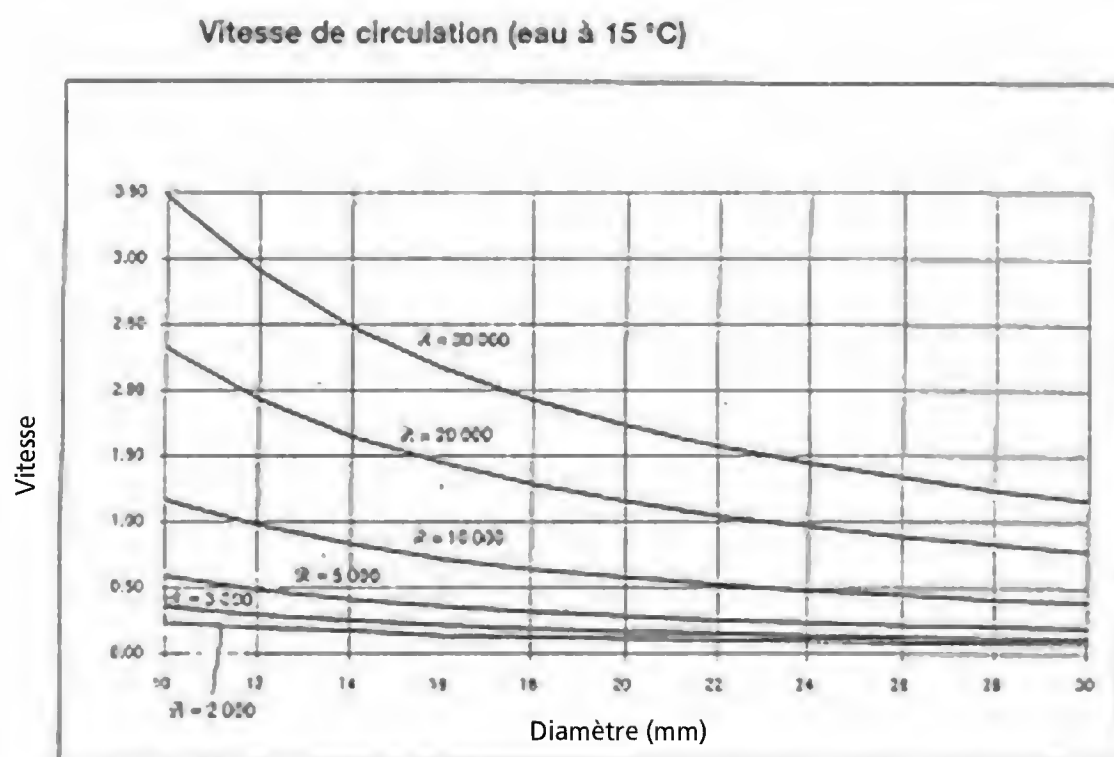
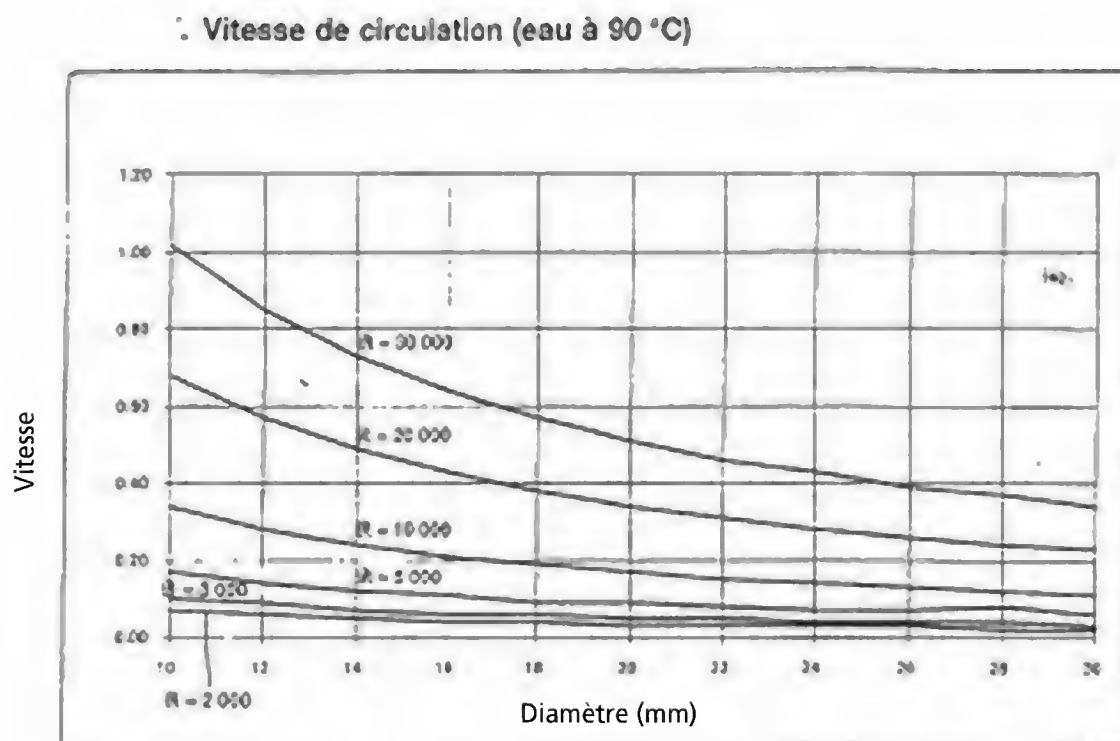


Figure 14.2 Vitesses débitantes en fonction de  $D_H$  paramétrées en  $Re$  pour deux températures d'eau.

La puissance de la pompe de circulation s'exprime sous la forme :

$$\overset{o}{W} = \frac{\overset{o}{V} \cdot \Delta P}{\eta_g}$$

Pour rechercher la puissance en W, on cherche le coefficient multiplicateur correspondant aux unités de métier (1 m<sup>3</sup>/h ; 1 m C.E.) soit  $4 \times 2,73 = 10,9$ .

D'où les résultats :

Pavillon	109 W,	549 kWh/an,	42 E/an
Petit collectif	409 W,	2 061 kWh/an,	157,00 E/an
Grand collectif	3 067 W,	15 456 kWh/an,	1 181,38 E/an

Conclusion : on voit ici que ces coûts de fonctionnement sont loin d'être négligeables, d'où l'intérêt d'un dimensionnement au plus juste de l'installation ; un surdimensionnement induit de plus un coût d'investissement plus élevé.

Pour le fonctionnement on notera qu'un surdimensionnement du débit d'un facteur  $\alpha$  induit des pertes de charge en  $\alpha$  en laminaire, et  $\alpha^2$  en turbulent, donc des puissances respectives en  $\alpha^2$  (respectivement  $\alpha^3$ ). L'intérêt d'une réduction de débit en résulte immédiatement.

## 14.2 TURBOMACHINES

### 14.2.1 Typologie et applications des machines

La configuration la plus courante, mais non unique (comme il sera vu en paragraphe 14.3), des machines se présente sous la forme de turbomachines : ces machines sont des machines à flux continu ; elles peuvent être utilisées comme machines motrices ou réceptrices.

#### a) Machines motrices ou réceptrices

Les machines motrices reçoivent de l'énergie et restituent de l'énergie mécanique sur l'arbre le plus souvent.

Dans le domaine hydraulique, on rencontre les turbines hydrauliques qui sont des formes évoluées des moulins à eau pour convertir l'énergie d'un écoulement d'eau en énergie mécanique de rotation, puis éventuellement en énergie électrique.

Le pendant gazodynamique utilise l'énergie d'un écoulement gazeux (un vent) pour le convertir aussi en énergie mécanique de rotation, puis électrique ; l'éolienne moderne est une forme évoluée de moulin à vent.

**Remarque :** une voile utilise aussi l'énergie d'un écoulement gazeux, mais pour le convertir en énergie mécanique de translation.

Les machines réceptrices mécaniques reçoivent au contraire de l'énergie mécanique sur l'arbre et la convertissent en mouvement du fluide (écoulement) soit sous forme hydraulique (pompe, hélice, marine), soit sous forme gazodynamique (ventilateur, compresseur, hélice aérienne).

### b) Turbomachines radiales ou axiales

Dans les turbomachines on distingue la partie fixe (stator) de la partie mobile (rotor) ou roue. Pour décrire ces machines, on va prendre l'exemple d'une machine de compression qui sont les plus nombreuses.

#### ► Pompe ou ventilateur centrifuge

Une telle machine est traversée par le fluide en écoulement conformément à la figure 14.3.

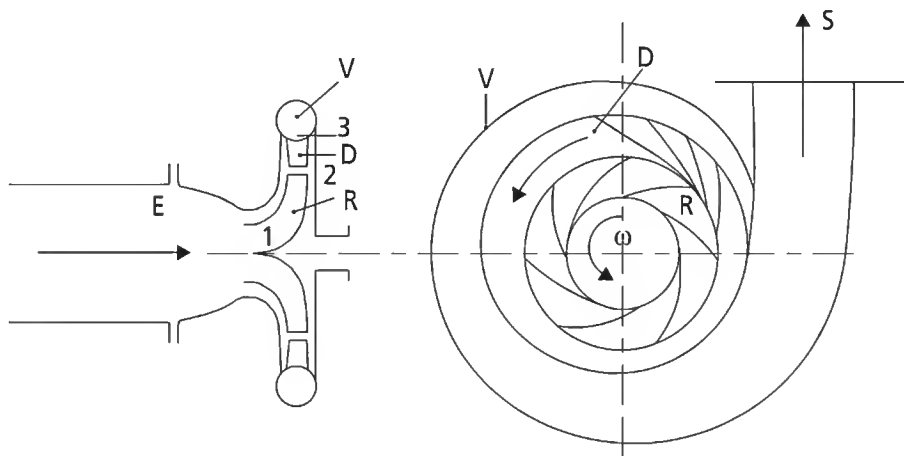


Figure 14.3 Pompe ou ventilateur centrifuges

On rencontre successivement :

- l'entrée E raccordée par bride à la tuyauterie d'aspiration ;
- une roue mobile tournant dans le sens  $\omega$ , depuis 1 entrée de roue, jusqu'à 2 sorties de roue ; en sortie de roue le fluide possède, un moment cinétique de même sens que sa rotation ;
- un diffuseur D a pour but de réduire la vitesse absolue en sortie de roue 2, jusqu'à une valeur plus faible compatible avec l'application 3 ; dans beaucoup de configurations le diffuseur n'apparaît pas ;
- une volute V collecte tous les filets fluides sortant sur la périphérie du diffuseur, ou de la roue et les amène à une bride de sortie S où est situé le raccordement à la tuyauterie de refoulement.

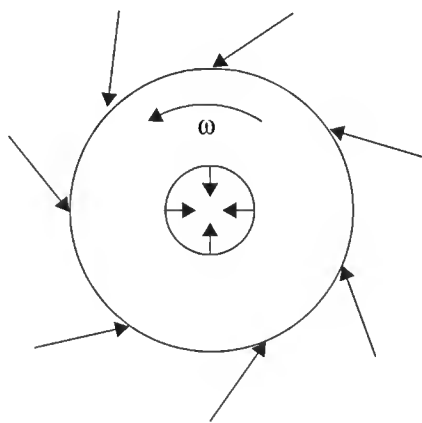
#### ► Machines radiales-machines axiales

La description de la machine centrifuge montre clairement que le transfert de l'énergie mécanique dans la machine en énergie d'écoulement hydraulique ou

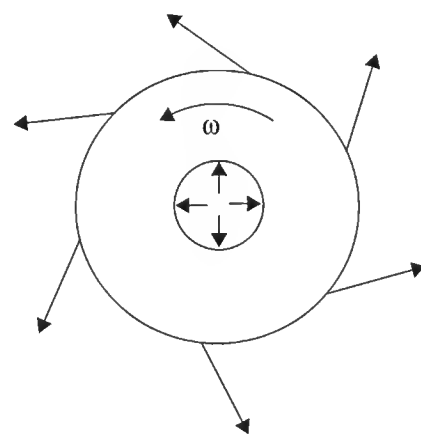
gazodynamique (énergie cinétique et de pression) s'effectue par l'intermédiaire de la roue.

**Remarque :** il peut exister aussi des machines oscillantes (voir les projets d'utilisation de l'énergie des vagues marines).

La trajectoire du fluide dans le rotor détermine si la machine est radiale (figure 14.4 a et b) ou axiale (figure 14.4 c et d). Il existe aussi des configurations intermédiaires (hélicocentrifuge).

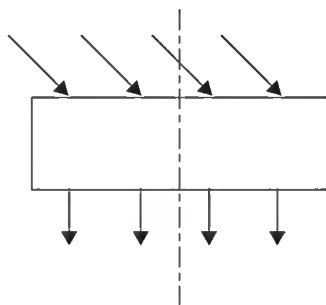


a) turbine centripète (Francis)

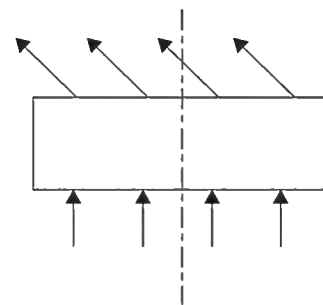


b) pompe centrifuge

Machines radiales



c) turbine axiale (Kaplan)



d) pompe axiale

Machines axiales

**Figures 14.4** Machines radiales et machines axiales

On notera sur ces figures la différence entre les machines motrices (turbines Francis, Kaplan : écoulements convergents) et les machines réceptrices (pompe centrifuge et axiale : écoulements divergents).

### 14.2.2 Les principes de fonctionnement

Ces principes découlent de la mécanique des fluides (isothermes) envisagés comme des milieux continus et de l'analyse des efforts existant entre le fluide et le rotor.

#### a) Dynamique des fluides et théorème d'Euler

La dynamique des fluides permet d'obtenir un théorème général s'appliquant aux fluides quelconques (compressible, incompressible ; parfait ou réel) et quelle que soit la machine (motrice ou réceptrice) conformément au schéma figure 14.5.

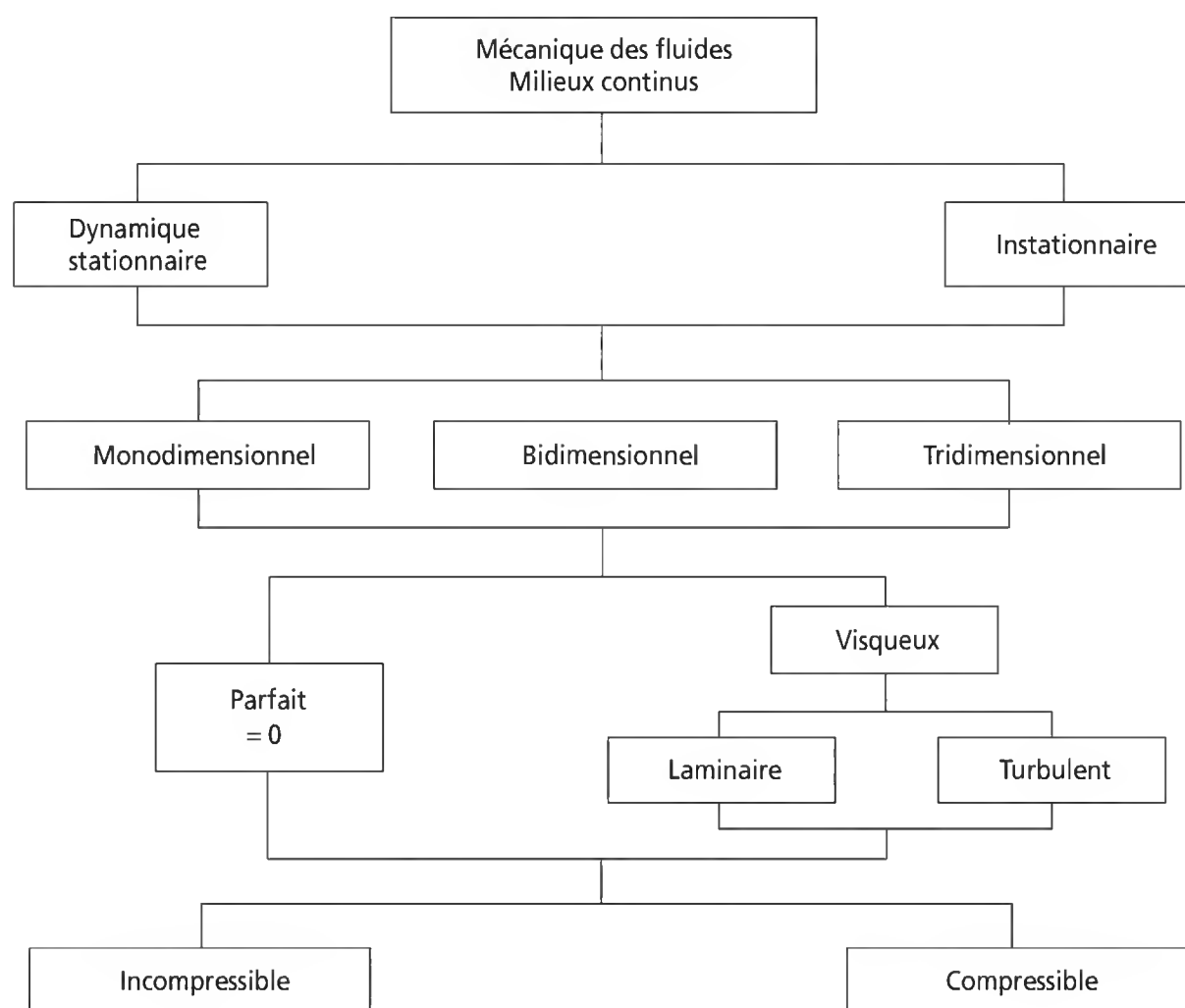


Figure 14.5 Champ de la mécanique des fluides isothermes

**Remarque :** dans les machines anisothermes, il y aurait lieu de tenir compte des variations des propriétés physiques avec la température (dont  $\rho(T)$ ).

► Conservation du débit matière

$$\dot{m} = \rho \cdot A_r \cdot V$$

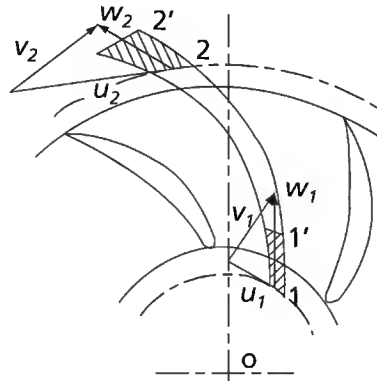
$V$ , vitesse moyenne débitante.

**Remarque :** il est supposé ci-devant une machine étanche (sans fuite).

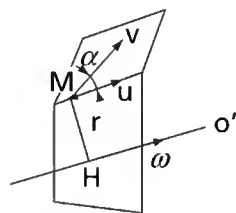
► Couple appliqué au fluide

Le calcul du couple appliqué au fluide par une couronne d'aubages suppose l'évaluation préalable du couple élémentaire sur un tube de courant ; on applique alors le deuxième théorème fondamental de la dynamique : le moment des efforts extérieurs par rapport à un axe est égal à la dérivée par rapport au temps du moment par rapport à cet axe des quantités de mouvement absolues du système.

Le système est à la base un tube de courant (figure 14.6).



a)



b) moment de la vitesse absolue

**Figure 14.6** Équilibre mécanique d'un tube de courant

Le couple élémentaire  $dC$  généré dans un tube de courant entre la section 1 et la section 2 s'écrit :

$$d\vec{C} = \frac{d}{dt} \left[ \sum M_{00'} (\vec{v} dm_t) \right] \quad (14.10)$$

L'écoulement étant dynamique stationnaire, il vient :

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum M_{00'} (\vec{v} dm) \right] = \sum M_{00'} \left[ \vec{v} \dot{m}_t \right] = \sum M_{00'} (\vec{v}) \cdot \dot{m}_t \quad (14.11)$$

$dm_t, \dot{m}_t$  respectivement élément de masse (débit masse du tube).

La combinaison de 14.10. et 14.11 conduit, en comptant positivement les moments dans le sens de la rotation du rotor a :

$$dC = \left[ M_{00'}(\vec{v}_2) - M_{00'}(\vec{v}_1) \right] \cdot \dot{m}_t \quad (14.12)$$

$\vec{v}$ , vecteur vitesse absolue résultant de la composition des vitesses relatives  $\vec{w}$ , et d'entraînement  $\vec{u}$ .

Si on appelle  $\alpha$  l'angle que fait le vecteur vitesse absolue  $\vec{v}$  avec le vecteur vitesse d'entraînement, et si  $r$  est la distance de l'origine de  $\vec{v}$  à l'axe  $00'$ , il vient (figure 14.6.a) :

$$M_{00'}(\vec{v}) = rv \cos \alpha = rv_u \quad (14.13)$$

La combinaison de (14.12) et (14.13) conduit à :

$$dC = (r_2 v_2 \cos \alpha_2 - r_1 v_1 \cos \alpha_1) \dot{m}_t \quad (14.14)$$

Cette relation constitue une forme locale du théorème d'Euler, appliqué à un tube de courant ; si on néglige la pesanteur, les forces extérieures donnant lieu à  $dC$  sont :

- les forces de pression sur les sections d'extrémité (1 et 2) ; ces efforts passent par  $00'$  (surfaces de révolution) et leur moment par rapport à cet axe est nul ;
- les forces de pression latérale  $P_l$  normales au tube de courant ;
- les forces de frottements  $f$  tangentielles à la frontière du tube (viscosité) (figure 14.6.b).

$dC$  résulte donc de la somme des moments par rapport à  $00'$  des forces  $P_l$  et  $f$  (efforts latéraux).

**Remarque :** le théorème d'Euler s'applique aussi à un tube de courant appartenant à un canal fixe.

L'intégration de la relation (14.14) à l'ensemble des canaux autour d'aubages fixes ou mobiles conduit à l'expression globale du théorème d'Euler :

$$C = \int_{A_s} r_s v_s \cos \alpha_s d\dot{m}_t - \int_{A_e} r_e v_e \cos \alpha_e d\dot{m}_t \quad (14.15)$$

**Remarque 1 :** si on néglige les frottements (dissipation) pour un tube de courant, (14.14) conduit à  $rv \cos \alpha = cte$ .

**Remarque 2 :** dans la pratique courante, on adopte une valeur moyenne de la vitesse tangentielle absolue qui conserve les couples :

$$C = \rho \dot{V} (v_{2t} r_2 - v_{1t} r_1) \quad (14.16)$$

On ne développera pas plus avant l'aspect modèle fluide des turbomachines ; le lecteur est renvoyé vers la référence récente (Pluviose M.) pour des compléments d'information.

### b) Puissance et rendements de turbomachines

#### ► Puissance mécanique d'une machine

La connaissance du couple  $C$ , conduit aisément à la puissance mécanique :

$$\begin{aligned}\dot{W} &= C.\omega = \rho \dot{V} (v_{2t} r_2 \omega - v_{1t} r_1 \omega) \\ \dot{W} &= \dot{m} (v_{2t} u_2 - v_{1t} u_1)\end{aligned}\quad (14.17)$$

**Remarque :** (14.17) fournit l'expression de la variation d'enthalpie spécifique massique à la traversée de la machine :

$$\Delta h = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} = v_{2t} u_2 - v_{1t} u_1 \quad (14.18)$$

#### ► Rendements d'une machine

Les réalisations de machines répondent le plus souvent à un débit  $\dot{V}$  fixé, pour une hauteur d'élévation  $H$  connue, et avec une vitesse de rotation  $N$  (t/mn) paramètre souvent imposé (approche métier des turbiniers).

L'expression de la hauteur théorique  $H_{th}$  permise par la machine résulte de (14.18) en divisant par  $g$  l'accélération de la pesanteur :

$$H_{th} = (v_{2t} u_2 - v_{1t} u_1) / g \quad (14.19)$$

Toutefois, les expressions précédentes ignorent les irréversibilités. On rapporte ci-après certaines de celles-ci.

#### *Pertes à l'intérieur des aubes (pertes de charge)*

Ces pertes comprennent les pertes dans la roue  $\Delta H_r$ , mais aussi dans les parties fixes de la machine (volute, diffuseur s'il existe)  $\Delta H_d$ . Des pertes par choc apparaissent aussi bien en entrée qu'en sortie de roue, vu les différences angulaires entre l'écoulement fluide et les aubes ( $\Delta H_c$ , pour l'ensemble des chocs).

#### *Pertes par fuites*

Malgré les garnitures et labyrinthe, il existe un débit de fuite  $\dot{V}_f$  entre partie mobile et partie fixe. Ce débit dépend de la différence de pression entre entrée et sortie de roue et impose de disposer dans la roue d'un débit  $\left( \dot{V} + \dot{V}_f \right)$  pour avoir un débit utile  $\dot{V}$ .



*Pertes mécaniques*

On rencontre là deux sortes de pertes mécaniques, comme il a été dit antérieurement :

- les pertes par frottement fluide  $\dot{W}_f$  (dans les canaux, mais aussi à l'extérieur de la roue) ;
- les pertes par frottement solide  $\dot{W}_s$  (paliers, butées).

Ces dernières se partagent entre dissipation interne et externe, alors que les pertes par frottement visqueux sont des pertes internes.

*Rendement global*

L'analyse des pertes (méthode des pertes séparées) permet d'exprimer la puissance absorbée sur l'arbre pour une machine réceptrice : cette puissance est alors la dépense énergétique  $DE$  :

$$\dot{W}_{DE} = \left( \dot{V} + \dot{V}_f \right) \rho g \left( H + \sum_i \Delta H_i \right) + \dot{W}_f + \dot{W}_s$$

Pour cette même machine, la puissance utile transmise au fluide (EU) vaut :

$$\dot{W}_{EU} = \dot{V} \rho g H.$$

Il en résulte l'expression d'un rendement global de la machine réceptrice :

$$\eta_g = \frac{\rho g \dot{V} H}{\rho g \left( \dot{V} + \dot{V}_f \right) \left( H + \sum_i \Delta H_i \right) + \left( \dot{W}_f + \dot{W}_s \right)} \quad (14.20)$$

*Autres rendements*

Le rendement hydraulique (ou aérodynamique) ne tient compte que des pertes de charge :

$$\eta_h = \frac{H}{H_{th}} = \frac{H}{H + \sum_i \Delta H_i}$$

Rendement volumétrique :

$$\eta_v = \frac{\dot{V}}{\dot{V} + \dot{V}_f}$$

**Remarque :** on retrouvera sous une forme différente ce rendement, dans les machines alternatives (moteurs thermiques, compresseurs).

Rendement mécanique : en appelant  $\dot{W}_i$  la puissance interne de la machine telle que :

$$\dot{W}_i = \rho g \left[ H + \sum_i \Delta H_i \right] \left( \dot{V} + \dot{V}_f \right)$$

le rendement mécanique s'écrit :

$$\eta_m = \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}_{DE}}$$

Avec ces définitions le rendement global s'écrit :

$$\eta_g = \eta_m \eta_v \eta_h$$

**Remarque :** cette expression n'est possible que parce que les pertes par frottements fluides ont été externalisées ; mais, en pratique, le rendement global est le plus utile et utilisé.

Rendement récepteur, rendement moteur : l'influence des irréversibilités se manifeste de façon dissymétrique selon le type de machine. Le lecteur devra être très attentif à cette constatation.

Aussi, si la puissance mécanique disponible sur le fluide en écoulement est toujours fournie sous la forme (14.17), la puissance utile  $\dot{W}_u$  aux bornes de la machine s'exprime sous la forme :

$$\dot{W}_u = \frac{\dot{m}}{\rho} (P_s - P_e) \quad (14.21)$$

**Remarque :**  $P_s > P_e$ , pour un récepteur (pompe,  $\dot{W}_u > 0$ ) ;  $P_s < P_e$ , pour un moteur (turbine,  $\dot{W}_u < 0$ , conformément à la convention thermodynamique).

La combinaison de (14.21) avec (14.17) conduit selon le cas à :

$$\text{– cas récepteur } \dot{W}_{DE} = \rho \dot{V} (v_{2t} \cdot u_2 - v_{1t} \cdot u_1) = \frac{\dot{V} (P_s - P_e)}{\eta_R}$$

$\eta_R$ , rendement global de récepteur (pompe, ventilateur).

$$\text{– cas moteur } \dot{W}_{EU} = \rho \dot{V} (v_{2t} \cdot u_2 - v_{1t} \cdot u_1) = \dot{V} (P_s - P_e) \eta_M$$

$\eta_M$ , rendement global du moteur (turbine).

### c) Similitude (notions)

Dans une machine la hauteur manométrique  $H$  est une fonction du débit volumique  $\dot{V}$ , du fluide ( $\rho, \mu$ ) et de la vitesse de rotation  $N$ , ainsi que de la géométrie de machine, et du champ de forces extérieures ( $g$ ).

Des machines semblables géométriquement ne nécessitent qu'une dimension pour être caractérisées ; choisissons  $D$  le diamètre extérieur du rotor.

L'analyse dimensionnelle permet de former quatre nombres sans dimension avec les variables précédentes :

$$\pi_1 = \frac{H}{D} ; \pi_2 = \frac{g}{N^2 D} ; \pi_3 = \frac{\dot{V}}{ND^3} ; \pi_4 = \frac{ND^2}{\nu}$$

avec  $\nu$ , viscosité cinématique  $= \mu/\rho$  ( $\rho$ , n'intervient pas explicitement).

Il en résulte une loi implicite reliant ces quatre nombres adimensionnels et caractérisant le fonctionnement de machines géométriquement semblables ou sous forme explicite par rapport à  $\pi_1$  :

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4) \quad (14.22)$$

Si on suppose que les pertes ne modifient pas la relation qui existe entre  $H$  et  $g$ , on peut écrire (14.21) sous la forme :

$$\mu_R = \pi_1 \pi_2 = f(\pi_3, \pi_4) = \frac{gH}{N^2 D^2}$$

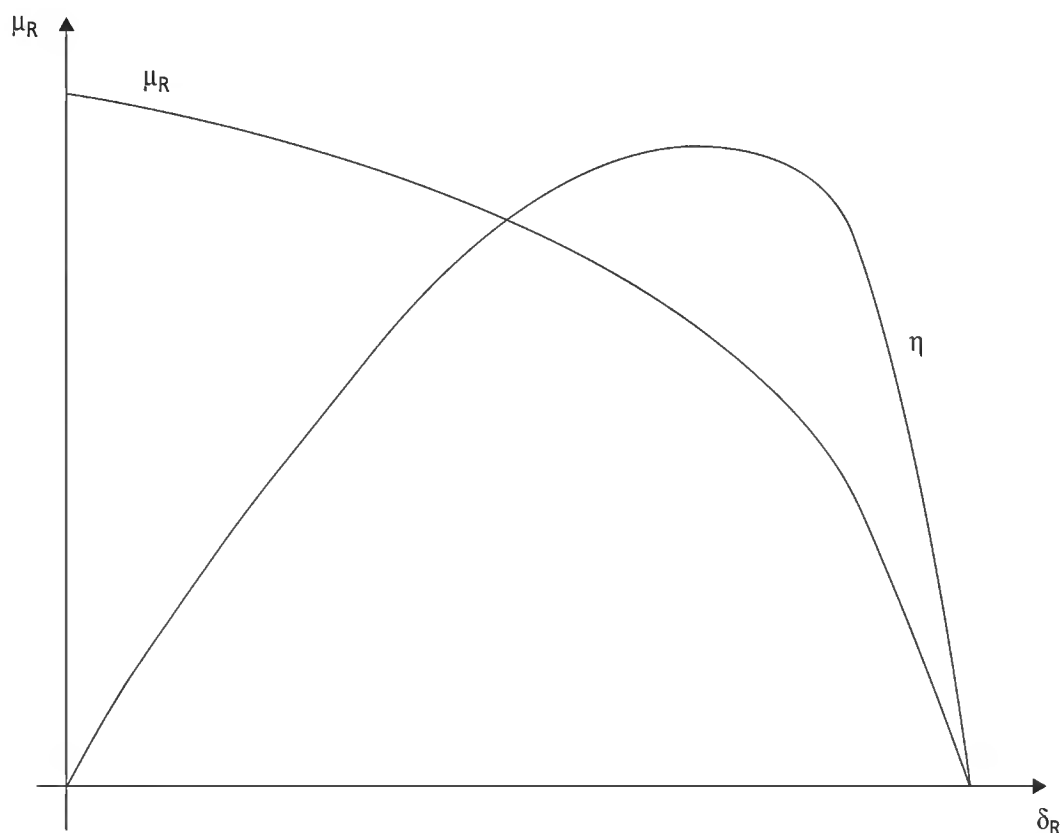
avec :

$\mu_R$ , coefficient manométrique

$\delta_R$ , coefficient de débit ( $\pi_3$ )

$Re$ , nombre de Reynolds, homogène à  $\pi_4$

Les expériences montrent que le  $Re$  n'a pas grande influence sur  $\mu_R$ , de sorte que la courbe en variable adimensionnelle d'une machine (pompe) a la forme indiquée figure 14.7.



**Figure 14.7** Courbe adimensionnelle et courbe de rendement d'une machine en fonction de  $\delta_R$  coefficient de débit.

### ► Exemple d'application

L'utilisation des paramètres de similitude peut servir à déterminer le point de fonctionnement d'une machine dont la courbe caractéristique adimensionnelle n'est pas connue, mais pour laquelle une caractéristique  $H(\overset{o}{V})$  est donnée à  $N_1$ , imposé.

On cherche la caractéristique de la pompe lorsque celle-ci est entraînée par un moteur de vitesse différente  $N_2$ .

On détermine le rapport de vitesse  $n = \frac{N_2}{N_1}$ .

Alors  $\mu_R$  et  $\delta_R$  imposent que :  $H_2 = n^2 H_1$ ;  $\overset{o}{V}_2 = n \overset{o}{V}_1$ .

### ► Choix d'un type de machine

Les quatre nombres adimensionnels précédents permettent aussi la définition, d'un autre nombre adimensionnel ne dépendant pas de  $D$  (indépendance de la similitude géométrique) :

$$N_s = \frac{\delta_R^{1/2}}{\mu_R^{3/4}} = \frac{N \overset{o}{V}^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

$N_s$ , nombre de tours spécifique de la machine.

Si on trace le rendement de la machine en fonction de  $N_s$ , on observe que la forme de cette courbe est très dépendante de la forme du rotor, en particulier le point de rendement maximum (figure 14.8).

La figure 14.8 montre l'évolution de la forme de roue d'une pompe en fonction de  $N_{sm}$  (nombre de tours spécifique au maximum de rendement) ; les machines centrifuges ont de faibles valeurs de  $N_{sm}$ , contrairement aux machines axiales.

### Exemple

Soit une pompe qui a un rendement maximum pour un débit volumique de  $0,125 \text{ m}^3/\text{s}$  à une hauteur manométrique de  $80 \text{ m}$ , pour une vitesse de rotation de  $1\,450 \text{ tr/min}$ .

Le  $N_{sm}$  correspondant est voisin de  $0,06$  ; la machine est centrifuge.

On va voir comment modifier l'installation si on place deux pompes en série et si on place deux pompes en parallèle.

Pour deux pompes en série, la hauteur manométrique de chaque pompe est  $40 \text{ m}$  : le  $N_{sm}$  correspondant est voisin de  $0,10$ . On utilise deux machines de Francis.

Pour deux pompes en parallèle, le débit volumique de chacune des pompes vaut  $0,0625 \text{ m}^3/\text{s}$  : le  $N_{sm}$  correspondant est voisin de  $0,04$ . On utilise deux pompes centrifuges en parallèle.

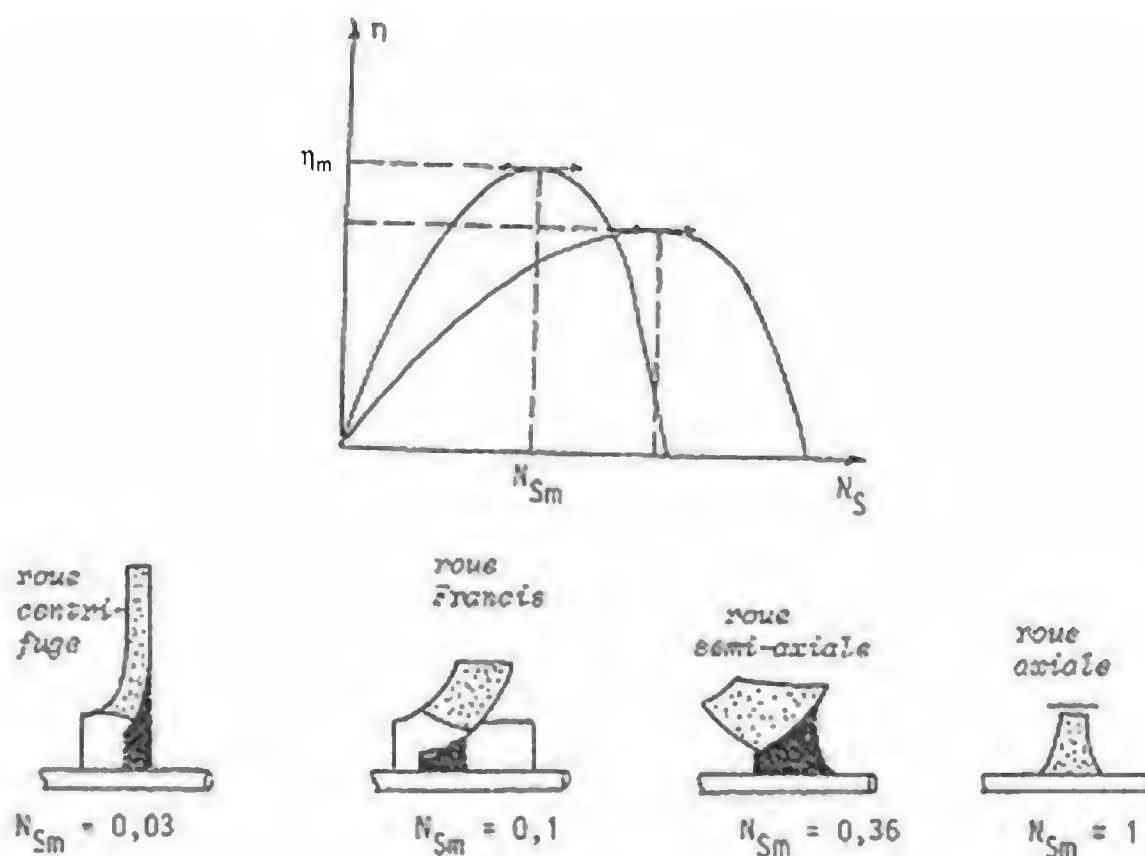


Figure 14.8 Évolution du rendement de machine (pompe) en fonction de  $N_{sm}$ , nombre de tours spécifique.

**Remarque 1 :** En pratique, on ne descend pas à des valeurs de  $N_{sm} < 0,01$  (grandes hauteurs de refoulement) ; dans ce cas, on utilise plusieurs pompes en série.

**Remarque 2 :** Lorsque les rotors des pompes en série sont montés sur la même ligne d'arbre, la pompe est dite multicellulaire (le nombre de roues correspond au nombre d'étage de la pompe) ; voir le cliché de l'auteur (figure 14.9).



Figure 14.9 Photo de pompe multicellulaire

### 14.2.3 Quelques exemples de turbomachines

#### a) Les turbomachines à compression

Ces machines sont représentées par les pompes et ventilateur. Un circulateur est une pompe classique dans le domaine de l'habitat.

##### ► Pompes centrifuges

Le développement est fait ici pour le fonctionnement en pompe ; le lecteur transposera au fonctionnement des turbines.

Un rotor de pompe centrifuge est constitué d'aubes qui peuvent être courbées soit dans le sens de rotation, soit dans le sens contraire (degré de réaction, voir figure 14.10).

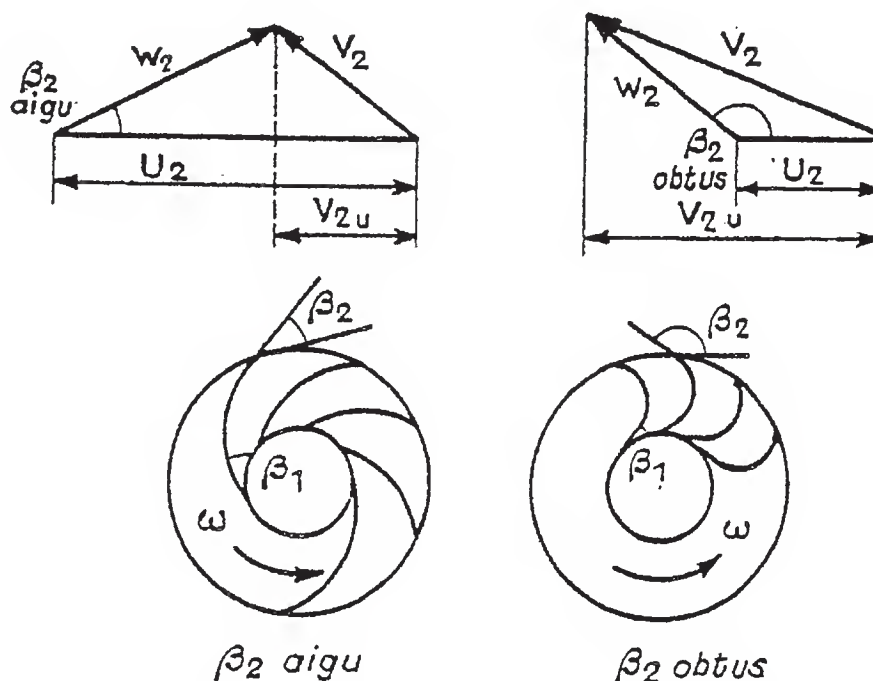


Figure 14.10 Degré de réaction d'une machine

**Remarque :** l'usage du degré de réaction est courant dans les turbines.

On pourrait montrer qu'un degré de réaction élevé est favorable au rendement hydro ou gazodynamique, mais défavorable pour ce qui est des pertes par fuites et par frottements, d'où l'existence d'un degré de réaction optimum.

#### Définition du degré de réaction $\varepsilon$

Le degré de réaction est le pourcentage de la hauteur d'élévation obtenue sous forme piézométrique dans le rotor :

$$\varepsilon = \frac{P_2 - P_1}{\rho g H} \quad (14.23)$$

**Remarque :** en supposant les pertes négligeables, la hauteur fournie par la roue est la somme de la hauteur piézométrique et de la hauteur dynamique :

$$H_{th} = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

### Modèle du fonctionnement de pompe centrifuge

À l'intérieur de la roue la vitesse absolue  $\vec{v}$  peut être décomposée en la somme de deux vitesses :  $\vec{w}$  vitesse relative, et  $\vec{u}$  vitesse d'entraînement (figure 14.11.a).

Affectons l'indice  $r$  aux projections sur le rayon vecteur et l'indice  $u$  aux projections sur une normale au rayon vecteur.

À l'entrée de la roue, on aura :  $\vec{v}_1 = \vec{w}_1 + \vec{u}_1$

À la sortie :  $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 + \vec{u}_2$ .

On doit cependant vérifier que :

$$u_{1u} = \omega r_1 \quad u_{1r} = 0$$

$$u_{2u} = \omega r_2 \quad u_{2r} = 0$$

$$v_{1r} = \frac{\overset{o}{V}}{2\pi r_1 e_1} = w_{1r}$$

$$v_{2r} = \frac{\overset{o}{V}}{2\pi r_2 e_2} = w_{2r}$$

avec  $\overset{o}{V}$  = débit,  $r_1$  et  $r_2$  = rayons intérieur et extérieur de la roue,  $e_1$  et  $e_2$  épaisseurs de la roue à l'entrée et à la sortie.

$\vec{w}$  a une orientation telle que les lignes de courant soient tangentes aux aubes, donc  $\vec{w}$  est tangent aux aubes. Les vecteurs  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  ont leur orientation fixée par construction.

La figure 14.11 b et c montre comme exemple que l'on a augmenté la vitesse des particules en projetant celles-ci vers l'extérieur de la roue. Mais pour cela, il a fallu fournir aux particules une certaine énergie que nous allons chercher.

Par rapport à l'axe de rotation, on a vu que la dérivée par rapport au temps des moments de quantité de mouvement est égale à la différence des moments des débits de quantités de mouvement sortant  $\rho \overset{o}{V} \vec{v}_2$  et entrant  $\rho \overset{o}{V} \vec{v}_1$ . D'où le couple exercé sur l'axe :

$$C = \rho \overset{o}{V} (v_{2u} \cdot r_2 - v_{1u} r_1)$$

Puis la puissance mécanique et la variation de charge entre l'entrée et la sortie de roue  $H_{th}$ , hauteur manométrique théorique :

$$\overset{o}{W} = \rho \overset{o}{V} (u_2 v_{2u} - u_1 v_{1u})$$

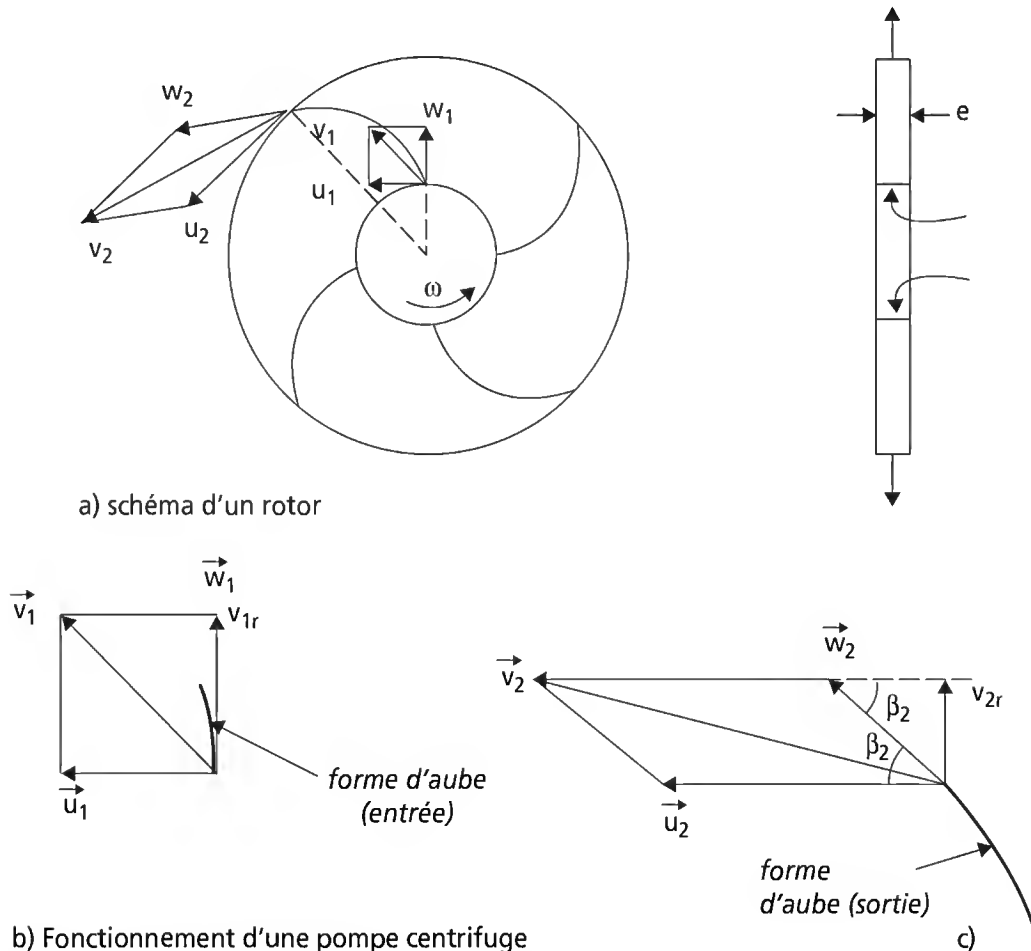


Figure 14.11 Fonctionnement d'une pompe centrifuge.

$$H_{th} = \frac{\dot{W}}{\rho \dot{V} g} = \frac{u_2 v_{2u} - u_1 v_{1u}}{g}$$

En remarquant que :

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$$

et :

$$w^2 = v^2 + u^2 - 2uv_u$$

$$\text{on a : } uv_u = \frac{-w^2 + v^2 + u^2}{2}$$

$$\text{d'où : } H_{th} = \frac{(v_2^2 - v_1^2) + (u_2^2 - u_1^2) - (w_2^2 - w_1^2)}{2g}$$

Remarquons que pour une turbine, le fluide est l'objet à la traversée de la roue d'une diminution de charge correspondant à l'énergie que le fluide fournit à la turbine.

Exprimons  $H_{th}$  en fonction du débit  $\dot{V}$ .

$$v_u = u + w \cos \beta$$



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_r}{w \cos \beta}$$

$$v_u = u + \frac{v_r}{\operatorname{tg} \beta}$$

avec :

$$v_r = \frac{\dot{V}}{2\pi r e}; \quad v_r = u \left( u + \frac{\dot{V}}{2\pi r e \operatorname{tg} \beta} \right)$$

d'où :

$$H_{th} = \frac{1}{g} \left[ u^2 + \frac{u \dot{V}}{2\pi r e \operatorname{tg} \beta} \right]^2$$

Prenons une entrée radiale :  $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$

$$u_1 v_{1u} = u_1^2$$

$$u_2 v_{2u} = u_2^2 + \frac{\dot{V} u_2}{2\pi r_2 e_2 \operatorname{tg} \beta_2}$$

$$H_{th} = \frac{1}{g} \left[ u_2^2 - u_1^2 + \frac{\dot{V} u_2}{2\pi r_2 e_2 \operatorname{tg} \beta_2} \right]$$

Cette formule peut se mettre sous la forme :

$$H_{th} = C_1 + C_2 \dot{V}$$

avec  $C_1 = \frac{1}{g} (u_2^2 - u_1^2)$  qui dépend de  $r_2, r_1$  et  $\omega$  et  $C_2 = \frac{u_2}{2\pi g r_2 e_2 \operatorname{tg} \beta_2}$  qui dépend de  $r_2, e_2, \beta_2$  (paramètres constructifs).

Les allures de  $H_{th}(\dot{V})$  sont donc différentes selon les valeurs de  $\beta_2$  (voir figure 14.12).

L'énergie est fournie au fluide sous forme d'énergie cinétique. À la sortie de la roue se trouve le diffuseur qui est un organe fixe de la pompe permettant la transformation de cette énergie cinétique en pression.

Entre l'entrée et la sortie de la pompe, on aura donc une augmentation de la charge. Si  $H_1$  est la charge de l'entrée de la pompe et  $H_2$  la charge à la sortie :

$$H_1 + H_E = H_2$$

La charge à la sortie est égale à la charge à l'entrée augmentée de l'énergie fournie au fluide par unité de poids.

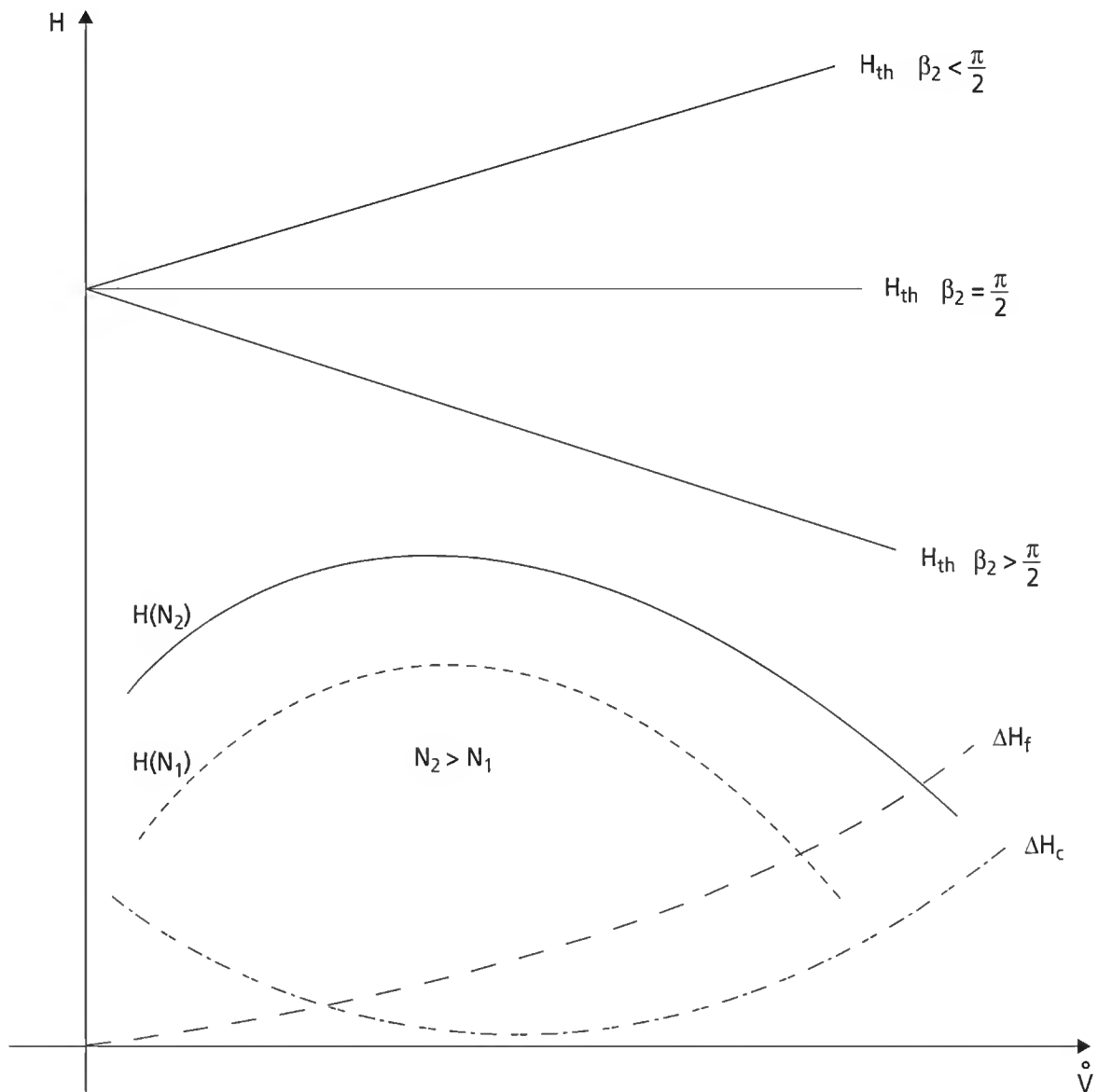


Figure 14.12 Courbes caractéristiques théorique et réelle d'une pompe centrifuge.

Toutefois dans une pompe réelle  $H(\dot{V})$  n'a pas la forme d'une droite. Il y a dans une pompe différentes sources de pertes : pertes par frottement  $\Delta H_f$  (proportionnelles au carré du débit) et pertes par choc : la pompe est prévue et sa roue est dessinée pour un certain débit.

Lorsque le débit est différent, les trajectoires des particules dévient de celles prévues et par conséquent il y a choc. Les pertes par choc  $\Delta H_c$  sont minimum pour le débit pour lequel la pompe est calculée.

**Remarque :** les courbes  $H\left(\dot{V}\right)$  se déduisent en théorie par translation verticale pour différentes valeurs de  $N$  ; en réalité, la perte dépend aussi de  $N$ .

Les courbes du rendement global peuvent être surajoutées pour les différents points de fonctionnement ; il en résulte un réseau de courbes isorendement. La figure 14.13 montre pour des machines réelles l'allure de ces courbes isorendement.

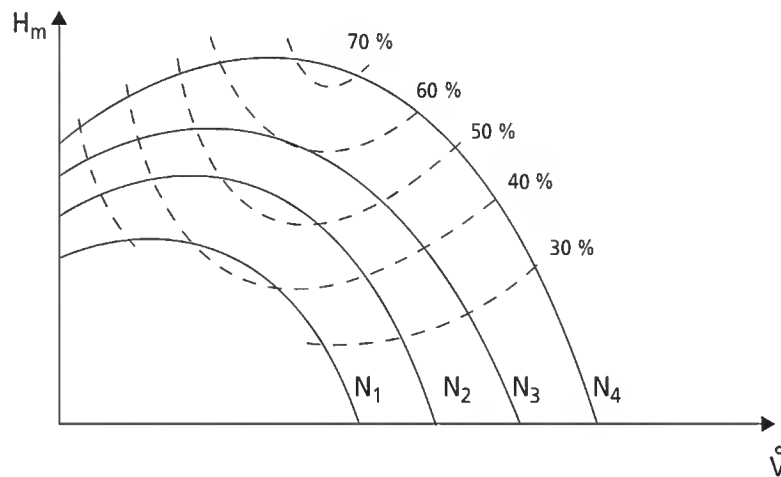


Figure 14.13 Réseau de courbes isorendement d'une turbomachine.

#### ► Extension aux pompes axiales

Un rotor de machine axiale est constitué par un moyeu sur lequel sont placées un certain nombre de pales. La figure 14.14 représente un tel rotor (figure 14.14.a) ; la figure 14.14.b est un développement d'une coupe de la roue par un cylindre de rayon  $r$ , supérieur au rayon du moyeu, avec les triangles des vitesses lorsque le fluide attaque les pales ou les quitte.

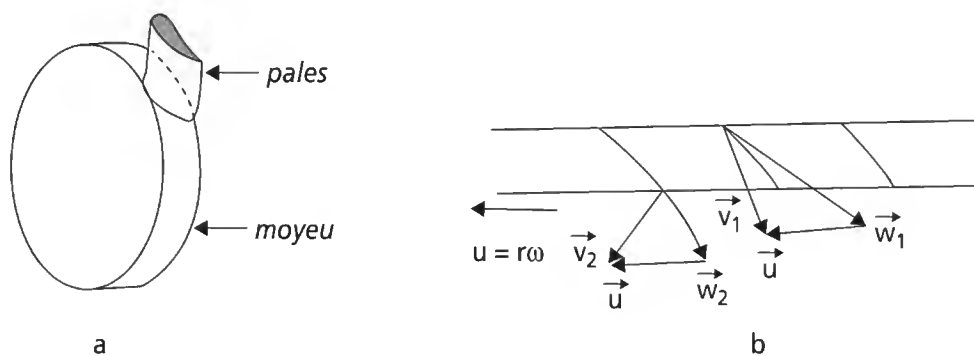


Figure 14.14 Représentation d'une machine axiale (pompe).

La méthodologie de l'étude reste la même que précédemment, hormis que :  $u_1 = u_2 = u$ . Ainsi, il vient :

$$H_{th} = \frac{u}{g} (v_{u2} - v_{u1}) = \frac{u}{g} \Delta v_u$$

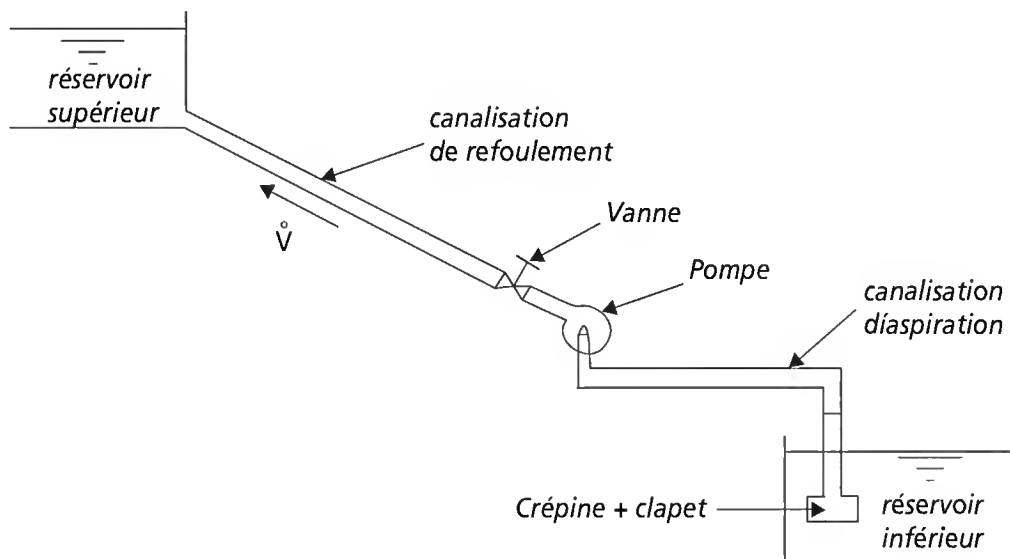
Les expressions de  $v_{u2}$  et  $v_{u1}$  en fonction de  $\dot{V}$  permettent d'aboutir alors à des formes de courbes  $H_m \left( \frac{\dot{V}}{V} \right)$  identiques.

### b) Installation de pompage

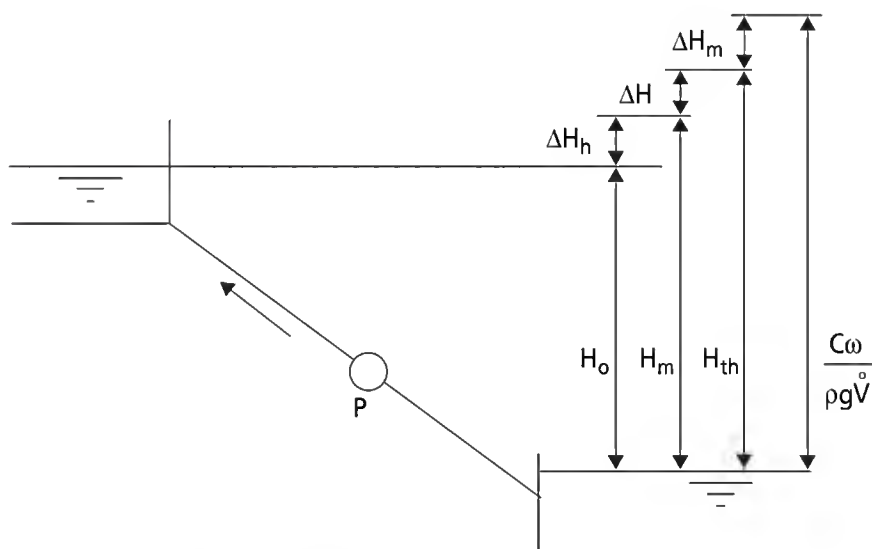
Une installation de pompage est représentative d'un système hydraulique.

#### ► Rendement de l'installation

L'installation de pompage comprend généralement la pompe et les canalisations de transport. Supposons pour simplifier que l'installation de pompage est destinée à pomper l'eau d'un réservoir inférieur pour l'amener à un réservoir supérieur. L'installation comporte la pompe, une conduite d'aspiration, une conduite de refoulement, une vanne sur la conduite de refoulement, une crépine destinée à filtrer les impuretés, un clapet anti-retour (si la pompe est située au-dessus du plan d'eau du réservoir inférieur). Ce clapet a pour effet d'éviter que la canalisation ne se remplisse d'air empêchant ainsi l'amorçage de la pompe (voir figure 14.15.a).



a) schéma descriptif du système de pompage



b) correspondance au modèle du système de pompage

**Figure 14.15** Schémas d'une installation de pompage.

La différence de cote  $H_o$  ou hauteur géométrique correspond à l'énergie réelle à fournir à l'unité de poids du fluide.

La différence entre  $H_m$  (hauteur manométrique) et  $H_o$  est l'énergie dissipée dans les conduites et les singularités :  $\Delta H_h$ .

La différence entre  $H_{th}$  et  $H_m$  correspond aux pertes par frottement et par choc à l'intérieur de la pompe :  $\Delta H = \Delta H_f + \Delta H_c$ .

La différence entre l'énergie disponible au niveau de l'arbre et  $H_{th}$  correspond aux pertes mécaniques dues aux paliers :  $\Delta H_m$ . Soit  $C\omega$  la puissance mécanique au niveau de l'arbre à l'entrée de la pompe. Le rendement global de l'installation de pompage sera égal à  $\eta_s$  :

$$\eta_s = \frac{\rho g H_o \dot{V}}{C\omega}$$

Il dépend naturellement du point de fonctionnement (valeur de  $\dot{V}$ ). La détermination du point de fonctionnement se fait comme suit.

On détermine les caractéristiques  $\Delta H_h \left( \dot{V} \right)$  de l'installation (frottements dans les conduites et pertes dans les singularités). On trace  $H_m = H_o + \Delta H_h$  en fonction de  $\dot{V}$ .

On fait le choix d'une pompe et on porte sur la même figure sa caractéristique  $H_m$ . Le point d'intersection entre les deux courbes donne le point de fonctionnement (figure 14.16).

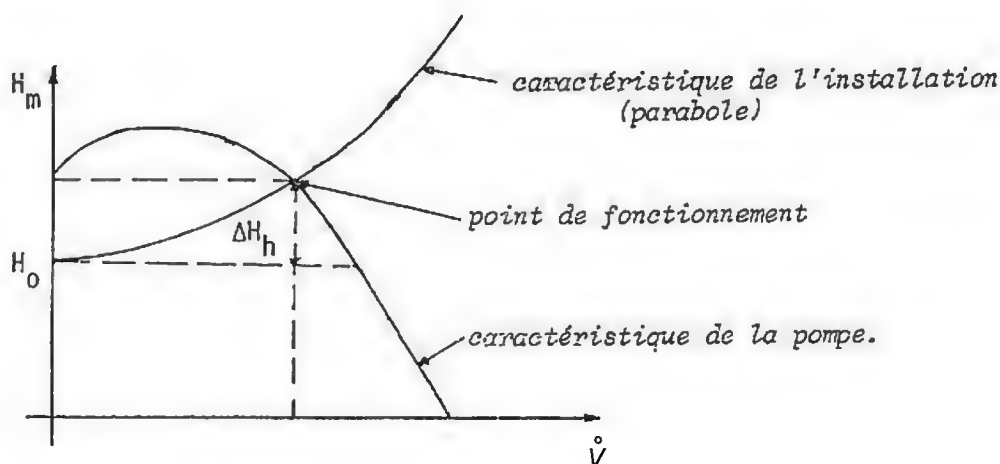
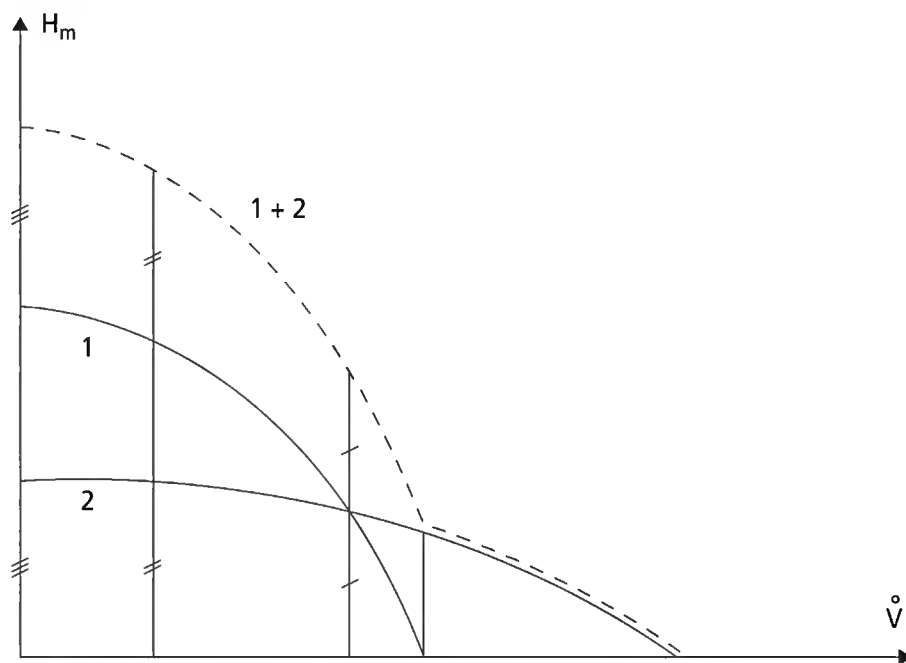
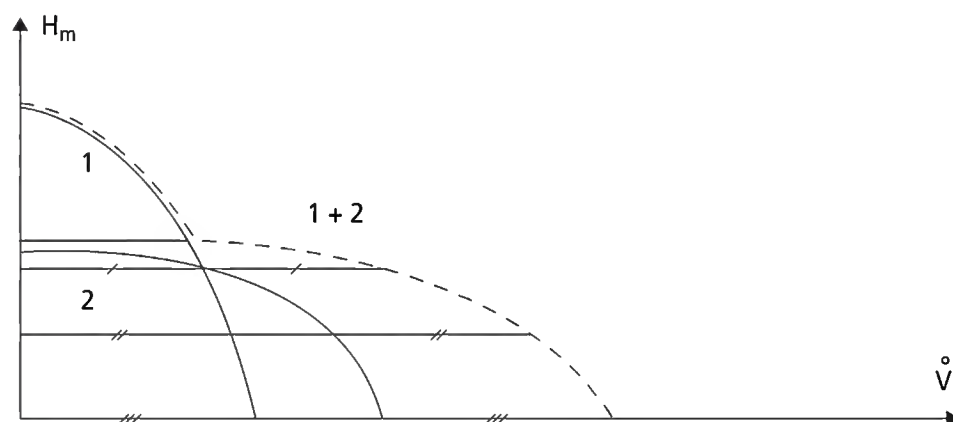


Figure 14.16 Point de fonctionnement de l'installation de pompage.

► Couplage en série, parallèle de pompe



a) caractéristique de pompes en série (2 pompes)



b) caractéristique de pompes en parallèle (2 pompes)

**Figure 14.17** Couplage en série, parallèle de pompes.

### Montage série

La mise en œuvre de pompes répond à l'insuffisance en hauteur manométrique d'une seule pompe ; dans ce cas, le débit qui passe à travers les pompes est conservé, mais la hauteur manométrique totale est la somme des hauteurs manométriques des pompes.

### Montage parallèle

La mise en parallèle de pompes répond à l'insuffisance en débit d'une seule pompe ; dans ce cas, à hauteur manométrique donnée, le débit total est la somme des débits passant dans chaque pompe.

### ► Cavitation des pompes

Le phénomène de cavitation peut apparaître dans les pompes en fonction de la position de celles-ci par rapport à la situation du réservoir amont.

#### *Charge nécessaire à l'entrée d'une pompe*

Soit une pompe fonctionnant à une hauteur d'aspiration  $H_a$  au-dessus du réservoir amont, dont le liquide a une surface libre à la pression atmosphérique. La pression absolue en entrée de pompe vaut par application du théorème de Bernoulli :

$$Pe = Pa - \rho g (H_a + \Delta H_a) - \frac{\rho v_e^2}{2} \quad (14.24)$$

$\Delta H_a$ , pertes de charge dans la tubulure d'aspiration.

Pour que la pompe fonctionne correctement en phase liquide, cette pression doit rester supérieure à la pression de vapeur saturante  $P_{sat}$  du fluide dans les conditions de température d'entrée de pompe. Soit en réorganisant l'équation (14.24) :

$$\frac{Pe - P_{sat}}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} = \frac{Pa - P_{sat}}{\rho g} - (H_a + \Delta H_a) \quad (14.25)$$

Le membre de gauche de l'équation (14.25) représente la charge nette à l'aspiration (NPSH, Net Positive Suction Head) ou charge à l'entrée en prenant pour références  $z_e = 0$  et  $p = p_{sat}$  ; si cette charge est trop faible ou s'annule, il apparaît de la vapeur dans le fluide : cette production de vapeur caractérise le phénomène de cavitation qui nuit au fonctionnement de la pompe et peut même conduire à sa détérioration. En pratique, on maintient toujours une différence  $Pe - P_{sat}$  positive de l'ordre du dixième ou vingtième d'atmosphère.

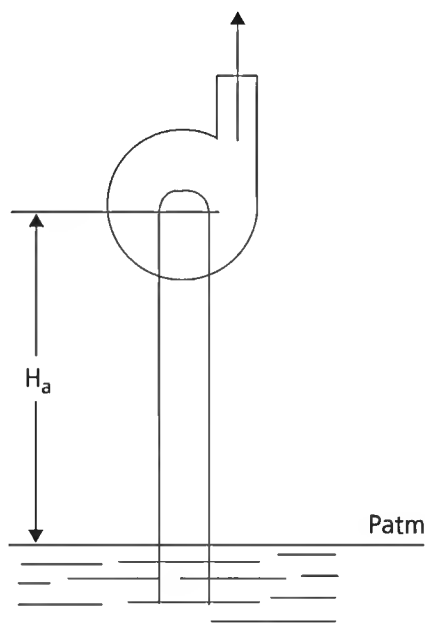
**Remarque :** conformément à la figure 14.18.a, on voit que si on essaie d'aspirer de l'eau à plus de 10,33 m de hauteur d'aspiration dans les conditions d'ambiance, il se créera un vide partiel à l'entrée de la pompe (ceci sera repris au paragraphe 14.4 du présent chapitre).

L'analyse détaillée du fonctionnement d'une pompe montre que le point de plus faible pression, ne se trouve pas forcément à l'entrée de la pompe, mais souvent dans les aubages mobiles ; cela ne sera pas développé plus avant dans le cadre de l'ouvrage.

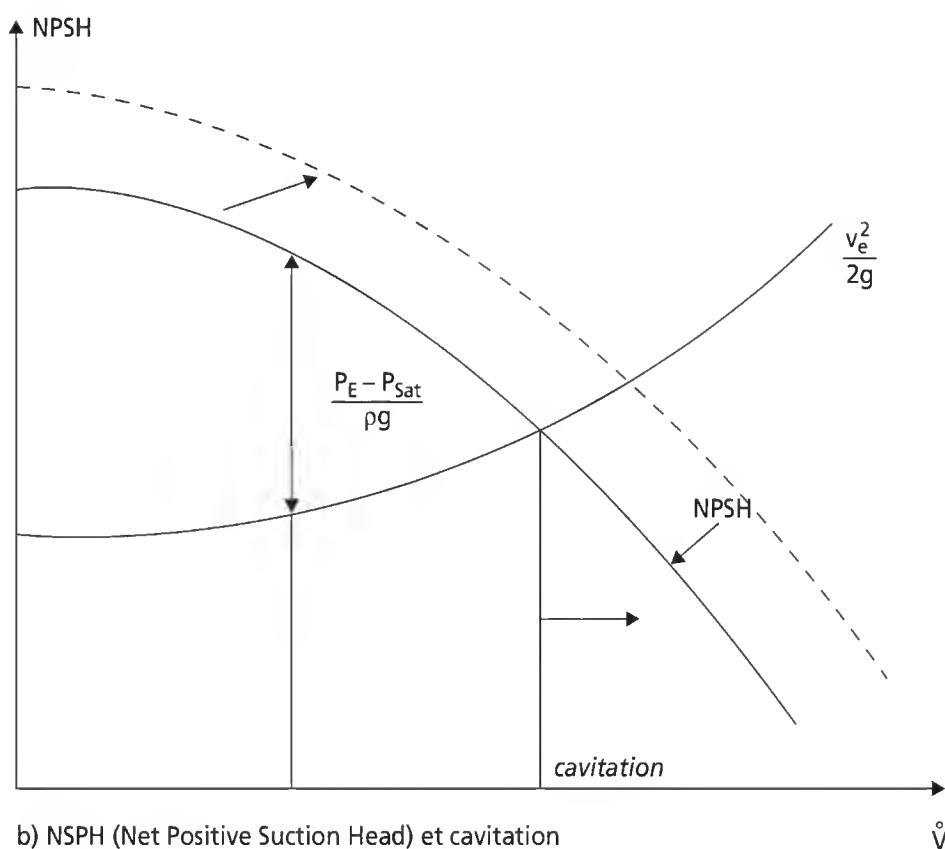
Le deuxième membre de l'équation (14.25) égal au NPSH est une caractéristique de l'installation et du fluide ( $H_a$  et  $\Delta H_a$  dépendent de  $\dot{V}$  et de l'installation ;  $p_{sat}$  dépend du liquide et de  $T$ ) : c'est le NPSH disponible de l'installation (voir figure 14.18 .b).

Pour que  $(Pe - P_{sat})$  soit positif, il faut que  $NPSH - \frac{v_e^2}{2g}$  soit supérieur à 0 ; la

courbe  $\frac{v_e^2}{2g}$  est une donnée de la pompe. La différence entre les deux courbes donne la marge de pression par rapport à la pression de cavitation.



a) hauteur d'aspiration



b) NSPH (Net Positive Suction Head) et cavitation

**Figure 14.18** Cavitation dans les pompes

Pour augmenter cette marge, il faut déplacer la courbe de NPSH vers le haut, donc abaisser la pompe par rapport au niveau liquide inférieur (translation de la courbe pleine, vers la courbe en pointillé).



### ► Pompes particulières

#### *Pompes d'extraction*

Les pompes d'extraction de l'eau condensée dans un condenseur de turbine revêtent, en ce qui concerne leur installation, un aspect particulier du fait qu'elles aspirent dans une enceinte où règne une pression absolue très faible.

Pour ces pompes, le terme  $P_{atm}$  doit être remplacé par la pression absolue qui règne dans le condenseur et qui est souvent très proche de  $P_{sat}$ .

C'est la raison pour laquelle ces pompes sont placées au niveau le plus bas d'une centrale thermique et souvent même placées dans un puits creusé dans le sol de la centrale.

Comme d'autre part toute la tuyauterie est sous dépression, il y a des risques de rentrée d'air à chaque joint et c'est la raison pour laquelle la solution moderne est l'utilisation de pompes verticales en cuve ; la tuyauterie est entièrement soudée et le moteur peut être placé à la partie supérieure à un niveau suffisamment élevé pour être au-dessus des parties parfois inondables de la centrale.

#### *Pompes à eau chaude*

Pour les pompes qui doivent fournir un débit d'eau chaude, le terme  $P_{sat}(T)$  est une fonction croissante de  $T$  ; on rappelle dans le tableau 14.1 l'évolution de  $P_{sat}$  avec la température en °C pour l'eau.

TABLEAU 14.1 Pression de saturation de l'eau pure en fonction de  $t$ .

$T$ °C	0 °C	30 °C	100 °C	160 °C	250 °C
$P$ Pa	$6,2 \cdot 10^2$	$4,3 \cdot 10^3$	$10^5$	$10,2 \cdot 10^5$	$10,5 \cdot 10^5$

Il apparaît clairement impossible d'aspirer de l'eau liquide à 100 °C, à la pression atmosphérique (sous peine d'ébullition intense).

L'aspiration des pompes à eau chaude sera donc en général toujours sous pression. C'est le cas des pompes alimentaires de chaudière souvent placées après un certain nombre de réchauffeurs d'eau. Elles aspirent dans un ballon réservoir placé à une hauteur suffisante au-dessus de la pompe (il est en général placé dans les parties hautes de la centrale) et de forme cylindrique pour résister plus facilement aux pressions élevées souvent nécessaires.

Le choix de la hauteur  $H$  nécessaire doit tenir compte de tous les cas de marche possibles, même ceux transitoires lorsque par suite des variations de charge de la centrale, la pression qui règne dans le ballon n'est pas celle qui correspond à l'équilibre à la température de l'eau qui se trouve au même moment à l'entrée de la pompe.

### c) Turbines hydrauliques

On distinguera deux grands types de turbines hydrauliques qui sont des machines effectuant la conversion d'énergie potentielle hydraulique en énergie mécanique de rotation ; le couplage à un alternateur complète la chaîne pour aboutir à la production d'énergie électrique.

#### ► Turbines à injection totale

Le rotor est alimenté pour ces machines sur toute sa périphérie (injection totale) par un distributeur à aubage fixe, mais éventuellement orientable.

Plusieurs réalisations de machines résultent de ce principe : les turbines Francis, les turbines Kaplan (les aubes mobiles peuvent être orientables).

Le nombre de tours spécifique de ces machines à réaction est supérieur à celui des turbines à action (voir ci-après).

Généralement, les machines à actions sont destinées aux forts débits, sous faible chute ; l'exemple le plus extrême est représenté par les groupes bulbes (centrale marémotrice de la Rance).

Les photos de la figure 14.19 représentent les trois principaux groupes de réalisation de turbines hydrauliques Francis, Kaplan (analysées ci-dessus), puis Pelton (analysée ci-après).

#### ► Turbines à injection partielle

Ces turbines sont appelées turbines de Pelton. Généralement à axe horizontal, elles comportent un injecteur qui produit un jet cylindrique de fluide à vitesse élevée qui impacte dans le plan moyen du rotor tangentiellement à son rayon moyen (injection tangentielle).

Le jet étant admis à l'intérieur d'un stator à pression atmosphérique, le transfert d'énergie mécanique s'effectue de façon isobare : la relation fournissant l'énergie massique de la turbine hydraulique générale.

$$e = \frac{Pe - Ps}{\rho} + \frac{v_e^2 - v_s^2}{2} + g(z_e - z_s) = gh \quad (14.26)$$

$h$ , hauteur de chute.

Se simplifie, dans le cas particulier de la turbine Pelton, sous la forme :

$$e = \frac{v_e^2}{2} + g(z_e - z_s) \quad (14.27)$$

Cette turbine est une turbine à action destinée aux fortes chutes.

### Exemple de turbine de Pelton

Une turbine de haute chute est alimentée par des jets de diamètre  $D$ . On recherche l'expression de la force transmise à l'auget  $F$  sous l'impact du jet, sachant que la vitesse des augets est la moitié de celle du jet.



Figure 14.19 Les trois principales réalisations de turbines hydrauliques

Le jet entre en turbine avec une vitesse absolue  $\vec{V}$  ; il ressort de turbine avec une vitesse voisine de zéro.

En mouvement relatif par rapport à l'auget, la vitesse d'impact est  $\frac{V}{2}$ , la turbine étant isobare, en l'absence de pertes, le théorème de Bernoulli conduit à une vitesse relative de sortie de module  $\frac{V}{2}$ , mais de sens opposé. D'où :  $\vec{F} = \rho \vec{V} (\vec{V}_e - \vec{V}_s)$ .

Cette relation qui traduit la variation du débit de quantité de mouvement en régime dynamique stationnaire peut s'écrire :

$$F = \frac{\rho \pi D^2}{4} gh$$

Si on note que :  $\vec{V} = \frac{\pi D^2}{8} V$  (mouvement relatif)

$$V^2 = 2gh \quad (\text{relation 14.27}).$$

En utilisant le modèle simplifié de la turbine de Pelton (régime dynamique stationnaire tel que le jet impacte perpendiculairement à l'auget à la distance  $R$  de l'axe de rotation, de telle sorte que la vitesse relative du fluide  $\vec{w}$  subit une déviation de  $\pi$  radian).

1. En négligeant les frottements, on va montrer que :

– le module de  $\vec{w}$  ne varie pas, avant et après impact sur le rotor ;

– le transfert d'énergie mécanique vaut :  $\dot{W} = 2\rho \dot{V} (v_e - R\vec{\omega}) \cdot R\vec{\omega}$

$\vec{\omega}$ , vitesse angulaire du rotor,

$v_e$ , vitesse absolue du jet d'eau à l'impact sur la roue

$\dot{V}$ , débit volumique en turbine.

2. La puissance du jet impactant (puissance disponible) étant :

$\dot{W}_{DE} = \rho \dot{V} \frac{v_e^2}{2}$ , on va étudier l'évolution du rendement de la turbine selon

ce modèle, en fonction de la vitesse réduite  $\frac{R\omega}{v_e}$ .

Il vient successivement :

$$Pe = Ps ; u_e = u_s = u = \omega R$$

$$\vec{w}_s = -\vec{w}_e, \text{ avec } w_e = w_s = w$$

L'application du théorème des quantités de mouvement conduit à :

$$\vec{C} = \dot{V} \rho R (\vec{v}_e - \vec{v}_s)$$

Sachant que :  $(\vec{v}_e - \vec{v}_s) = 2\vec{w}_e$ , il vient :

$$C = 2\rho \dot{V} R \omega v_e \left( 1 - \frac{R\omega}{v_e} \right)$$

On en déduit facilement la puissance de la machine  $\dot{W} = C \cdot \omega$  et le rendement global

$$\eta_g : \eta_g = \frac{\dot{W}}{\dot{W}_{DE}} = \frac{R\omega}{v_e} \left( 1 - \frac{R\omega}{v_e} \right).$$

La courbe de rendement est une parabole admettant un maximum pour :

$$\frac{R\omega}{v_e} = \frac{1}{2} (\text{MAX} \eta_g) = 1.$$

La turbine Pelton a un rotor de masse  $M$  connue et dont le rayon de giration est  $r$  ( $< R$  ; on pourra admettre  $r \approx R/2$ ).

1. On recherche l'équation d'évolution de la vitesse de rotation, sachant que  $\omega$  varie entre 0 (l'arrêt) et  $\omega_m$  la vitesse maximale ou d'emballement,

$$\omega_m = V / R.$$

2. On en déduit l'expression du temps de démarrage de la turbine pour atteindre la vitesse de régime optimale correspondant à  $MAX \eta_g$ .

Le mouvement du rotor suppose le couple résultant équilibré par la variation du moment cinétique (2<sup>e</sup> théorème fondamental de la dynamique) :

$$C = I \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$I$ , moment d'inertie du rotor,  $I = Mr^2$

Rappel de la force s'exerçant sur les augets :  $F = 2\rho \overset{o}{V}(V - u)$

En remplaçant  $V$  et  $u$  par leur valeur, on en déduit  $C$  :

$$C = 2\rho \overset{o}{V} R^2 (\omega_m - \omega)$$

D'où l'équation du mouvement :

$$\frac{d\omega}{\omega_m - \omega} = \frac{2\rho \overset{o}{V}}{M} \left( \frac{R}{r} \right)^2 dt \quad (14.28)$$

**Remarque :** cette équation ne fait pas apparaître explicitement  $h$ , la hauteur de chute, qui est cachée dans  $\omega_m$  par  $V = \sqrt{2gh}$ .

Le démarrage de la turbine se fait à partir de  $\omega = \omega_o = 0$  pour  $t = t_o = 0$ , en supposant que le débit  $\overset{o}{V}$  s'établit instantanément à sa valeur nominale  $\left( \overset{o}{V} = cte ; \forall t > t_o \right)$ .

L'intégration de (14.28) donne :

$$\frac{\omega_m - \omega}{\omega_m - \omega_o} = e^{-\frac{t-t_o}{\tau}} \quad (14.29)$$

avec  $\tau$ , constante de temps de la turbine (plus exactement du rotor).

Au régime optimal  $\omega(t) = \frac{\omega_m}{2}$  de sorte que le temps  $t_d$  de démarrage satisfait à :

$$e^{-t_d/\tau} = \frac{1}{2} \text{ soit } t_d = 0,69\tau.$$

### Conclusions

Cette étude pourrait être prolongée en améliorant le modèle (divergence du jet) et en considérant d'autres transitoires (suppression du couple résistant, fermeture des injecteurs, variation du débit en fonction du temps, loi de commande).

L'optimisation de la répartition de charges entre des turbines de tailles différentes reste un problème d'actualité (Exarhu M.).

### d) Hélices marines et aériennes

#### ► Poussée d'une hélice

Pour ces machines, la hauteur  $H$  reste très faible et le débit important. On suppose par ailleurs que le moyeu est de taille réduite par rapport au diamètre des pales. Enfin le rotor n'est pas environné : à une certaine distance amont ou aval de la roue, les pressions sont identiques et égales à celle de l'environnement.

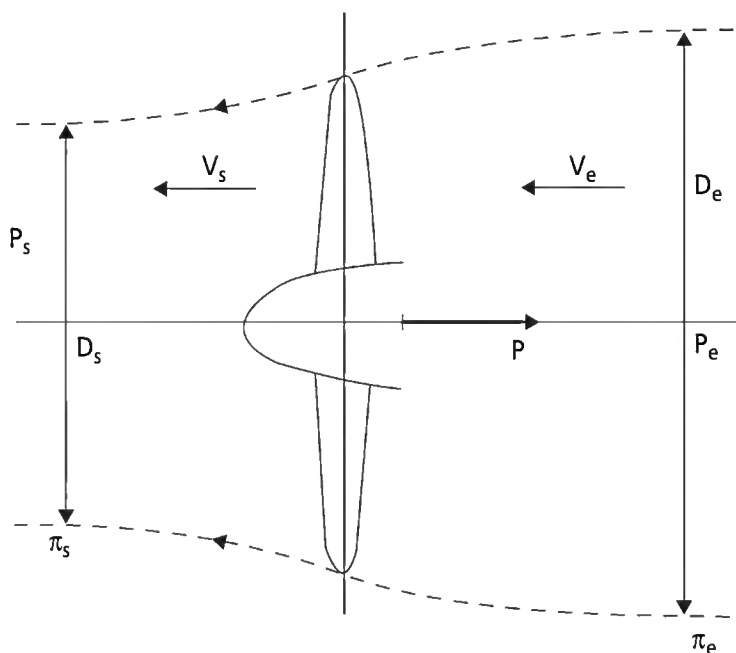


Figure 14.20 Fonctionnement des hélices.

En fonctionnement récepteur, l'hélice fournit de l'énergie au fluide, de sorte que loin de l'hélice, cette énergie est une énergie mécanique cinétique (au passage à travers l'hélice, il y a un  $\Delta P$  correspondant à une dépression amont et surpression à l'aval) :

$$v_s > v_e$$

**Remarque :** à l'aval de l'hélice, la vitesse  $v$  a une composante de vitesse transversale ; celle-ci supposée faible est négligée dans la suite du raisonnement.

La conservation du débit massique permet d'écrire pour un fluide isovolume :

$$D_e^2 v_e = D_s^2 v_s$$



Cette équation fait apparaître la contraction des veines fluides entre l'amont et l'aval ( $D_s < D_e$ ).

La poussée fournie par l'hélice  $P$  sur le mobile entraîné se calcule en appliquant le théorème des quantités de mouvement entre le plan amont  $\pi_e$  et aval  $\pi_s$  (raisonnement en norme) :

$$P = \rho \dot{V} (v_s - v_e)$$

### ► Rendements d'une hélice

#### *Puissance utile*

Si on remarque que la vitesse d'avancement du mobile vaut  $v_e$  en module, la puissance mécanique utile  $\dot{W}_u$  en résulte :

$$\dot{W}_u = \rho \dot{V} v_e (v_s - v_e)$$

#### *Puissance dépensée dans le fluide*

$$\dot{W}_D = \rho g H \dot{V}$$

$$H, \text{ la charge disponible dans le fluide vaut : } H = \frac{v_s^2 - v_e^2}{2g}$$

#### *Rendement de propulsion*

On en déduit le rendement de propulsion  $\eta_p$  :

$$\eta_p = \frac{\dot{W}_u}{\dot{W}_D} = \frac{2v_e}{v_e + 2v_s}$$

#### *Rendement propre de l'hélice $\eta_h$*

$$\eta_h = \frac{\rho g H \dot{V}}{\dot{W}_{Dh}}$$

C'est le rapport de l'énergie réellement disponible sur le fluide pour la propulsion, sur l'énergie dépensée sur l'arbre de l'hélice  $\dot{W}_{Dh}$  : cette puissance tient compte des frottements sur les pales, des pertes mécaniques, des pertes par vitesse transversale, et par tourbillons.

**Remarque 1 :** on peut en déduire un rendement global pour l'hélice ; comme pour les pompes, on pourrait construire des courbes caractéristiques (coefficient de poussée, rendement global, en fonction d'une variable réduite  $v_e/ND$ ). Les rendements d'hélice restent inférieures à 0,70.

**Remarque 2 :** forme des hélices : les hélices marines et aériennes ont des formes fondamentalement différentes (figure 14.21) ; cela est lié aux condi-

tions de fonctionnement. Une hélice marine doit être de faible diamètre (fonctionnement près de la surface libre faible tirant d'eau). À puissance imposée, cela impose une valeur de  $H$  élevée, donc une grande surface de pale. Il n'en est pas de même pour les hélices aériennes plus élancées.



Figure 14.21 Hélices marines, aériennes.

### ► Un exemple : l'éolienne

L'illustration de l'utilisation des hélices va être faite, non pas sur les récepteurs, mais sur les moteurs, compte tenu du renouveau de l'utilisation de l'énergie du vent.

On remarquera en effet qu'en France le potentiel de développement de l'énergie hydraulique reste principalement limité aux petites installations (petites chutes, petits débits), hormis les énergies hydrauliques de la mer, alors que l'énergie du vent reste sous exploitée.

### Modèle élémentaire des hélices aéromotrices

Ce modèle suppose le fluide incompressible et non visqueux (fluide parfait) avec des vitesses en tout point parallèle à l'axe de révolution de l'écoulement ; on supposera par ailleurs le raisonnement effectué sur la vitesse moyenne débitante locale (profil plat de vitesse).

Avec ces hypothèses, l'hélice en rotation est remplacée par un disque de discontinuité faisant apparaître une suite de pressions que le fluide traverse librement (figure 14.22).

Application de la conservation de l'énergie de l'écoulement (conservation de l'enthalpie : théorème de Bernoulli) : entre l'infini amont et le plan  $\pi$  de l'hélice, le fluide ralentit ( $P_{s2} > P_{s1}$  ;  $P_s$  désignant une pression statique) :

$$P_{s1} + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_{s2} + \frac{1}{2} \rho V^2 (1-a)^2 \quad (14.30)$$

Le même raisonnement entre le plan  $\pi$  et l'infini aval conduit à :

$$P_{s3} + \frac{1}{2} \rho V^2 (1-a)^2 = P_{s1} + \frac{1}{2} \rho V^2 (1-b)^2 \quad (14.31)$$

Par combinaison de (14.30) et (14.31), on obtient :

$$P_{s2} - P_{s3} = \rho V^2 b \left( 1 - \frac{b}{2} \right) \quad (14.32)$$



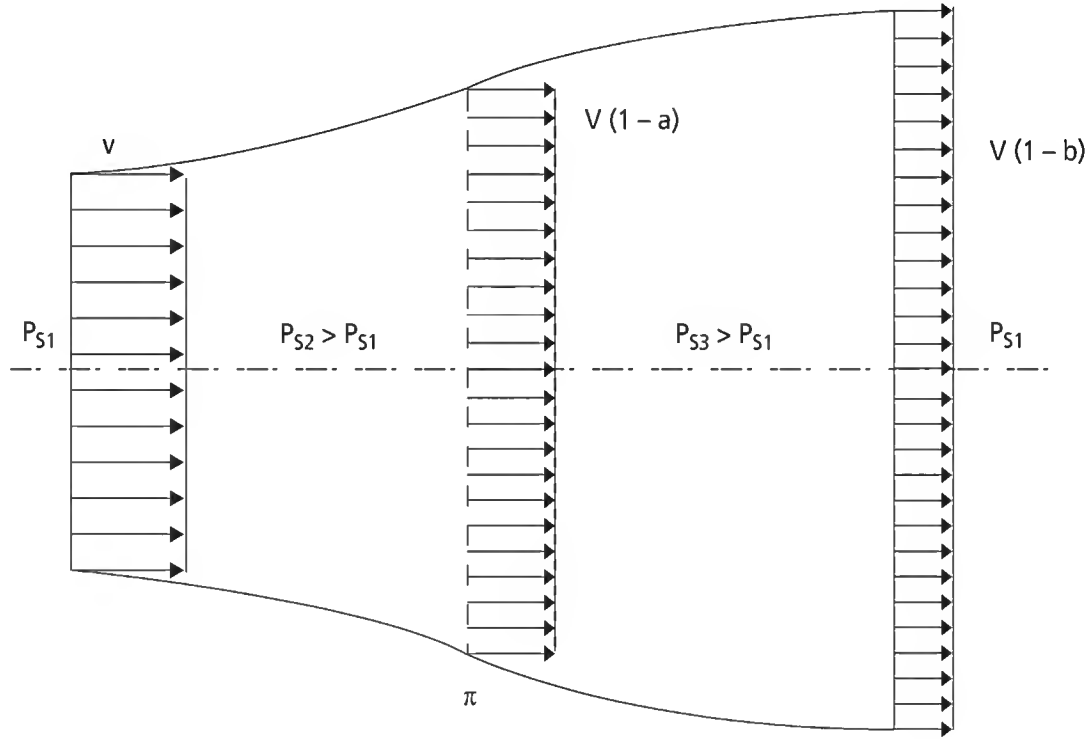


Figure 14.22 Modélisation d'écoulement à travers le rotor d'éolienne.

Application du premier théorème fondamental de la dynamique : dans le volume délimité par la surface latérale de révolution  $A_L$  de la veine fluide et les deux plans à l'infini amont et aval, la somme des forces extérieures par rapport à l'axe ( $\bar{P}$ , force appliquée par l'hélice sur l'air,  $\sum_i P_{si} A_i$ ) est équilibrée par la variation du débit de quantité de mouvement :

$$-\dot{m} Vb = \bar{P} + \sum_A P_{si} A_i \quad (14.33)$$

avec  $\dot{m}$ , débit massique à travers  $\pi$  ( $\dot{m} = \rho A V (1-a)$ ).

**Remarque :**  $\sum_A P_{si} A_i$  se limite compte tenu de la symétrie à une force axiale de pression ; la variation de quantité de mouvement du fluide à l'extérieur de la veine étant nulle,  $\sum_A P_{si} A_i$  est nulle (au signe près).

L'application du même théorème entre deux plans enfermant le disque de l'hélice et limité à son contour extrême conduit à :

$$A(P_{s2} - P_{s3}) + \bar{P} = 0 \quad (14.34)$$

La combinaison de (14.32) et (14.34) fournit :

$$\bar{P} = -\rho AV^2 b \left(1 - \frac{b}{2}\right) \quad (14.35)$$

La comparaison de (14.33) (après simplification), avec (14.35) montre alors que  $b = 2a$  : la réduction de vitesse avale est double de celle existant dans le plan de l'hélice ;

Coefficient de puissance d'une éolienne  $C_w$  :  $C_w$  est le rapport de la puissance récupérée sur le disque éolien sur la puissance récupérable ; c'est un rendement au sens du premier principe, pour un vent de vitesse donnée  $V$ . Il vient pour ce coefficient :

$$C_w = \frac{(P_{s2} - P_{s3}) AV (1-a)}{\frac{1}{2} \rho AV^3} = 4a(1-a)^2$$

Ce coefficient passe par un maximum pour  $a = \frac{1}{3}$  ; la valeur correspondante

$$MAXC_w = \frac{16}{27} = 0,593.$$

### e) État de l'art en énergie éolienne

La définition la plus courante de l'énergie éolienne est une énergie cinétique associée au mouvement de l'air atmosphérique dans un gradient de pression.

#### ► Propriétés statistiques des vents

Un vent est représenté par un vecteur  $\vec{V}(t)$  en m/sec ; il est caractérisé par un module et une direction : en un point on représente un histogramme polaire  $V(t) = |\vec{V}(t)|$  et  $\theta(t)$  ou rose des vents.

Ces deux données sont obtenues par une girouette et un moulinet.

Ces appareils permettent le contrôle-commande de la machine, mais aussi la caractérisation préalable des gisements ; les données anémométriques fournissent la fonction de distribution des vitesses :

$$P(V) = \frac{k}{C} \left(\frac{V}{C}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{V}{C}\right)^k\right]$$

$C$ , homogène à une vitesse en m/s

$k$ , facteur de forme et de distribution (déterminé par ajustement).

La fréquence cumulée des vitesses comprises entre 0 et  $V_l$  en résulte par intégration :

$$P(V \leq V_l) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{V_l}{C}\right)^k\right]$$

*Variation de la vitesse avec l'altitude*

$V_0$  désignant la vitesse au sol la loi de variation  $V$  avec l'altitude  $H$  est :

$$\frac{V}{V_0} = \left( \frac{H}{H_0} \right)^n$$

$n$  est généralement compris entre 0,10 et 0,40.

La normation des mesures effectuées à hauteur variable, se fait souvent par rapport à  $h_{ref} = 10$  m (hauteur de référence).

► *Énergies disponible, récupérable**Puissance maximale*

L'énergie cinétique du vent disponible sur un site, conduit comme on l'a vu (paragraphe 14.2.3.d) à la puissance maximale :

$$MAX \dot{W} = \frac{1}{2} \rho A V^3$$

on prendra  $\rho$ , masse volumique « nominale » de l'air, 1,225 kg/m<sup>3</sup>.

La valeur moyenne de cette puissance sur un site s'écrit :

$$\langle MAX \dot{W} \rangle = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{\infty} V^3 P(V) dV$$

On voit que cette puissance sera d'autant plus grande que  $A$  sera grand ; actuellement, les puissances sont de 5 MW pour une longueur de pale de 61,5 m (Campanaud J.). Exemple : Pour la distribution de Weibull, on trouve :

$$\langle MAX \dot{W} \rangle = \frac{1}{2} \rho A C^3 \Gamma \left( 1 + \frac{3}{k} \right) \quad \text{avec} \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{x-1} dt, \text{ fonction gamma.}$$

**Remarque :** l'énergie maximale disponible en France sur le littoral atlantique varie entre 300 et 1 500 kWh/m<sup>2</sup>.an.

*Énergie récupérable et rendement de Betz*

Comme il a été vu au paragraphe (14.2.3.d), les moteurs éoliens (moulins, éoliennes d'exhaure, aérogénérateurs) ont une efficacité mécanique (ou facteur de conversion  $C_w(V)$  inférieur à l'unité.

D'où l'énergie récupérable  $\langle \dot{W}_R \rangle$  :

$$\langle \dot{W}_R \rangle = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{\infty} C_w(V) V^3 P(V) dV$$

La puissance maximale récupérable reste donc toujours inférieure à 16/27 de la puissance traversant le rotor (limite de Betz).

Dans la pratique courante,  $\langle \dot{W}_R \rangle$  sera voisin de la moitié de  $MAX \dot{W}$  ; les meilleurs capteurs éoliens ont un rendement pratique qui tend vers 70 % du rendement de Betz.

### ► Les applications actuelles des éoliennes

Les moulins à vent sont apparus en Europe à l'époque des croisades. Depuis, de nombreuses évolutions ont eu lieu : parmi les configurations d'éoliennes les plus courantes, on notera :

- Les éoliennes multipales pour exhaure de l'eau ; elles sont à axe horizontal, de puissance variant entre 30 W et 5 kW par des vents de 7 m/s. Elles peuvent pomper 500 l/h pour un puits de 10 m de profondeur.
- Les grandes machines (très développées en Allemagne et au Danemark) ; ce sont des éoliennes tripales, les plus communes en fait. Les puissances vont de 300 kW à 5 MW, avec des vitesses de rotation lente (20 tr/min), des mâts pouvant aller jusqu'à 120 m. Les problèmes de supportage et de régulation semblent résolus. La France a abordé cette problématique avec retard par rapport aux pays pionniers (plan EOLE 2005 : 800 MW) ; l'objectif à l'échelle 2010 était de 5 000 MW. Le développement de cette filière s'effectue maintenant sous forme éolienne off-shore ; une attention particulière est à consacrer aux pieux sous-marins (la limitation en profondeur atteignable actuelle est de l'ordre de 20 m).

Le coût du kWh de cette filière (0,032 €/kWh) serait comparable en 2007 au coût du kWh nucléaire ou gaz.

Les autres machines restent confidentielles et du domaine de la recherche-développement ; on citera les rotors de type Savonius (utilisés parfois en publicité) ou mieux l'éolienne de Darrieus à axe vertical, qui peut encore progresser.

En conclusion, ces machines nécessitent de bonnes connaissances en mécanique des fluides. Elles ont connu, de façon récente, de gros progrès dans la conception. Les applications vont continuer à se développer. Mais l'énergie des vagues pourrait aussi avoir son mot à dire, à l'avenir.

## 14.3 COMPRESSION-DÉTENTE

Contrairement au paragraphe précédent, les fonctions compression et détente supposent l'influence forte de la compressibilité du fluide qui sera considéré ici sous forme gaz seule.

**Remarque :** la compression d'un mélange diphasique commence à se réaliser, malgré les difficultés techniques (exemple : compression d'une solution ammoniacque-eau en compresseur à vis, pour application dans les machines à froid ou pompe à chaleur), mais reste rare ; il n'en est pas de même pour les détentes, comme il sera revu par la suite.

### 14.3.1 Utilisations principales

Il apparaît deux types d'utilisation principaux.

### a) Compressions de gaz

La compression des gaz fait apparaître les principales applications suivantes.

Les réseaux d'air comprimé : l'air comprimé est utilisé dans pratiquement toutes les branches industrielles ; c'est un vecteur d'énergie.

La pratique courante des réseaux suppose une pression sortie du compresseur à 9 bar absolu, pour une pression utile en réseau voisine de 7 bar, une vitesse d'air de 5 à 10 m/s, et un taux de fuite de 5 à 10 %. Toute installation d'air comprimé doit être complétée de dispositifs de séchage et de déshuilage : l'air comprimé doit être propre et sec. Une installation d'air comprimé est qualifiée par son rendement d'installation  $\eta_g$ . Ce rendement global est égal au rendement de production  $\eta_{prod}$ , multiplié par le rendement de distribution  $\eta_{dis}$  et le rendement d'utilisation  $\eta_{util}$  :

$$\eta_g = \eta_{prod} \eta_{dis} \eta_{util}$$

L'ordre de grandeur de  $\eta_g$  est voisin de 0,20 : des économies sérieuses sont donc possibles.

Les composants de systèmes ou fonctions de machines : on n'insistera pas sur ce point, qui sera abondamment illustré par la suite. On rencontre de nombreuses utilisations dans les moteurs, turbines mais aussi dans les machines à cycles inverses (chapitre 15).

Des applications possibles moins courantes : MDI, constructeur automobile niçois, a présenté en 2005 une voiture à air comprimé et biocarburant (nouveau type de véhicule hybride) (*Science et Vie*).

En revanche, le stockage de gaz revêt une importance pratique considérable pour le gaz naturel : exemple, stockage de gaz naturel de Cerville en Lorraine (stockage en nappe aquifère) (Gaz de France) ; le stockage de gaz suppose à la fois la compression (préalable au stockage), puis la détente (avant utilisation).

### b) Détente des gaz

La détente des gaz a été abordée ci-dessus.

#### ► Composants de systèmes ou de fonctions de machines

On verra dans les chapitres qui suivent deux utilisations essentielles de la détente d'un gaz :

- détente motrice : celle-ci se produit dans les machines motrices tant alternatives (moteurs thermiques classiques) que dans les turbomachines (turbines à gaz) ;
- détente en machine réceptrice : celle-ci se produit alors à partir d'un liquide et a pour but par abaissement de pression, d'abaisser corrélativement la température du mélange diphasique obtenu (voir chapitre 15).

#### ► Autres applications

En fin de chapitre, sera illustrée à titre d'exemple une application particulière de la détente d'air comprimé sec, sous la forme du tube de Ranque.



**Remarque :** on ne confondra pas une détente d'un gaz, transformation thermodynamique partant d'une pression supérieure à la pression de l'environnement (pression atmosphérique), avec l'obtention d'une dépression par rapport à cette même pression : il s'agit là de la physique du vide qui sera examinée au paragraphe suivant (14.4).

### 14.3.2 Compresseurs – les grandes tendances

#### a) *Compressions volumétrique, dynamique*

On envisage dans ce paragraphe essentiellement la compression. Celle-ci donne lieu soit à compression volumétrique, soit à compression dynamique.

La compression (ou la détente dynamique) a été abordée au paragraphe 14.2.3.a. Aussi, on centrera cette fois le développement sur la compression volumétrique.

#### b) *Technique et technologies des compresseurs*

Celles-ci sont excessivement variées ; on distinguera dans les compresseurs volumétriques :

##### ➤ Les compresseurs rotatifs

Ils peuvent être à vis (monovis, bivis) ou à lobes (2 ou 3 lobes). Exemple : le surpresseur Roots à 2 lobes. Ces machines ont des rapports de compression faible, d'où le nom de surpresseur.

On rencontre également des compresseurs à spirales. Exemple : les compresseurs Scroll, compte tenu de l'importance croissante de cette machine.

Les compresseurs à palettes : la gamme de puissance de ces compresseurs est décroissante dans le sens de l'énumération. Les trois premiers types ont pu se développer assez récemment, entre autre, grâce aux nouvelles techniques d'usinage par commande numérique. Cela permet d'améliorer notablement les tolérances.

##### ➤ Les compresseurs à piston

Ces compresseurs qui ont longtemps été dominants perdent des champs d'application, mais restent néanmoins très présents dans le domaine des petites et moyennes puissances.

Ils ont des rendements globaux dans la fourchette 30-70 % et sont très utiles en froid, climatisation, conditionnement d'air.

Ils peuvent revêtir diverses formes :

- simple effet, double effet ;
- selon l'arrangement des cylindres : en ligne, à plat ou opposés, en V, en W, en angle, en H, en U, en  $\Delta$ , radial, à plateau (cette forme est utilisée dans les compresseurs frigorifiques de climatisation automobile, par exemple).

**Remarque 1 :** la compression dynamique (compresseurs centrifuges et axiaux) est réservée aux fortes puissances, tout particulièrement à cause de sa limite de pompage vers les faibles débits.

**Remarque 2 :** les nombreux arrangements des cylindres ne sont pas sans rappeler les architectures des moteurs à combustion interne.

La figure 14.23 représente une forme originale de système à double effet.

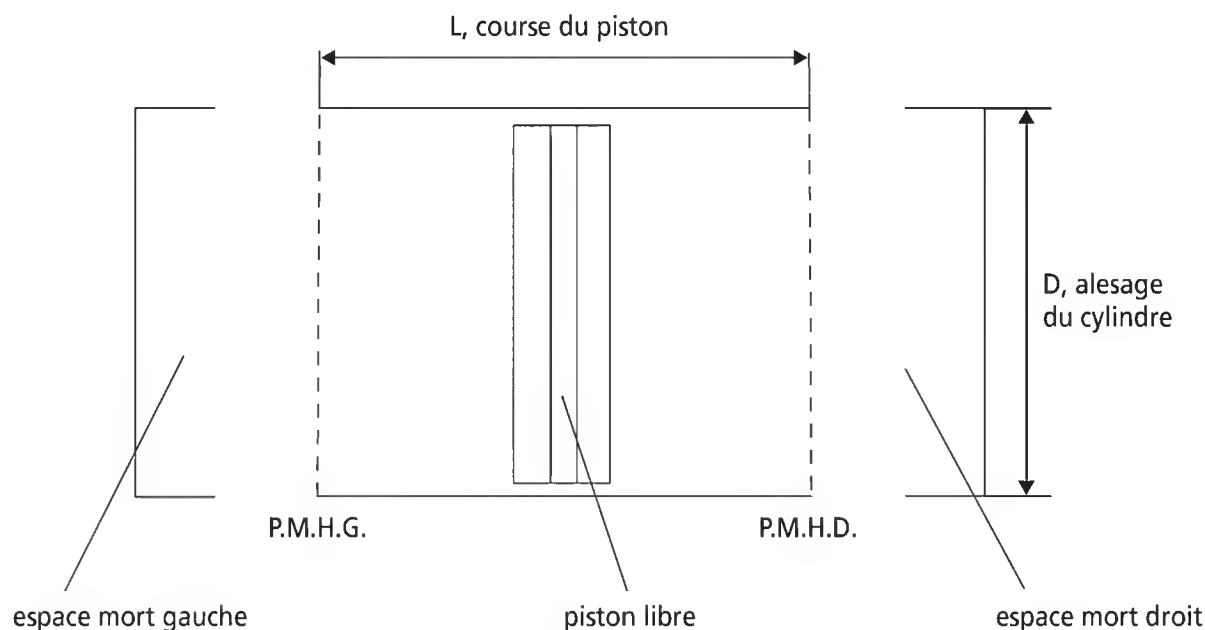


Figure 14.23 Système à double effet.

Le mécanisme bielle manivelle présenté est le plus classique pour les compresseurs à piston (et les moteurs alternatifs), mais il n'est pas le seul.

La figure 14.24 représente la cinématique de ce système de base, en faisant apparaître ce qu'il est convenu d'appeler le point mort bas (PMB), point de volume minimum  $V_m$ , par opposition au point mort haut (PMH), point de volume maximum  $V_M$ .

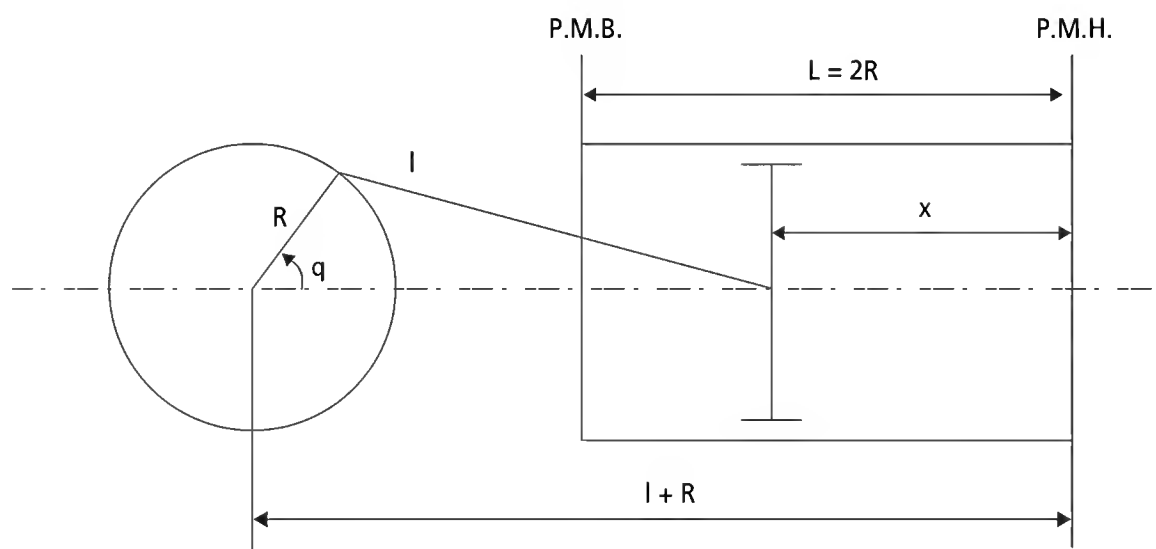


Figure 14.24 Mécanisme bielle-manivelle.

### ► Autres technologies

On ne prétend pas ici à l'exhaustivité, mais pour certaines niches d'autres formes de compresseur peuvent exister. On citera les compresseurs à membranes (utiles si l'étanchéité est nécessaire), les compresseurs secs (utiles si la pollution des circuits par l'huile est interdite).

## 14.3.3 Transformation thermodynamique et rendements

### a) Transformations thermodynamiques des compressions et détente

En utilisant les notions de thermodynamique, il est possible de représenter en diagramme de Clapeyron l'ensemble des compressions ou de détente possibles (figure 14.25).

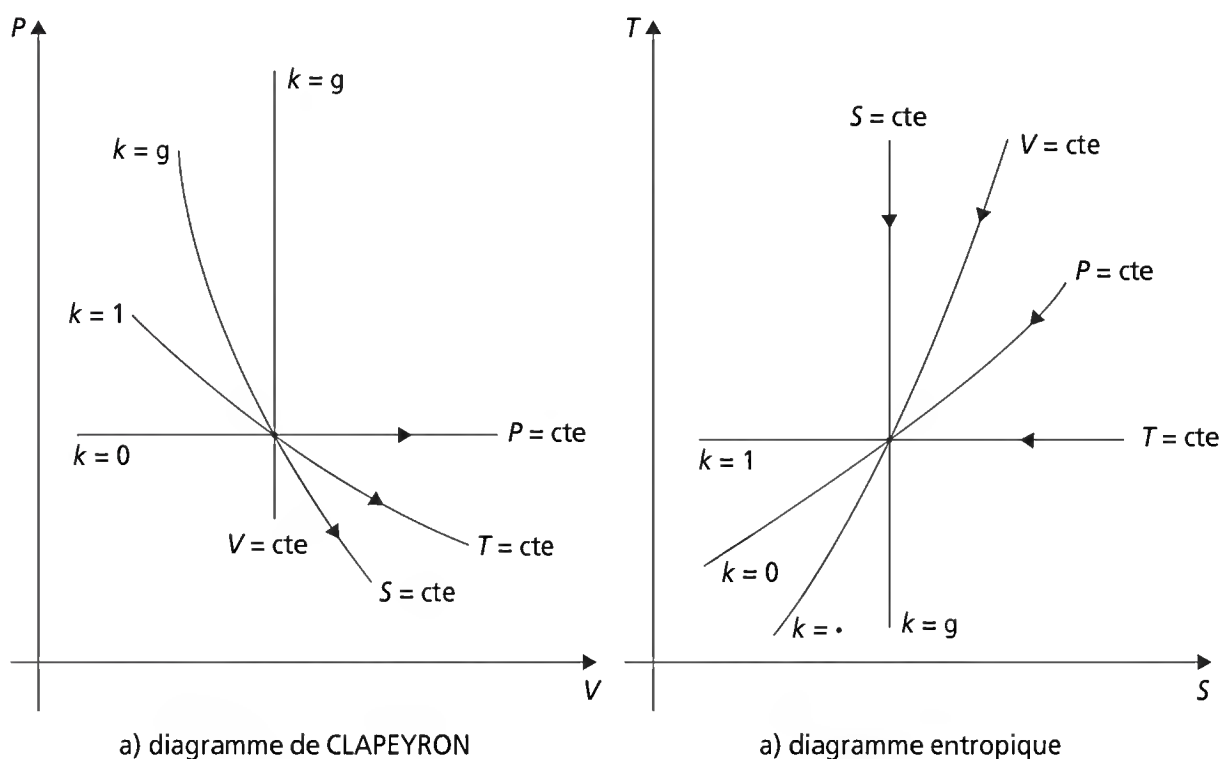


Figure 14.25 Représentation locale d'une détente de gaz.

Il apparaît successivement sur le diagramme de Clapeyron (figure 14.25.a) puis entropique (14.25.b) les transformations thermodynamiques standards :

– isobare ( $P = \text{cte}$ )

$$\Delta w_{i-f} = P(V_f - V_i) ; \Delta w_{t,i-f} = 0$$

– isotherme ( $T = \text{cte}$ )

$$\Delta w_{i-f} = mrT \ln \frac{P_f}{P_i} = \Delta w_{t,i-f}$$



– isentropique ( $S = \text{cte}$ )

$$\Delta w_{i-f} = \frac{P_i V_i - P_f V_f}{\gamma - 1} = \frac{m r T_i}{\gamma - 1} \left[ \left( \frac{P_f}{P_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] ; \Delta w_{t,i-f} = \gamma \Delta w_{i-f}$$

– isochore ( $V = \text{cte}$ )

$$\Delta w_{i-f} = 0 \text{ (volume indéformable)} ; \Delta w_{t,i-f} = V(P_f - P_i)$$

Ces résultats sont donnés pour le cas du gaz parfait ;  $\Delta w_{i-f}$  représente le travail interne de la transformation (détente) dans la convention de l'ingénieur (ou anglo-saxonne) ;  $\Delta w_{t,i-f}$  est le travail technique utile (ou indiqué) pour cette même transformation ; toutes ces transformations sont représentées par une transformation polytropique particulière de coefficient  $k$  (voir figure 14.25).

#### ► Détente de Joule-Thomson

Aux détentes standard, il y a lieu d'adjoindre, vu son importance pratique (chapitre 15 entre autre) la détente par laminage adiabatique. Cette détente, dite de Joule-Thomson, s'effectue sans échange de chaleur (adiabatique), ni de travail avec l'extérieur (indéformabilité des frontières de l'écoulement : parois). La conversion d'enthalpie en énergie cinétique à travers une restriction (ou réciproquement), puis éventuellement dissipation d'énergie cinétique, restituant l'enthalpie à travers l'échauffement du fluide.

**Remarque :** il est impossible d'abaisser la température d'un gaz parfait par détente isenthalpique (heureusement les gaz réels ont un comportement très différent ; le lecteur peut regarder ce qu'il en est pour un gaz de Van der Waals).

#### ► Cas des compressions

Dans le cas des compressions, le lecteur transposera aisément les représentations de la figure (14.25). En pratique, pour les gaz, les deux transformations limites pour la compression d'une masse de gaz (système fermé) sont fournies par :

- La compression isentropique (adiabatique réversible) : la transformation réelle associée irréversible par nature sera uniquement adiabatique ; la réalité physique des machines matérielles veut qu'elles ne sont pas isolées thermiquement de l'extérieur, et donc l'adiabacité n'est pas garantie. On cherche même dans les compresseurs à se rapprocher de la compression isotherme.
- La compression isotherme : cette compression est moins coûteuse en travail mécanique, comme le montre les expressions indiquées ci-avant ; mais la compression isotherme représente le cas limite de ce qu'il est possible de faire techniquement.

Dans la pratique, et selon les cas, on se contente de compression étagée, avec refroidissement inter-étage (Feidt M.).

### b) Différents rendements de compresseurs

#### ► Notion de rendement volumétrique

Cette définition est spécifique des machines volumétriques, elle s'appuie sur le volume de gaz déplacé  $V_d$ .

#### Volume déplacé

Pour une machine à  $n$  cylindres en simple effet, il vient :

$$V_d = \frac{\pi D^2}{4} L n$$

$D$ , alésage des cylindres ;  $L$ , course des pistons.

Pour une machine à un cylindre, double effet et piston libre, il y correspond

$$V_d = \frac{\pi}{2} D^2 L.$$

**Remarque :** pour la même machine, mais avec une cinématique faisant intervenir une tige de piston de diamètre  $d$ , on aurait :

$$V_d = \frac{\pi}{4} (2D^2 - d^2) L$$

#### Rendement volumétrique

En fait, on définit un rendement matière de compresseur (seule quantité conservative)  $\eta_m$  :

$$\eta_m = \frac{\dot{m}}{V_d \cdot \rho_a \cdot N} = \frac{\dot{m}}{\dot{V}_d \cdot \rho_a} \quad (14.36)$$

$\dot{m}$ , débit massique de fluide cyclé.

Le dénominateur étant le débit massique théorique cyclé, dans les conditions d'aspiration  $(\rho_a(T_a, P_a))$ .

Le rendement matière se confond avec le rendement volumétrique lorsque le débit masse cyclé est considéré dans les conditions d'aspiration :

$$\eta_v = \frac{\dot{V}(T_a, P_a)}{\dot{V}_d} \quad (14.37)$$

**Remarque 1 :** il faut faire attention au fait que,  $\dot{m}$  le débit massique de fluide cyclé diffère du débit massique engendré ou total du fait du débit de fuite (il en est de même dans les turbomachines).

**Remarque 2 :** pour les machines volumétriques, le rendement volumétrique est lié à la géométrie de la machine par le volume mort  $V_m$  ; on introduit alors un volume mort relatif, appelé taux d'espace mort :

$$\varepsilon = \frac{V_m}{V_d} \quad (14.38)$$

### Rendement mécanique d'un compresseur

En régime dynamique stationnaire, la puissance mécanique dépensée  $\dot{W}_m$  est supérieure à la puissance indiquée  $\dot{W}_i$  effectivement reçue par le gaz (diagramme de Watt), du fait des dissipations par frottements  $\dot{W}_f$  ( $\dot{W}_m = \dot{W}_i + \dot{W}_f$ ).

On définit le rendement mécanique comme  $\eta_m$  :

$$\eta_m = \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}_m} \quad (14.39)$$

### Autres rendements au sens du premier principe

Sur site ou sur machine, on accède le plus souvent uniquement aux caractéristiques d'entrée et de sortie de celle-ci. Le rendement est alors exprimé pour la compression (indépendamment de la matière) comme le rapport du  $\Delta h_{rev}$ , réversible, sur le  $\Delta h_{réel}$ .

On notera toutefois conformément à 14.33 qu'il faut préciser la transformation de référence, soit isentropique :

$$\text{rendement isentropique } \eta_s = \frac{\Delta_{his}}{\Delta_{hréel}} \quad (14.40)$$

soit isotherme réversible :

$$\text{rendement isotherme } \eta_T = \frac{\Delta_{hT}}{\Delta_{hréel}} \quad (14.41)$$

**Remarque :** il serait aussi possible d'introduire des rendements au sens du second principe (rendements exergetiques) ; le lecteur intéressé se référera à (Lallemand A.).

### 14.3.4 Compresseurs alternatifs

Les compresseurs alternatifs volumétriques sont des machines à deux temps (détente-aspiration, compression-refoulement).

### a) Bilan général en régime dynamique stationnaire

Malgré ce fonctionnement discontinu à l'échelle d'un cycle, pour des vitesses de rotation élevées (en moyenne 1 500 t/min), il est possible de faire un bilan moyenné (à la dispersion de cycle près) pour la machine ; en supposant la variation d'énergie gravifique négligeable il vient :

$$\dot{m} \left( h_r + \frac{V_r^2}{2} - h_a - \frac{V_a^2}{2} \right) = \dot{W}_t + \dot{q} \quad (14.42)$$

Si les variations de vitesse entre l'aspiration  $a$  et le refoulement  $r$  sont négligeables, et la machine adiabatique ( $\dot{q} = 0$ ) (14.42) se simplifie en :

$$\dot{m}(h_r - h_a) = \dot{W}_t \quad (14.43)$$

$\dot{W}_t$ , travail technique (ou de compression avec transvasement).

On notera que  $\dot{W}_m = \dot{W}_t + \dot{W}_{fs}$

Le travail mécanique dépensé  $\dot{W}_m$  inclut les pertes par frottement solide :

$$\dot{W}_t = \dot{W}_i + \dot{W}_{ff}$$

avec  $\dot{W}_{ff}$ , puissance mécanique dissipée par frottements fluides.

Si  $\dot{W}_{ff} = 0$ , (14.43) devient :

$$\dot{m}(h_r - h_a) = \dot{W}_i \quad (14.44)$$

### b) Étude du cycle du compresseur alternatif

La figure 14.26 représente en diagramme de Clapeyron le cycle d'un compresseur alternatif.

#### ► Cycle idéal sans espace mort

Ce cycle est représenté par la succession des points (0, 1, 2, 5, 0) ; il fait successivement apparaître l'admission du gaz dans la chambre du cylindre (0-1) ; la compression du gaz (1-2) ; l'évacuation (refoulement) du gaz à haute pression  $P_H$  ; la phase d'égalisation de pression (5-0) est une transformation fictive conduisant au cycle fermé équivalent au système ouvert qu'est le compresseur.

L'expression du travail technique en résulte pour le cycle :

$$\Delta W_t = \oint V dP = \int_1^2 V dP = P_2 V_2 - P_1 V_1 - \int_1^2 P dV \quad (14.45)$$


$$\Delta W_i = mrT_1 \frac{k}{k-1} \left[ \left( R_c \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

**Remarque 2 :** optimisation de la compression en présence de refroidissement intermédiaire, l'optimisation porte sur la minimisation du travail de compression. Celle-ci intervient lorsque  $R_c > 5-6$ . Le cas le plus usuel est celui nécessitant deux étages de compression ; en supposant un refroidissement intermédiaire restituant la température d'aspiration, il vient pour la pression intermédiaire optimale  $P_I = \sqrt{P_H P_B}$ .

Conformément à la figure (14.26), l'expression (14.45) devient dans ce cas :

$$\Delta W_t = \int_1^2 V dP + \int_3^4 V dP = m_{12} \int_1^2 v dP - m_{34} \int_4^3 v dP$$

On voit ici l'influence néfaste du gaz de l'espace mort, qui au cours des cycles est comprimé et détendu sans cyclage (masse  $m_{34}$ ) ; on remarquera que, aux fuites près  $m_{12} = m + m_{34}$ .

On va traduire cela dans l'expression du rendement volumétrique.

*Influence du volume mort ( $\varepsilon$ ) et du taux de compression  $R_c$  sur  $\eta_v$*

Avec l'hypothèse d'une aspiration (refoulement) isotherme, il vient pour  $\eta_v$  :

$$\eta_v = \frac{V_1 - V_4}{V_1 - V_3} \quad (14.46)$$

Sachant que  $\varepsilon = \frac{V_m}{V_M - V_m}$ , (14.46) devient :

$$\eta_v = 1 + \varepsilon \left( 1 - \frac{V_4}{V_m} \right)$$

En supposant la polytropique de détente de coefficient  $k_d$ , on a  $\left( \frac{V_4}{V_m} \right) = \left( \frac{P_H}{P_B} \right)^{1/k_d}$ ,

$$\text{soit } \eta_v = 1 - \varepsilon \left[ (R_c)^{1/k_d} - 1 \right] \quad (14.47)$$

L'ordre de grandeur des rendements volumétriques standard est compris entre 0,85 et 0,95 ; le rendement global d'un compresseur  $\eta_g$  est nécessairement plus faible ( $0,65 < \eta_g < 0,85$ ).

**Remarque 1 :** pour calculer la température d'aspiration (non isotherme), il faut utiliser l'équation de mélange.

**Remarque 2 :** si on corrige des conditions d'aspiration (référence, les conditions atmosphériques :  $va(T_a, P_a)$ ),  $v_1$  désignant les conditions d'aspiration

(point 1), le rendement volumétrique devient :  $\eta_v = \left\{ 1 - \varepsilon \left[ (R_c)^{1/k_d} - 1 \right] \right\} \frac{va}{v_1}$ .

Une simplification courante consiste par ailleurs à supposer le coefficient polytropique de détente identique à celui de compression ( $k_d = k_c = k$ ).

### c) Machines à taux de compression fixe

Les machines sans clapets (dite à taux de compression fixe) ont un refoulement actif si  $P \geq P_r$  (exemple des compresseurs rotatifs) ; leur maintenance s'en trouve allégée, ainsi que leur fiabilité.

En introduisant  $R = \frac{V_1}{V_2}$ , rapport des volumes en entrée et sortie de compression, il

vient :  $\frac{P_2}{P_1} = R^k$ .

À  $P_1$  et  $k$  donné il en résulte que si  $P_r$  est imposé ( $R_c = P_r / P_1$ ) :

$$\Delta W_i = \Delta W_t = - \int_1^2 P dV + P_r V_2 - P_1 V_1$$

Soit :  $\Delta W_t = \frac{P_1 V_1}{k-1} \left[ R^{k-1} + \frac{R_c}{R} (k-1) - k \right]$

On voit qu'il existe un minimum pour  $\Delta W_t$ , en fonction de  $R$  ; il est obtenu pour

$R_c = R^{*k}$  et vaut  $\min \Delta W_t = \frac{k}{k-1} P_1 V_1 \left[ R_c^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$ .

**Remarque :** pour une machine à taux de compression variable, il y a adaptation aux conditions de fonctionnement, mais les clapets introduisent des difficultés de fonctionnement supplémentaires.

#### d) Débit matière à travers des clapets

On considère ici les clapets par analogie avec une tuyère convergente. La figure 14.27 représente la description du clapet dans le cas de l'aspiration  $a$ , dans le cylindre  $c$  ; la même description vaut pour le refoulement  $r$  à partir du cylindre.

On notera toutefois que la section de passage  $A_p$ , tant à l'aspiration qu'au refoulement est variable en fonction de la levée du disque ou de la lamelle ; on adopte ainsi une aire moyenne fonction de la dynamique du clapet, à travers un coefficient de débit  $C_d$ .

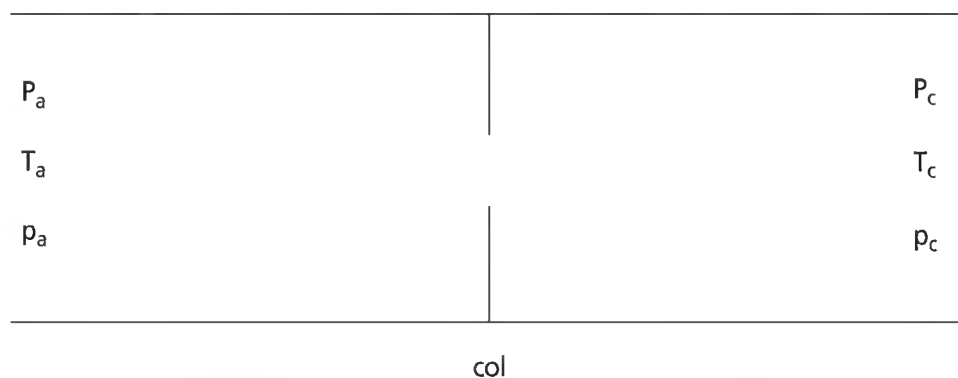


Figure 14.27 Description analogique d'un clapet.

On a ainsi les expressions des débits matière à l'aspiration dans le cylindre  $\dot{m}_{ac}$ , et au refoulement du cylindre  $\dot{m}_{cr}$  sous la forme :

$$\dot{m}_{ac} = C_{da} A_{pac} P_a \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)RT_a}} \sqrt{\left(\frac{P_c}{P_a}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{P_c}{P_a}\right)^{(\gamma+1)/\gamma}}$$

$$\dot{m}_{cr} = C_{dr} A_{pcr} P_c \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)RT_c}} \sqrt{\left(\frac{P_r}{P_c}\right)^{2/\gamma} - \left(\frac{P_r}{P_c}\right)^{(\gamma+1)/\gamma}}$$

Au niveau d'un avant-projet, on peut adopter pour  $C_{da}$  et  $C_{dr}$ , la valeur  $C_d = 0,85$ , coefficient de débit unique.

Le même modèle pourra aussi servir pour la représentation de l'admission et du refoulement au travers des soupapes de moteurs à combustion interne (chapitre 16).

**Remarque :** Si l'écoulement devient subsonique,  $P_{aval}/P_{amont} > P_{critique}/P_{amont}$ ,

avec  $\frac{P_{critique}}{P_{amont}} = \frac{2}{\gamma+1}$  (écoulement sonique ;  $Ma = 1$ ).

### 14.3.5 Compresseurs centrifuges et axiaux

#### a) Quelques rappels et compléments

Ces machines nécessitent la maîtrise de la mécanique des fluides pour caractériser les écoulements et de la thermodynamique pour caractériser la machine (performance).

Dans ce qui suit, on suppose le régime dynamique stationnaire pour les transferts de matière et adiabaticité de la machine.

Le rotor par les aubages effectue le travail de compression, alors que le diffuseur assure la conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle.

Le bilan du premier principe (en convention thermodynamique) s'écrit alors :

$$h_e + \frac{v_e^2}{2} + w = h_s + \frac{v_s^2}{2}.$$

$w$ , travail mécanique spécifique, positif pour un compresseur (négatif pour une turbine).

On peut alors introduire les propriétés de stagnation (correspondant à la pression dynamique, et à la dynalpie), telles que :

$$h_{es} + w = h_{ss} \quad (14.48)$$

#### b) Compresseur centrifuge

L'utilisation du théorème d'Euler a permis de montrer (paragraphe 14.2.2.a) :

$$w_c = (u_s \cdot V_{ts} - u_e \cdot V_{te}) \quad (14.49)$$



$w_c$ , travail spécifique de compression.

En négligeant le terme d'entrée (généralement axial) devant le terme de sortie, et en introduisant le facteur de glissement  $F$  entre le gaz et la roue :

$$F = \frac{V_t}{u} \quad (14.50)$$

Il vient par combinaison de (14.48), (14.49), (14.50) :

$$w_c = Fu^2 = h_{ss} - h_{es} = Cp(T_{ss} - T_{es})$$

On en déduit :  $\frac{T_{ss}}{T_{es}} = \frac{Fu^2}{CpT_{es}} + 1$

La connaissance du rendement isentropique de compression  $\eta_s = \frac{h_{ssrev} - h_{es}}{h_{ss} - h_{es}}$  fournit la température de la compression isentropique correspondante :

$$\frac{T_{ssrev}}{T_{es}} = \eta_s \frac{Fu^2}{CpT_{es}} + 1$$

Le taux de compression de la machine en résulte, conformément à la relation de Laplace :

$$\frac{P_{ss}}{P_{es}} = \left[ \eta_s \frac{Fu^2}{CpT_{es}} + 1 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

### c) Compresseurs axiaux

Dans ces machines, l'augmentation de pression est due à l'action des aubages ; la surpression est créée par déviation de l'écoulement sur les ailettes du rotor, alors que sur les aubes du stator le fluide est redirigé pour avoir une vitesse relative quasi-tangentielle à l'ailette du rotor qui suit.

## 14.4 PHYSIQUE DU VIDE

### 14.4.1 Importance et difficulté de la physique du vide

Le vide est produit et utilisé dans de nombreux domaines industriels, dont les domaines chimique et agroalimentaire (dépôts sous vide, conservation sous vide). De façon plus prosaïque, les machines à froid standard nécessitent un tirage au vide avant remplissage avec le fluide frigorigène ; les condenseurs de centrale thermique utilisent de basses températures associées à une pression inférieure à la pression atmosphérique.

La lyophilisation ou cryodessiccation est aussi une technique qui nécessite une phase de mise en vide conformément au cycle représenté sur la figure (14.28) (Vrinat G.).

Enfin, la physique du vide est très présente dans les laboratoires et c'est une nécessité vitale dans les grands accélérateurs de particules, mais aussi dans le projet

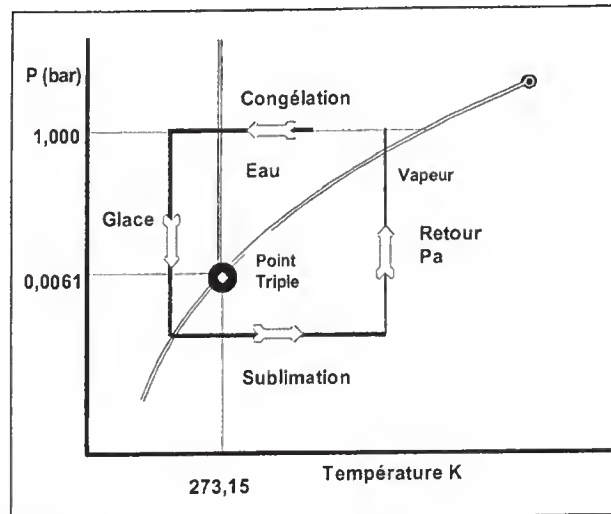


Figure 14.28 Cycle de lyophilisation d'un produit.

ITER dont on sait qu'il représente peut-être l'énergie du futur (énergie de fusion nucléaire).

Le but de ce paragraphe est donc de donner, sans entrer dans les détails de la physique statistique (physique des gaz raréfiés), une vision aussi pratique que possible des moyens de production et de mesure du vide.

#### 14.4.2 Calcul de conductance (régime dynamique stationnaire)

##### a) Écoulement à travers un orifice en mince paroi

Le problème peut-être traité pour un écoulement à haute pression. On débouche alors sur l'application relative à la mesure des débits de fluide à l'aide d'un diaphragme. L'écoulement est alors de type turbulent ou laminaire. Moyennant l'hypothèse que la détente est isentropique, on peut établir une expression du débit théorique, à corriger dans la pratique par l'intervention de plusieurs coefficients (voir normes).

Ici, nous allons rechercher les caractéristiques d'un écoulement moléculaire. Cet écoulement est caractérisé par le fait que les chocs des molécules entre elles sont négligeables par rapport aux chocs des molécules contre les parois (le libre parcours moyen des molécules > aux dimensions de l'enceinte) :

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} N' \pi \sigma^2} \quad \lambda_{air,m} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{P_{torr}}$$

Pour faire les calculs, recherchons d'abord le nombre de chocs par unité de surface et de temps sur une paroi.

Les molécules qui frapperont la surface unitaire centrée en 0 pendant l'unité de temps proviennent, pour une direction  $(\theta, \varphi)$  donnée et un module de vitesse  $v$  donné, du cylindre incliné représenté sur la figure 14.29. Ce cylindre renferme  $N' v \cos \theta$  molécules.

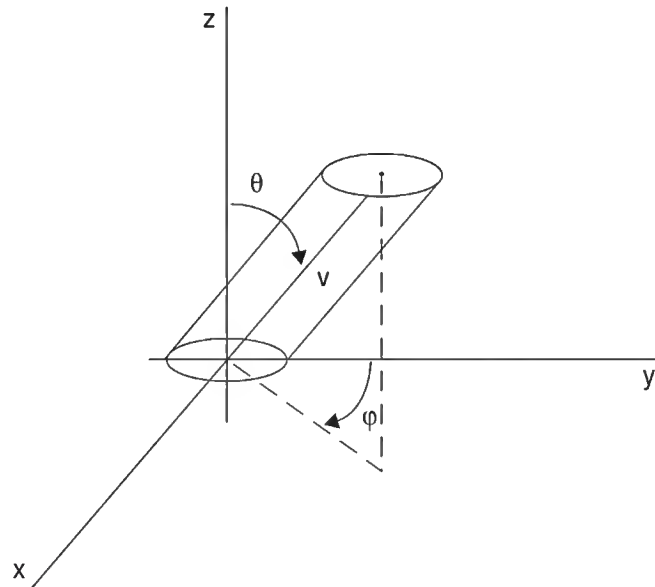


Figure 14.29 Chocs de particules sur une paroi

Parmi toutes ces molécules, on en distingue :

$$N' v \cos \theta \cdot \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2}} \cdot 4\pi v^2 dv$$

ayant leurs vitesses comprises entre  $v$  et  $v + dv$  et parmi celles-ci seule la fraction  $\frac{d\omega}{4\pi} = \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}$  a son vecteur vitesse situé dans l'angle solide élémentaire autour de la direction  $(\theta, \varphi)$ .

Soit le nombre d'impacts dus aux molécules caractérisées par  $(v, \theta, \varphi)$  :

$$d\mu(v, \theta, \varphi) = N' v \cos \theta \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2}} \cdot 4\pi v^2 dv \cdot \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi}$$

On en déduit le nombre de chocs par unité de surface et de temps :

$$\mu = \int d\mu(v, \theta, \varphi) = N' \int_0^\infty 4\pi v^3 \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2}} dv \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cdot \sin \theta d\theta$$

$$\mu = \frac{N' \bar{v}}{4}$$

#### ► Application à l'orifice en mince paroi

Rappelons d'abord diverses définitions du débit gazeux :

$D_m$  débit massique (connu) ;

$\dot{N}$  débit moléculaire : nombre de molécules traversant une section par unité de temps ;

$\dot{V}$  débit volumique : volume de gaz traversant une section par unité de temps, le volume étant mesuré à la pression s'exerçant sur la section.

En technique du vide, on utilise plutôt le débit défini comme suit :  $q = P \cdot \dot{V}$ . Ce débit correspond au flux gazeux. Ce débit est un débit volumique ramené à une pression de référence, souvent le torr, d'où l'unité correspondante : le torr.litre/seconde.

L'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire une seconde expression pour  $q$  :  
 $q = kT \dot{N}$ .

On remarque alors que  $q$  est conservatif en régime dynamique stationnaire à température constante.

Des définitions ci-dessus, on déduit, si  $P_1$  et  $P_2$  représentent les pressions de part et d'autre du trou, le débit de gaz à travers sa surface  $S$  :

$$\begin{aligned} q &= S(\mu_1 - \mu_2) \cdot kT = \frac{S\bar{v}}{4}(n_1 - n_2)kT \\ &= \frac{S\bar{v}}{4}(P_1 - P_2) \end{aligned}$$

L'analogie possible entre un circuit électrique et une installation de vide (pression  $\Leftrightarrow$  potentiel, débit  $\Leftrightarrow$  intensité) amène alors à définir deux grandeurs caractéristiques du circuit de vide.

– L'impédance de la canalisation ou de l'obstacle :

$$Z = \frac{P_1 - P_2}{q}$$

( $P_1$  = pression à l'extrémité amont,  $P_2$  à l'extrémité aval).

– La conductance d'une canalisation :

$$C = \frac{1}{Z} = \frac{q}{P_1 - P_2}$$

Une conductance s'exprime donc en l/s par exemple, mais n'est pas un débit volumique. Cette caractéristique est la plus courante.

Il existe des lois d'associations des impédances ou des conductances, en série ou en parallèle. On les obtient aisément par analogie.

Montage série

$$\begin{aligned} Z &= \sum_i Z_i \\ \frac{1}{C} &= \sum_i \frac{1}{C_i} \end{aligned}$$

Montage parallèle

$$\frac{1}{Z} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$$

$$C = \sum_i C_i$$

La conductance et l'impédance de l'orifice en mince paroi se déduit des résultats ci-dessus :

$$C = \frac{1}{Z} = \frac{q}{P_1 - P_2} = \frac{S \bar{v}}{4} = S \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

numériquement  $C_{1/s} = 11,65 \text{ cm}^2$  pour de l'air à 20 °C.

### b) Conductance d'une canalisation rectiligne à section circulaire

#### ► Divers régimes d'écoulement

Considérons l'écoulement d'un gaz dans un tuyau à section circulaire. Cet écoulement en tout début de pompage peut-être de type turbulent. Il est alors caractérisé par le nombre de Reynolds correspondant :

$$\text{Re} = \frac{D \cdot v \cdot \rho}{\mu}$$

Ensuite, l'écoulement du gaz lorsque la pression diminue suit successivement les lois de l'écoulement en régime visqueux ou laminaire, puis de l'écoulement en régime moléculaire ou de Knudsen déjà mentionné au paragraphe précédent. La transition entre ces deux régimes se fait généralement de façon étalée, par ce qu'on appelle le régime intermédiaire.

Pour de l'air à 20 °C, le régime est visqueux pour une canalisation cylindrique si le diamètre  $D$  est supérieur à  $100 \lambda$ . Il est moléculaire si  $\lambda > D$ . Entre ces deux valeurs, le régime est intermédiaire.

#### ► Écoulement en régime visqueux

Considérons un tube élémentaire de longueur  $dl$  soumis à un gradient de pression  $\frac{dP}{dl}$  ;  $P$  est supposé indépendante de  $r$ .

En régime dynamique stationnaire, le cylindre de rayon  $r$  est en équilibre sous l'action de deux forces : une force  $\vec{F}_p$  de module  $\pi r^2 dP$  dirigée selon l'axe force motrice due au gradient de pression, une force  $\vec{F}_f$  due au frottement visqueux sur la surface latérale du cylindre.

Par intégration, avec l'hypothèse que la vitesse d'écoulement est nulle sur la paroi, on a vu que le profil des vitesses dans la canalisation vaut :

$$v(r) = \frac{R^2 - r^2}{4\mu} \cdot \frac{dp}{dl}$$

On en déduit facilement le débit en volume sous la pression moyenne  $\bar{P} = P + \frac{dP}{2}$ .

$$\overset{o}{V} = \int_0^R v \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{dP}{dl} \cdot R^4$$

de même que le flux gazeux  $q$  correspondant sous  $\bar{P}$

$$q = \bar{P} \cdot \overset{o}{V} = \frac{\pi \cdot \bar{P}}{8\mu} \cdot \frac{dP}{dl} \cdot R^4$$

D'où la conductance correspondante en régime visqueux :

$$C = \frac{q}{dP} = \frac{\pi \cdot \bar{P}}{8\mu} \cdot \frac{R^4}{dl}$$

### ► Écoulement en régime moléculaire

Dans ce cas, la force motrice s'exerce sur la section totale  $A$  du tube, tandis que la force résultante, conformément à l'hypothèse de Knudsen, est égale à la quantité de mouvement cédée à la paroi lors des chocs par unité de temps.

$v$  désignant la vitesse d'entraînement du gaz, nous supposons que lors d'un choc, une molécule cède la quantité de mouvement  $mv$  à la paroi.

Dans ce cas, la quantité de mouvement cédée est égale au nombre de chocs que reçoit la paroi par unité de temps  $v$  multipliée par  $mv$ .

À l'équilibre dynamique, on a donc :

$$\pi \cdot R^2 \cdot dP = 2\pi R dl \mu m v$$

D'où la vitesse d'entraînement du gaz  $v$  indépendante de  $r$  :

$$v = \frac{R}{2} \frac{dP}{dl} \cdot \frac{1}{\mu m} \text{ avec } \mu = \frac{1}{4} N' \cdot \bar{V}$$

Le débit volumique  $\overset{o}{V} = \pi R^2 v = \frac{\pi R^3}{2} \frac{dP}{dl} \cdot \frac{1}{\mu m}$

Le flux gazeux  $q = \bar{V} \cdot \bar{P} = \frac{\pi R^3}{2} \cdot \frac{dP}{dl} \cdot \frac{\bar{P}}{\mu m}$ .

L'expression de la conductance correspondante en régime moléculaire en résulte :

$$C = \frac{\pi R^3}{2 \cdot dl} \cdot \frac{\bar{P}}{\mu m} \text{ ou en explicitant } \frac{\pi R^3}{2 dl} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

**Remarques :** les deux expressions des conductances déterminées supposent négligeables les effets de bout (tubes longs). D'autre part, en régime moléculaire, nous avons supposé que lors d'un choc la paroi absorbe intégralement la quantité de mouvement de la molécule. En fait, l'hypothèse de Knudsen veut que les molécules soient ré-émises dans une direction quelconque selon la loi du cosinus.

Bien que non conforme à l'hypothèse du choc élastique utilisé en théorie cinétique des gaz, l'hypothèse de Knudsen est confirmée par l'expérience.

Les calculs que l'on peut faire dans ce cadre conduisent alors à la valeur  $C$  suivante :

$$C = \frac{4}{3} \frac{R^3}{dl} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}$$

Dans le cas de l'air à 20 °C, ces relations deviennent :

$$\text{– en régime visqueux : } C = 182 \frac{D^4}{L} \bar{P}$$

$$\text{– en régime moléculaire : } C = 12,1 \frac{D^3}{L}$$

$C$  est exprimé en l/s, si  $D$  le diamètre est donné en cm, de même que  $L$  longueur du tube.  $\bar{P}$  est exprimé en torr ou en mmHg.

Pour les canalisations de formes quelconques ou courtes interviennent généralement des facteurs correctifs, que l'on trouve dans les livres spécialisés.

### 14.4.3 Pompage d'une enceinte (régime transitoire)

#### a) Vitesse de pompage

La vitesse de pompage  $S$  d'une pompe dont l'orifice d'aspiration est à la pression  $P$  et le volume de gaz aspiré par unité de temps est mesuré à la pression  $P$ .

$$S = V' = \frac{q}{P}$$

exprimé couramment en l/s ou m<sup>3</sup>/h.

La vitesse de pompage n'a pas d'équivalent électrique.

#### b) Vitesse de pompage d'un ensemble pompe-canalisation (régime dynamique stationnaire)

Pour obtenir le vide dans une enceinte, on relie celle-ci généralement à une pompe par l'intermédiaire d'une canalisation d'impédance  $Z$ . Il en résulte une vitesse de pompage  $S$  au niveau de l'enceinte différente de celle  $S_p$  de la pompe.

On sait que le débit  $q$  est conservatif en régime dynamique stationnaire et à  $T$  constant ; il en résulte que :

$$q = S.P = S_p.P_p$$

$P_p$  étant la pression d'aspiration de la pompe

$P$  étant la pression au niveau de l'enceinte

$$\text{Comme par définition } Z = \frac{P - P_p}{q}$$

$$\text{On en déduit } \frac{1}{S} = Z + \frac{1}{S_p} = \frac{1}{C} + \frac{1}{S_p}$$



**Exemple :** canalisation de conductance à déterminer sachant que : coude de conductance 30 l/s, ensemble 12 l/s, canalisation 1 200 l/s, pompe de vitesse  $S_p$  1 000 l/s, vitesse de pompage au niveau de l'enceinte 546 l/s.

Cette expression permet de choisir la pompe à utiliser pour évacuer une enceinte où  $Z$  et  $C$  désignent les impédance et conductance équivalentes à la liaison entre pompe et enceinte.

Toutefois elle suppose le débit conservatif, donc le régime dynamique stationnaire et l'absence de sources de gaz entre les deux sections étudiées. Les sources peuvent être de deux types correspondant soit à une fuite localisée, soit à une fuite répartie (dégazage).

Le régime dynamique stationnaire d'une installation correspond au pompage lorsqu'on a atteint la pression limite  $P_l$  dans l'enceinte.

Cette pression limite caractérise l'ensemble enceinte-canalisation-pompe. Elle peut être due à des fuites virtuelles (fuite réglable).

c) *Pompage d'une enceinte à travers une conductance cte, la vitesse de la pompe étant constante, pour une pression limite  $P_l$*

Le vidage d'une enceinte de la pression atmosphérique  $P_a$  jusqu'à la pression limite  $P_l$  est caractérisée par le régime transitoire.

Le groupe de pompage utilisé est caractérisé par sa vitesse de pompage  $S_p$  à la pression d'aspiration  $P_p$ . Si l'enceinte renferme un mélange de gaz pour lesquels les caractéristiques de pompage sont différentes, il faut raisonner sur les pressions partielles (pièges à vapeur condensable).

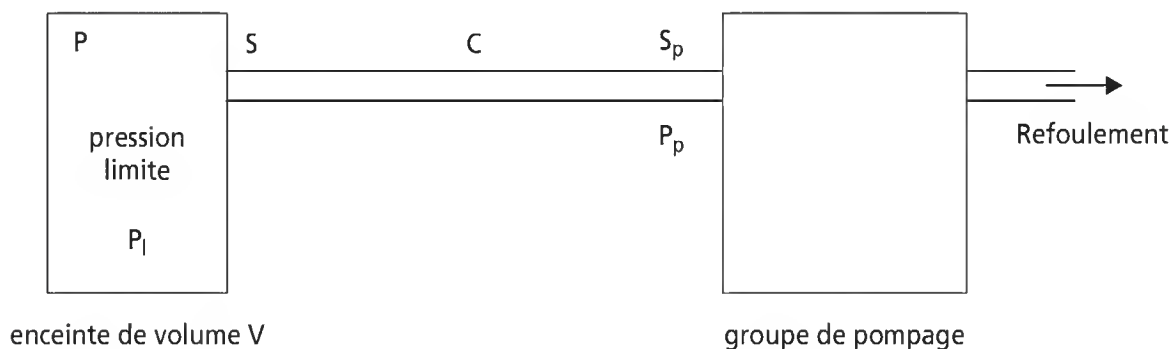


Figure 14.30 Pompage d'une enceinte

La canalisation a une conductance  $C$ .  $S$  représente la vitesse de pompage au niveau de l'enceinte et  $P$  la pression dans l'enceinte.

➤ **Vitesse de pompage  $S$  au niveau de l'enceinte**

En régime dynamique stationnaire, on a :

$$q = SP = S_p P_p = C(P - P_p)$$

$$\text{d'où } \frac{1}{S} = \frac{1}{C} + \frac{1}{S_p}$$



Dans l'hypothèse où le régime transitoire est essentiellement moléculaire,  $C$  est une constante. Comme  $Sp$  est une constante  $\Rightarrow S = \frac{SpC}{Sp + C}$ .

► Pression en fonction du temps

Si d'autre part, on suppose que la pression limite  $P_l$  est due à un apport de gaz  $q_l$  tel qu'il peut être considéré comme constant en fonction de  $P$  ou  $t$  :

$$q_l = SP_l$$

En régime transitoire, la quantité réelle de gaz évacuée est donc :

$$q = Sp - q_l = S(P - P_l)$$

$$\text{de plus } q = -\frac{d}{dt}(PV) = -V \frac{dP}{dt} = \text{cte}$$

$$\text{d'où } S(P - P_l) = -V \frac{dP}{dt}$$

$$\text{Par intégration } P = (P_a - P_l)e^{-\frac{S}{V}t} + P_l$$

$$\text{Ou } t = \frac{V}{S} \ln \frac{P_a - P_l}{P - P_l}$$

Cette dernière relation caractérise le temps nécessaire pour atteindre la pression finale.

En remplaçant  $S$  par sa valeur :

$$P = (P_a - P_l)e^{\frac{-SpC}{(Sp + C)V}t} + P_l$$

$$t = \frac{V(Sp + C)}{SpC} \ln \frac{P_a - P_l}{P - P_l}$$

**Remarques :** cette relation se simplifie dans un certain nombre de cas particuliers importants (conductance infinie, pression limite négligeable).

La connaissance de la fonction  $P(t)$  permet de rechercher la vitesse de pompage  $S$  au niveau de l'enceinte.

$S$  a été considéré comme constant (vitesse théorique de pompage). En fait, la mesure de  $P$  donne, connaissant  $q$ , une vitesse de pompage apparente  $S'$  telle que :

$$S' = \frac{q}{p} = \frac{Sp - q_l}{P} = S \left( 1 - \frac{P_l}{P} \right)$$

Cette relation rend compte de la forme réelle des courbes de vitesse pour les pressions voisines de  $P_l$ .

**Exemple :** temps de pompage d'une enceinte de 5 m<sup>3</sup> depuis  $P_a$  jusque  $P_l = 10^{-1}$  torr (pompage primaire). La pompe à palette a une vitesse de 120 m<sup>3</sup>/h :  $t = 22$  min. En 4 min, on veut passer de  $P_a$  à  $P_l = 1$  torr dans une enceinte de 500 l. Vitesse de pompage  $S_p$  de la pompe 60 m<sup>3</sup>/h.

Si enfin on ne fait pas l'hypothèse que  $S_p$  est constant (c'est une fonction de  $P_p$ ),  $S$  est alors fonction de  $P_p$  par  $S_p$ . On divise alors la caractéristique de pompage en divers domaines sur lesquels  $S_p$  peut être considéré comme égal à une valeur moyenne constante. On est donc ramené au problème précédent.

Il est souvent commode de résoudre les problèmes précédents à partir d'abaques.

#### 14.4.4 Phénomène de dégazage

##### a) Définitions

Le phénomène de dégazage se traduit dans une enceinte donnée par la ré-émission de molécules gazeuses fixées sur la paroi.

Le dégazage dépend de la nature des surfaces et de l'atmosphère en contact avec celle-ci préalablement au vidage.

Le dégazage, proportionnel à la surface de l'enceinte, est fonction de la température. Cela justifie les précautions prises en technique du vide et la pratique de l'étuvage.

On caractérise le dégazage par le dégazage spécifique ou flux dégagé par unité de surface correspondante (unité courante Le torr.litre/s.cm<sup>2</sup>).

$$q'_d = \frac{q_d}{S}$$

##### b) Influence du dégazage sur les régimes dynamique stationnaire et transitoire (dégazage localisé)

L'enceinte est caractérisée par un flux de dégazage  $q_d$  (évoluant lentement dans le temps).

La quantité de gaz pompé au niveau de l'enceinte est de la forme  $q = S \left( 1 - \frac{P_l}{P} \right) \cdot P$  comme on l'a vu précédemment.

Ou encore  $q = -V \frac{dP}{dt} + q_d$

En posant  $\frac{q_d}{S} = P'_l$

On en déduit comme précédemment :

$$P = (P_a - P_l - P'_l) e^{-\frac{St}{V}} + (P_l + P'_l)$$

et

$$t = \frac{V}{S} \ln \frac{P_a - P_l - P'_l}{P - P_l - P'_l}$$

$P'_1$  représente la pression limite due au dégazage seul, lorsque la vitesse de pompage au niveau de l'enceinte est  $S$ .

La pression limite réelle de l'enceinte est donc comprise en fonction du temps entre  $P$  et  $P_1 + P'_1$ . Mais cette fois  $t$  prend une valeur très supérieure non fournie par l'expression ci-dessus.

Le comportement d'une enceinte où se produit un dégazage réparti est très différent du problème précédent.

### 14.4.5 Pompes et groupes de pompage

#### a) Caractéristiques de débit et de flux gazeux des pompes

On donne ci-après la forme générale des courbes de débit volumétrique (courbe 1) et de flux gazeux (courbe 2) pour les types de pompes les plus courants en fonction de la pression à l'aspiration de ces pompes (figure 14.31).

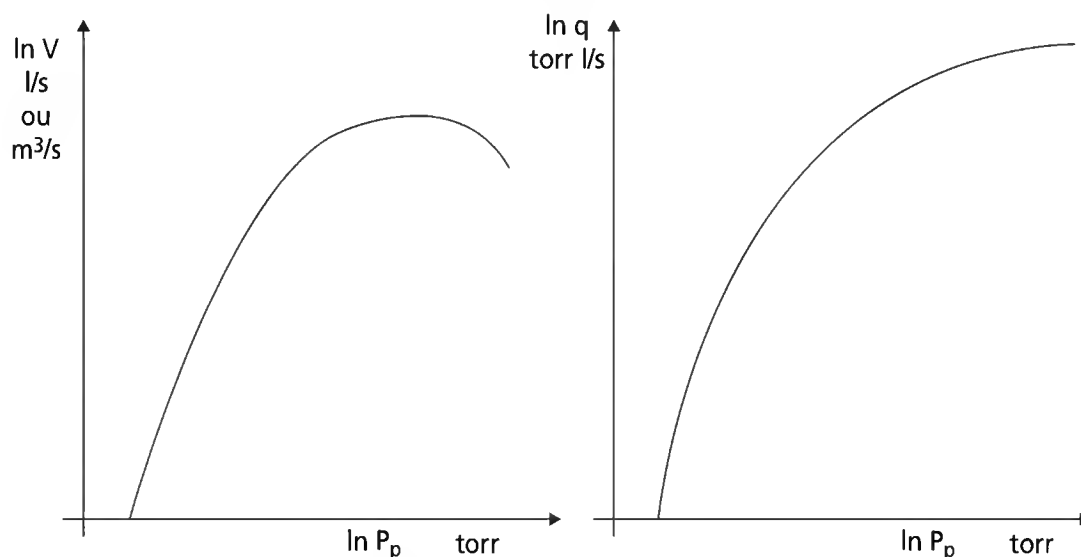


Figure 14.31 Caractéristiques des pompes

Aux basses pressions la forme de la courbe 1 est bien conforme à une expression analytique de type

$$S' = S \left( 1 - \frac{Pl}{P} \right)$$

que nous avons justifiée par ailleurs.

La courbe correspondant au flux gazeux a une pente unité dans le domaine de pression pour lequel le débit volumétrique est constant.

Aux hautes pressions toutefois les phénomènes diffèrent sensiblement.

Pour les pompes primaires, le plus souvent des pompes à palettes, la courbe de débit volumétrique tend vers une valeur limite constante à haute pression. Ce type de pompe s'amorce à la pression atmosphérique et possède un ou plusieurs étages en fonction du vide limite désiré (figure 14.32).

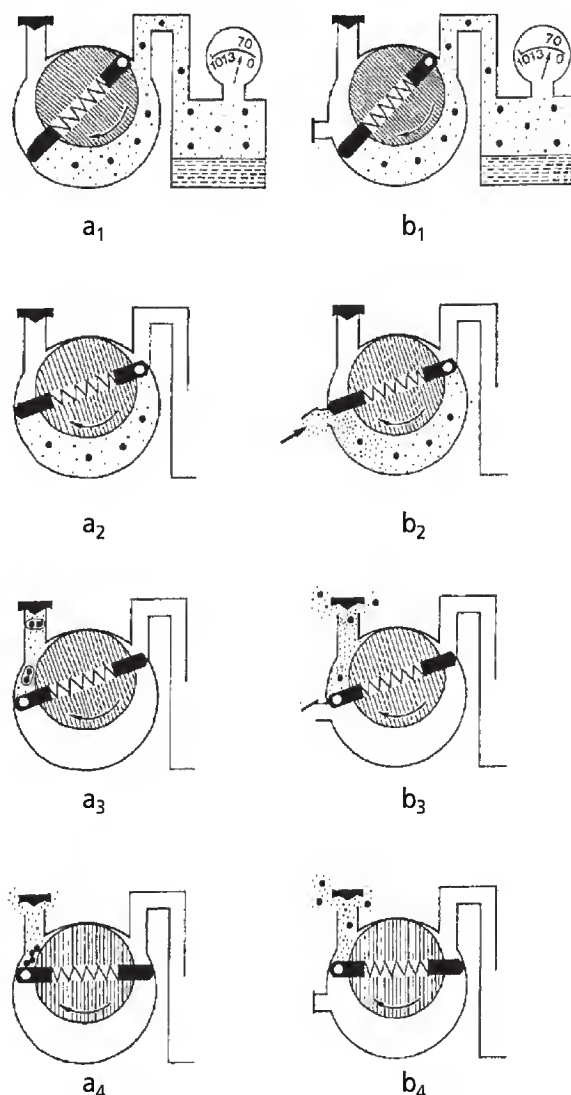


Illustration du processus de pompage dans une pompe rotative à palettes pour le pompage de vapeurs condensables sans (à gauche) et avec (à droite) dispositif de lest d'air.

• = particules de vapeur

#### Sans lest d'air

- a<sub>1</sub>) La pompe est raccordée au récipient déjà presque vide d'air (env. 70 mbar). Elle doit donc évacuer presque uniquement des particules de vapeur. Elle travaille sans lest d'air.
- a<sub>2</sub>) La chambre est isolée de l'enceinte à vide. La compression commence.
- a<sub>3</sub>) Le contenu de la chambre est déjà suffisamment comprimé pour que la vapeur se condense en gouttelettes. La surpression n'est pas encore atteinte.
- a<sub>4</sub>) Maintenant seulement l'air restant produit la surpression nécessaire, et ouvre la soupape de refoulement. Mais la vapeur est déjà condensée et les gouttelettes restent dans la pompe.

#### Avec lest d'air

- b<sub>1</sub>) La pompe est raccordée au récipient déjà presque vide d'air (env. 70 mbar). Elle doit donc évacuer presque uniquement des particules de vapeur. Elle travaille avec dispositif de lest d'air.
- b<sub>2</sub>) La chambre est isolée de l'enceinte à vide. Alors s'ouvre la vanne à lest d'air à travers laquelle une addition d'air extérieur – le « lest d'air » est envoyé dans la chambre de pompe.
- b<sub>3</sub>) La pression s'exerce sous la soupape de refoulement ; particules de vapeurs et de gaz sont expulsées. La surpression nécessaire a été atteinte très tôt grâce au lest d'air additionnel. Une condensation n'a donc pas pu se produire.
- b<sub>4</sub>) La pompe évacue le reste des vapeurs et du gaz.

Figure 14.32 Avec l'aimable autorisation de Leybold.

Les pompes Roots ont des caractéristiques conformes aux courbes 1 et 2 de la figure 14.31, hormis le fait que, comme pour les pompes à palettes, la courbe de flux gazeux reste une droite à  $45^\circ$  même à haute pression.

Remarquons toutefois que les pompes Roots ne fonctionnent généralement pas à partir de l'atmosphère, mais nécessitent un prévidage de l'ordre d'une dizaine de Torr (voir figure 14.33).

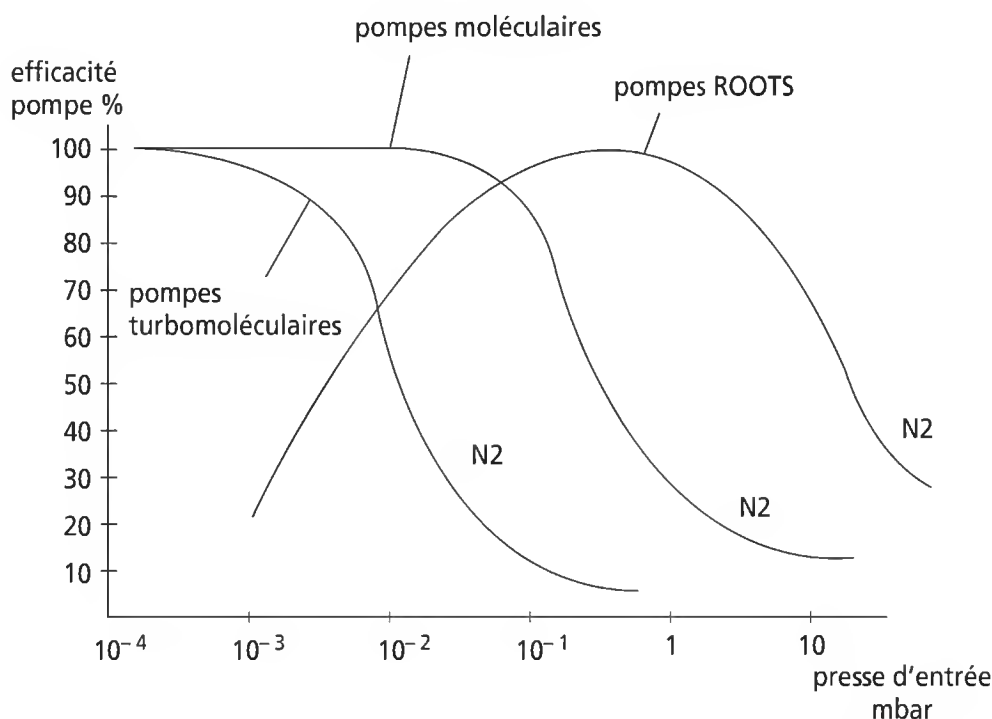


Figure 14.33 Comparaison de l'efficacité de diverses pompes.

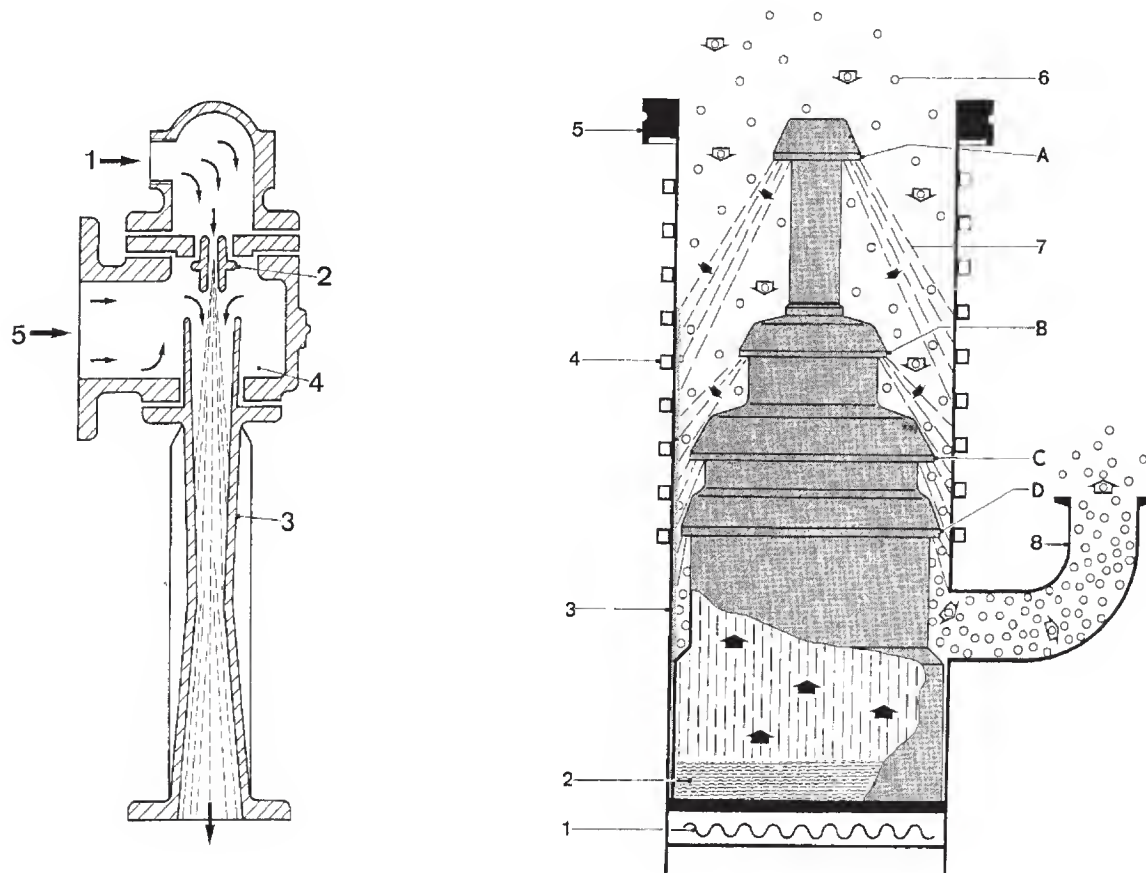
### b) Autres types de pompes

Les techniques de l'ultravide utilisent des pompes de type très différents. Signalons plus particulièrement les pompes ioniques principalement à champ magnétique, les pompes getters, et enfin les pompes cryogéniques. La figure 14.34 présente deux pompes à fluide : un éjecteur à vapeur, une pompe à diffusion. Le tableau 14.2 synthétise les domaines d'usage des pompes.

### c) Constitution d'un groupe de pompage

La réalisation d'un groupe de pompage nécessite souvent la mise en série de plusieurs pompes de types différents. Le choix de ces pompes se fait en vérifiant surtout deux conditions : les diverses pompes choisies permettent de satisfaire au critère d'amorçage, ces mêmes pompes mises en série peuvent évacuer le même flux gazeux.

Il faut ensuite tenir compte des conductances de liaison qui influent principalement sur les pressions limites obtenues, et enfin du temps de descente en vide fonc-



Représentation schématique du mode de fonctionnement d'un éjecteur à vapeur.

1. Introduction de la vapeur d'eau
2. Buse motrice
3. Buse dynamique
4. Chambre de mélange
5. Raccord au récipient

Mode de fonctionnement d'une pompe à diffusion.

- |                                 |                      |
|---------------------------------|----------------------|
| 1. Chauffage                    | 6. Particules de gaz |
| 2. Chambre d'ébullition         | 7. Jet de vapeur     |
| 3. Corps de pompe               | 8. Tubulure de vide  |
| 4. Serpentin de refroidissement | primaire             |
| 5. Bride à vide poussé          | A-D : Buses          |

Figure 14.34 Deux pompes à fluide avec l'aimable autorisation de Leybold.

tion principalement du volume et de la surface de l'enceinte à vider comme on l'a vu précédemment.

Les pompes à diffusion de même nécessitent une pression au refoulement inférieur ou égal à une pression seuil appelée pression d'amorçage. Cette pression est généralement de l'ordre de  $10^{-1}$  Torr.

L'expérience montre d'ailleurs que les caractéristiques des pompes à diffusion ne sont pas fonction de la pression du refoulement, pourvu que celle-ci reste inférieure à la pression d'amorçage.

Les fluides utilisés dans ces pompes sont principalement des huiles très stables de faible tension de vapeur.

Ils sont aussi utilisés dans les pompes à éjecteurs qui exigent aussi une pression de refoulement inférieure à une pression d'amorçage de l'ordre du Torr.

Il existe bien sûr de nombreuses variantes à ces principaux types de pompes. Pour cela nous renvoyons le lecteur aux traités spécialisés. Mentionnons toutefois encore les pompes moléculaires qui présentent parfois des avantages (rapidité de mise en œuvre comme les pompes Roots en particulier). Alcatel est un spécialiste du domaine (voir site [www.alcatel.com](http://www.alcatel.com) et catalogue).

#### d) Mesure d'une vitesse de pompage

Il existe deux modes de détermination d'une vitesse de pompage : méthode à volume constant, méthode à pression constante.

##### ► Méthode à volume constant

L'étude des régimes transitoires permet d'écrire (voir 14.4.3.c) :

$$S = \frac{V}{t_2 - t_1} \ln \frac{P_1 - P_l}{P_2 - P_l}$$

à l'instant initial  $t = t_1$  ;  $P = P_1$

à l'instant  $t = t_2$  ;  $P = P_2$

Cette méthode suppose que  $S$  est indépendant de  $P$ , dans le domaine de pression utilisé. Aux basses pressions la méthode est entachée d'erreurs à cause des phénomènes de dégazage. D'autre part, elle nécessite que la pression varie suffisamment lentement de façon à pouvoir négliger les constantes de temps des appareils de mesure.

##### ► Méthode à pression constante

Cette méthode consiste à régler au préalable une fuite de façon à obtenir une pression donnée  $P_o$  au niveau de la section de mesure. Cette pression  $P_o$  stationnaire correspond à un flux de fuite  $q_o = P_o \cdot S$  équilibré par le pompage.

On isole ensuite l'enceinte de volume  $V$  à évacuer en notant la remontée de pression en fonction du temps.

On a :

$$(P - P_o)V = q_o \cdot t$$

Soit :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{q_o}{V} = \frac{P_o \cdot S}{V} \text{ d'où } S.$$

Cette méthode nécessite toutefois des précautions quant à l'introduction du gaz par la fuite réglable, et à la position du capteur de mesure de pression.

Elle est cependant couramment employée dès que la pression est inférieure à environ  $10^{-1}$  Torr.

#### 14.4.6 Mesure des basses pressions

L'unité de mesure de pression couramment employée en technique du vide est le millimètre de mercure ou Torr. C'est celle que nous utilisons.



Notons toutefois que la lecture que nous effectuerons prendra en général une signification différente selon la nature du gaz. Cette remarque est à l'origine de deux types de jauges bien distinctes : les jauges de pression totale, les jauges de pression partielle.

Ce dernier type est représenté par les spectromètres de masse dont il existe plusieurs types. Il permet de faire une analyse fine des divers constituants d'une atmosphère raréfiée donnée ou de suivre son évolution.

Nous allons limiter le présent paragraphe aux méthodes de mesures de pression totale classiques.

#### a) Manomètre à mercure (mesure absolue de pression)

Il existe sous deux formes. La forme la plus simple consiste en un tube en U et constitue alors ce qu'on appelle un manomètre différentiel.

Il est souvent utilisé comme indicateur grossier de vide primaire.

La seconde forme plus perfectionnée est la jauge de MacLeod dont il existe plusieurs variantes. La forme la plus courante est représentée sur la figure (14.35a).

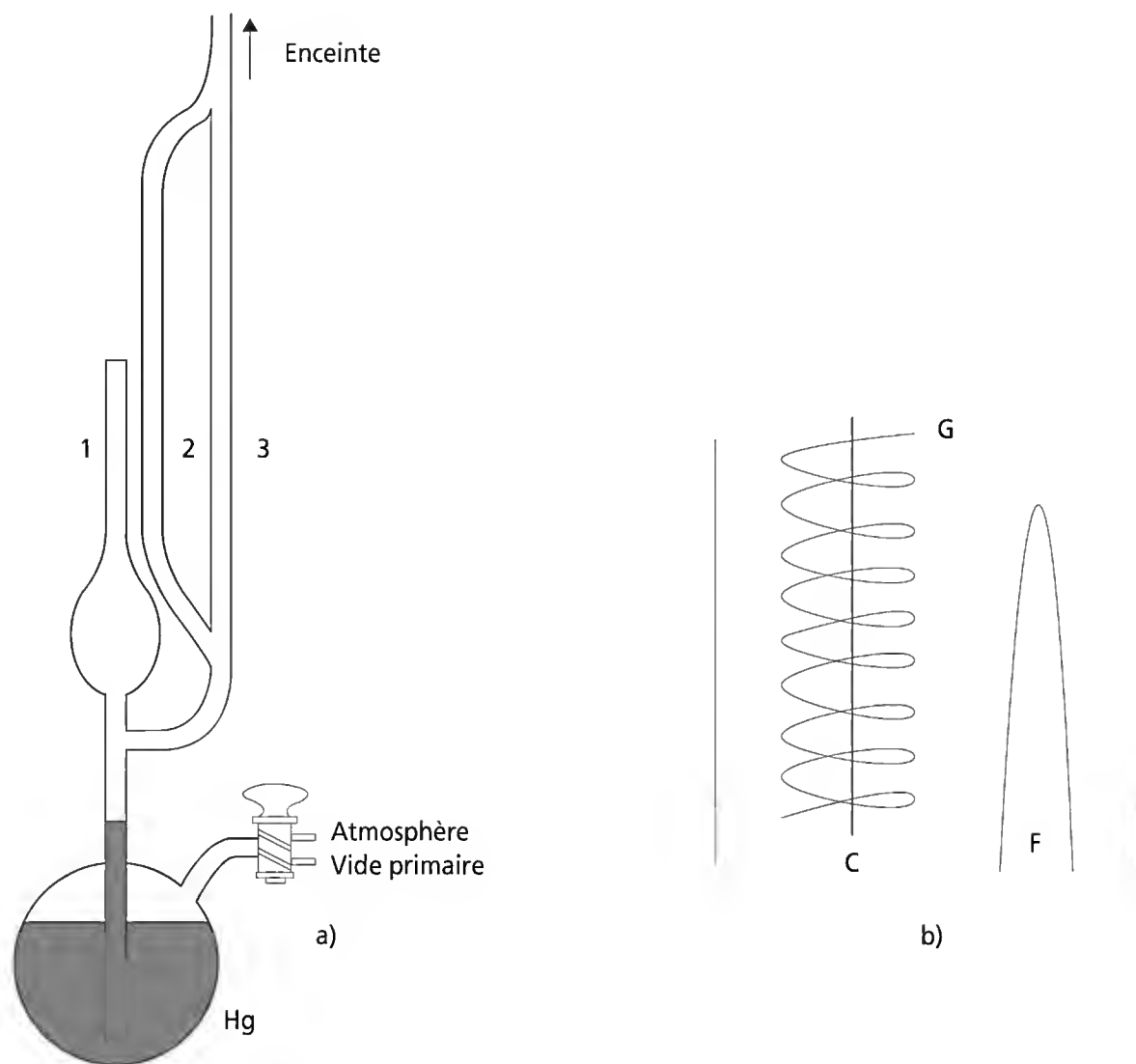


Figure 14.35 Mesure de basse pression.



Cette jauge permet d'enfermer un volume comme  $V$  de gaz, à la pression à mesurer  $P$ . On peut ensuite comprimer ce volume  $V$  de gaz jusqu'à un volume  $v$  mesurable dans le capillaire  $l$ , où il se trouve alors à la pression  $p + h$  ;  $h$  désigne la différence entre les niveaux du mercure dans 1 et 2 (ou 3) sachant que 2 est un tube de même diamètre que  $l$  pour éviter les erreurs dues aux phénomènes de capillarité.

Avec l'hypothèse des gaz parfaits, la loi de Mariotte permet d'écrire  $P.V = (P + h)v$  d'où  $P = \frac{hv}{V - v}$ .

En pratique le rapport de compression de la jauge  $\frac{V}{v}$  étant grand  $\left(100 \leq \frac{V}{v} \leq 10\,000\right)$ , on adopte la formule approchée suivante :  $P \approx \frac{hv}{V}$ .

La méthode de mesure d'une pression  $P$  suppose donc que l'on ramène la quantité  $V$  de gaz isolé à un volume  $v$  connu repéré au niveau du capillaire  $l$ . La pression  $P$  est alors proportionnelle à  $h$ , mais le domaine de mesure est réduit par rapport à la méthode qui est exposée ci-après.

En effet, si  $s$  est la section du capillaire, à un volume  $v$  est associée une longueur  $l$  de tube occupé pour le gaz comprimé de sorte que  $P \approx \frac{slh}{V}$ .

Un calcul d'erreur montre alors que à  $P$  donné  $\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta s}{s} + (l + h) \frac{\delta h}{lh}$  en posant  $\delta h = \delta l$ .

Sachant qu'alors le produit  $lh$  est constant, l'erreur minimale sur  $P$  se produit lorsque  $l = h$  c'est-à-dire quand le mercure dans 2 est au niveau du sommet intérieur de  $l$  :  $P \approx \frac{s}{v} h^2$ .

Une échelle quadratique permet alors de lire directement la pression.

Toutefois cette méthode comme on le voit est sensible aux variations de section du capillaire. Ces deux dernières remarques font que souvent on préfère utiliser la première méthode.

En conclusion, la jauge de MacLeod peut être considérée comme un manomètre absolu, son étalonnage n'étant fonction que de sa géométrie. La seule restriction provenant des vapeurs condensables dans les conditions des mesures.

### b) Manomètres thermiques

Ces manomètres utilisent les lois d'échange thermique des gaz à basse pression. Ces échanges peuvent se ramener à trois composantes :

- un terme dû à la convection du ou des fils avec un support traduisant des pertes calorifiques par conduction aux extrémités ;
- un terme traduisant les échanges thermiques du fil avec le gaz raréfié par rayonnement ; c'est ce terme qui amène une limitation à l'utilisation de ces manomètres dans le domaine des basses pressions ;

- un terme qui rend compte des échanges de chaleur dus à la conduction thermique du gaz. Ce terme est en première approximation proportionnel à la pression  $P$  et à la différence des températures de l'élément chaud et du gaz ( $T_c - T_g$ ).

Le domaine d'utilisation de ces manomètres est compris entre 1 Torr et  $10^{-3}$  Torr.

Il en existe plusieurs variantes, les deux plus courantes étant la jauge à thermocouple et la jauge Pirani.

#### ➤ La jauge à thermocouple

Utilise les propriétés thermoélectriques d'une soudure chauffée dans l'atmosphère raréfiée. À l'équilibre thermique ( $T_c - T_g$ ) se traduit par une différence de potentiel proportionnelle à  $P$ .

#### ➤ La jauge Pirani

Utilise un simple fil chauffé sous le vide à mesurer. À l'équilibre thermique, là encore ( $T_c - T_g$ ) est fonction de la pression.

Les méthodes de mesures toutefois sont diverses.

On peut, maintenant constante la tension aux bornes du fil, mesurer la puissance de chauffe, ou maintenant le courant constant mesurer la variation de résistance du fil. Cette dernière méthode est la plus courante.

Les principaux inconvénients de ces deux types de manomètres sont qu'ils nécessitent un étalonnage fonction d'ailleurs de la nature du gaz, et qu'ils sont sensibles aux variations des états de surface. Il faut donc prendre quelques précautions ; la robustesse des jauges à thermocouple fait qu'on les préfère souvent aux jauges Pirani.

### c) Manomètres à ionisation

Il en existe principalement deux types : les jauges à cathode froide représentées principalement par les jauges de type magnetron, et les jauges à cathode chaude dont la jauge Bayard-Alpert, la plus couramment utilisée. Nous ne parlerons ici que de la jauge Bayard-Alpert (figure 14.35 b).

Elle comprend un filament F, une grille collectrice d'électrons G polarisée à environ + 250 V par rapport au filament, et enfin un collecteur d'ions C sous forme d'un fil axial polarisé à – 50 V environ par rapport au filament.

Le courant électronique émis par F, parfaitement régulé, a une valeur généralement comprise entre 100 mA et 10 mA.

Le courant ionique  $I^+$  collecté sur C est proportionnel à la pression et au courant électronique  $I^-$  émis dans le domaine d'utilisation de la jauge compris entre  $10^{-3}$  Torr et  $10^{-10}$  Torr.

On caractérise la jauge par sa sensibilité.

$$S = \frac{I^+}{I^- \cdot P}$$

Ce facteur dépend de la nature du gaz, de la géométrie et des conditions électriques imposées, de sorte que ce manomètre n'est pas un manomètre absolu et nécessite un étalonnage.

D'autre part, vers les très basses pressions, il existe de sévères limitations dans l'utilisation de ce dispositif, en particulier à cause des rayons X dus au bombardement de G par les électrons. Ainsi malgré des variantes telles que le modulateur dû à Redhead, il est très difficile d'assurer une mesure de vide en dessous de  $10^{-10}$  Torr.

Dans la gamme de mesure courante, l'influence des états de surface intervient aussi, de sorte que couramment on dégaze la jauge avant une mesure précise.

Dans certains cas, il faut aussi tenir compte de l'action de pompage qu'exerce la jauge sur l'enceinte, car elle peut-être non négligeable.

#### d) Autres manomètres

Parmi tous ceux-ci, nous ne citerons que le manomètre de Knudsen qui est la seule jauge susceptible de servir aussi de jauge étalon.

Le tableau 14.2 résume les domaines d'utilisation des manomètres.

## 14.5 ÉTUDE DE CAS SUR L'OPTIMISATION D'UN TUBE DE RANQUE

Le tube de Ranque est un dispositif très particulier qui permet à partir d'un gaz comprimé (généralement de l'air) de produire du froid, lors d'une détente tourbillonnaire, analysée succinctement ci-après ; le tube de Ranque suppose donc un couplage du transfert de matière lors d'une détente (gazodynamique) avec une séparation thermique entre du gaz chaud et du gaz froid.

### 14.5.1 Description d'un tube de Ranque

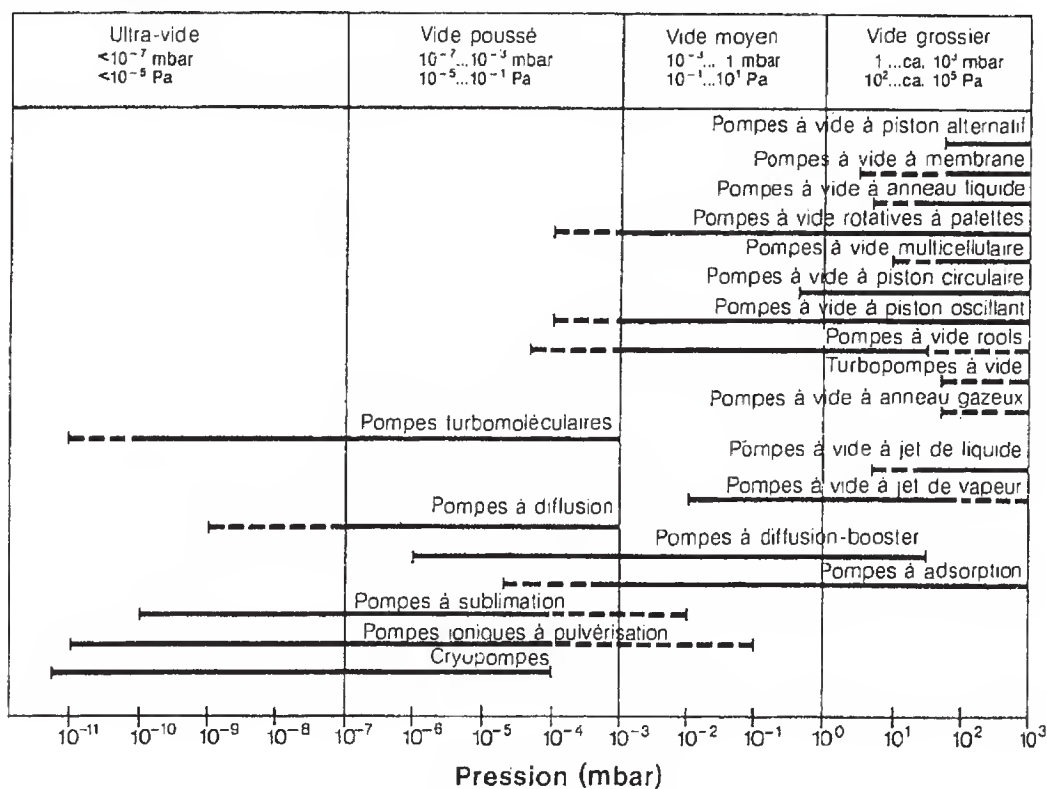
La figure 14.36 présente en coupe un schéma de réalisation d'un tube de Ranque.

Le débit de gaz comprimé  $\dot{m}$ , caractérisé par la pression  $P_H$  et la température  $T_H$ , alimente une tuyère convergente, section d'entrée  $A_H$ , dans laquelle le gaz est accéléré jusqu'à une vitesse voisine du son. Le flux de gaz qui part de l'ajutage convergent par la section de sortie  $A_H$  est forcé de se déplacer à travers l'intérieur du corps cylindrique C de section  $A_t$  du tube et il est considéré isolé thermiquement. Le corps a deux sorties : une à droite, prévue avec la vanne de contrôle V, qui permet la modification de la section  $A_C$ , respectivement, le réglage du flux massique  $\dot{m}_C$ , et une autre sortie à gauche, avec un diaphragme D, de section constante  $A_F$ , qui assure la sortie du flux de gaz  $\dot{m}_F$ .

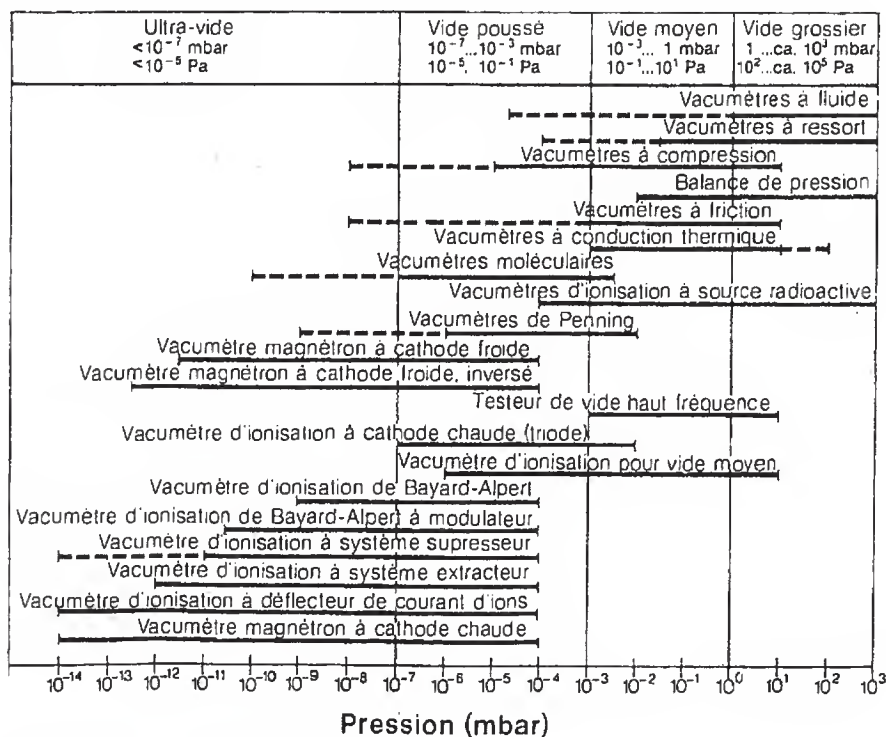
L'étude pratique du fonctionnement du tube de Ranque (Radcendo V.) indique que dans une section transversale du tube (a-a) on a :

TABLEAU 14.2 AVEC L'AIMABLE AUTORISATION DE LEYBOLD.

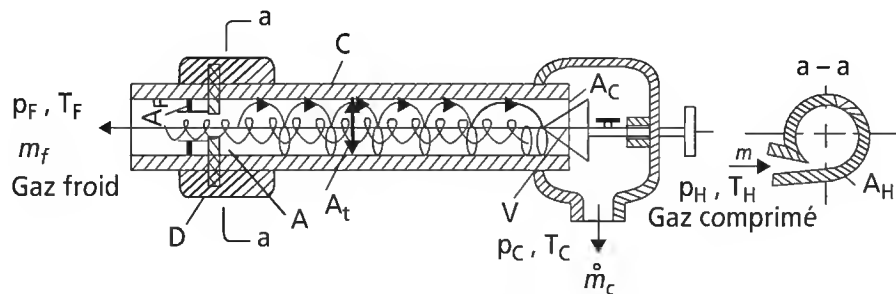
## Domaines de travail des pompes à vide (DIN 28 400, Partie 2 - 1980)



## Domaines de mesures des vacuètres (DIN 28 400, Partie 3 - 1980)

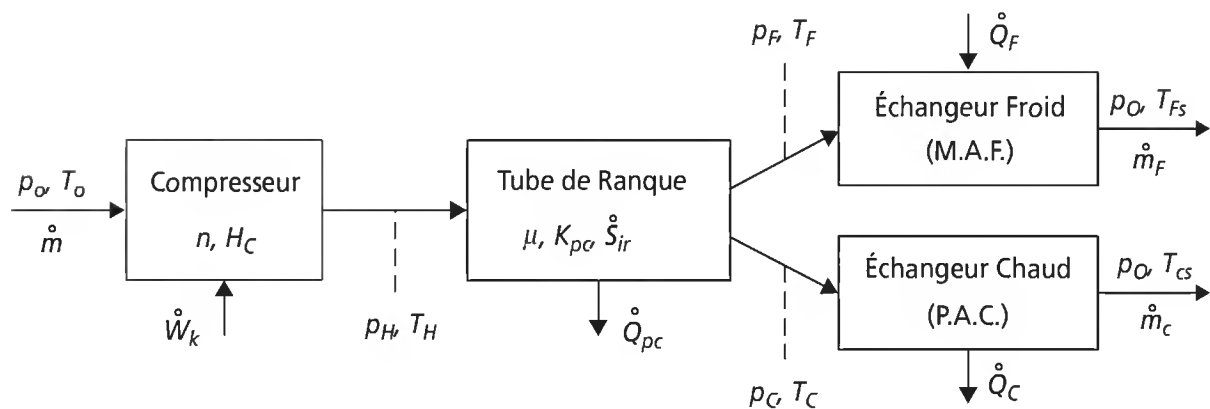


Utilisation des pompes à vides et vacuètres dans les différents domaines de pression.



1 Schéma du tube Ranque-Hilsch

(V – vanne, de section  $A_C$  ; D – diaphragme, de section  $A_F$  ;  
C – corps de tube, de section  $A_t$  ; A – tuyère, de section minimale  $A_H$ )



2 Système gazo-thermo-générateur avec le Tube Ranque-Hilsch

Figure 14.36 Tube de Ranque

- la zone périphérique de flux de gaz, qui se dirige vers la vanne V, caractérisée par une température  $T_C$ , plus grande que celle initiale ( $T_H$ ) ;
- la zone centrale de flux de gaz, en écoulement contre-courant, traversant le diaphragme, caractérisée par une température  $T_F$  plus petite que celle initiale ( $T_H$ ).

En actionnant la vanne de contrôle V, on peut modifier la section  $A_C$  et, implicitement, le rapport entre les deux débits massiques de gaz chaud ( $\dot{m}_C$ ) et de gaz froid ( $\dot{m}_F$ ). La variation de la proportion des débits est accompagnée par une modification importante des températures des deux flux. Dans le processus de formation des deux flux de gaz en écoulement contre-courant (flux périphérique chaud et flux central froid), on obtient une redistribution de l'énergie initiale. Cette redistribution d'énergie est le résultat des processus gazo-dynamiques complexes, dont le mécanisme n'est pas encore parfaitement clarifié.

### 14.5.2 Modélisation thermodynamique du système

Cette modélisation correspond au schéma 2 de la figure 14.36. On suppose par ailleurs le gaz parfait.

Le système gazo-thermo-générateur est formé d'un compresseur, du tube Ranque-T.R. et des appareils d'échange de chaleur – l'échangeur froid (la machine à froid MAF) et respectivement l'échangeur chaud (la pompe à chaleur PAC).

Le compresseur, usuellement alternatif à piston, aspire le débit d'air  $\dot{m}$  de l'atmosphère à pression  $P_o$  et température  $T_o$  et le comprime jusqu'à la pression  $P_H$  et la température  $T_H$ . Le fonctionnement du compresseur, qui conduit à la consommation de la puissance mécanique  $\dot{W}_k$ , est caractérisé par l'exposant polytropique du processus de compression  $k \in (1 \div \gamma)$  ( $k = 1$  pour le cas idéal de la compression isothermique ;  $k = \gamma$  pour le cas de la compression isentropique) et le rapport de compression  $H_C = P_H/P_o$ .

Le fonctionnement du TR est caractérisé par la séparation du flux de gaz en deux débits : un froid, de température  $T_F$ , et l'autre chaud, de température  $T_C$ . La fraction du flux froid  $\mu = \dot{m}_F/\dot{m}$  est ajustable. Dans cette première étape des hypothèses d'analyse, on ne considère que les pertes thermiques chaudes,  $\dot{Q}_{pc} = K_{pc}(T_C - T_o)$ , déterminées par la conductance thermique spécifique du côté chaud  $K_{pc}$ , et l'écart de température entre le flux de gaz périphérique, à température  $T_C$ , et l'environnement, de température  $T_o$ . Pendant le passage du flux de gaz à travers le TR, dans le cas des processus irréversibles, il apparaît une génération d'entropie  $\dot{S}_{ir}$ . On suppose que les deux flux de gaz, à la sortie du TR, sont à la même pression  $P_B > P_o$ , qui assure l'écoulement des flux de gaz à travers les échangeurs de chaleur qui suivent, l'échangeur froid (machine à froid, MAF) et l'échangeur chaud (pompe à chaleur, PAC).

Dans les appareils d'échange de chaleur, les deux débits assurent les effets thermiques utiles :

- de refroidissement, du côté froid –MAF, caractérisé par la puissance frigorifique  $\dot{Q}_F$ , créée par le flux froid ;
- de chauffage, du côté chaud –PAC, caractérisé par la puissance thermique  $\dot{Q}_C$ , créée par le flux chaud.

On va centrer la modélisation sur un effet utile froid ; l'effet frigorifique s'écrit en régime dynamique stationnaire :

$$\dot{q}_F = \dot{m}_F C_p \Delta T_F = \dot{m} C_p \mu (T_o - T_F) \quad (14.51)$$

La dépense énergétique correspond au travail mécanique pour comprimer l'air de  $P_o$  à  $P_H$ .

Pour une compression polytropique de coefficient  $k$ , on a vu que :

$$\dot{w}_k = \frac{k}{k-1} \dot{m} R T_o \left[ (H_C)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

Pour une compression isotherme (travail minimum consommé à  $T = T_o$ )  
 $\min \dot{w} = \dot{m} R T_o \ln H_C$ .

**Remarque :** Dans le réservoir de stockage, le gaz est ramené d'une température  $T_H$  à la température  $T_o$ .

Pour aligner la définition de la performance du tube de Ranque sur celle des machines réceptrices (chapitre 15), on utilisera la notion de coefficient de perfor-

mance frigorifique  $COP_F = \frac{\dot{q}_F}{\dot{W}}$ , soit :

$$MAXCOP_F = \frac{\dot{q}_F}{\min \dot{W}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \mu \frac{T_o - T_F}{T_o} \frac{1}{\ln H_C} \quad (14.52)$$

La variable de commande de l'appareil étant  $\mu$  (répartition des débits), les deux fonctions objectifs (14.51) ou (14.52) peuvent être exprimées en fonction de cette variable  $\mu$  et des paramètres du problème à travers :

– le bilan d'énergie :

$$T_o = \mu T_F + (1-\mu) T_C + \overline{k_{pc}} (T_C - T_o) \quad (14.53)$$

$\overline{k_{pc}}$ , conducteur de pertes chaudes réduite  $= \frac{K_{pc}}{\dot{m} C_p}$  ;  $K_{pc} = k_{pc} A_c$ , produit du coef-

ficient global de transfert de chaleur du fluide chaud vers l'extérieur avec  $A_c$ , surface de transfert du côté chaud.

– le bilan d'entropie :

quelques calculs simples conduisent à :

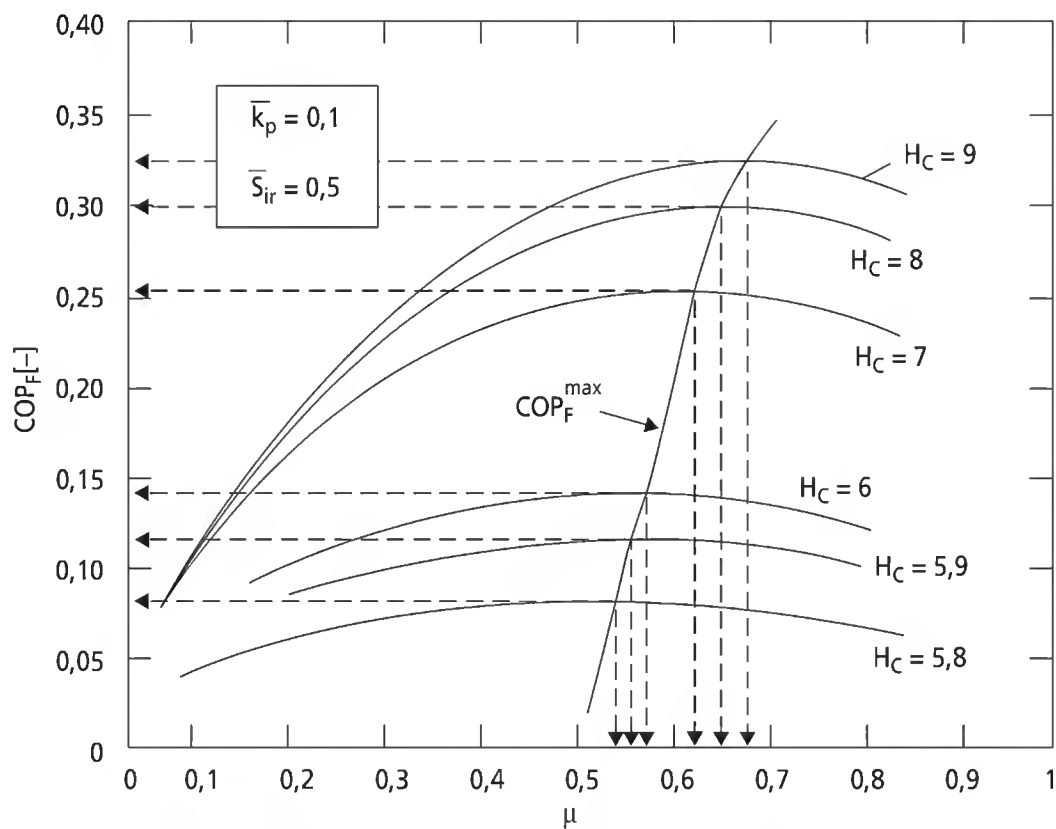
$$\overline{S_{ir}} = \frac{\dot{S}_{ir}}{\dot{m} C_p} = (1-\mu) \ln \left( \frac{T_C}{T_o} \right) + \mu \ln \left( \frac{T_F}{T_o} \right) + \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln H_C + \overline{k_{pc}} \left( \frac{T_C - T_o}{T_C} \right) \quad (14.54)$$

### 14.5.3 Quelques résultats numériques

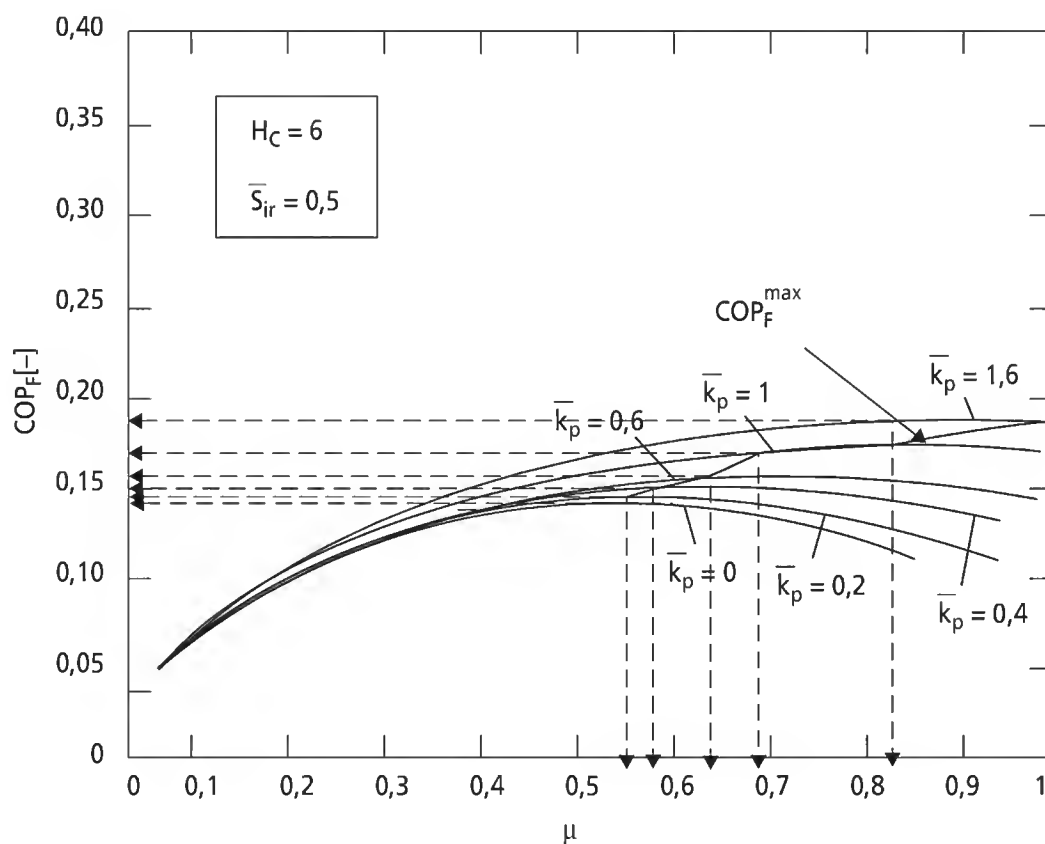
Avec les deux contraintes (14.53), (14.54), il est possible d'étudier la FO (14.52) numériquement.

Dans le principe l'élimination des variables intermédiaires  $T_C$  et  $T_F$  ( $T_F$  s'élimine explicitement par (14.53)) conduit à une fonction objectif à une variable indépendante  $\mu$ , et à quatre paramètres  $(\gamma; H_C, \overline{k_{pc}}, \overline{S_{ir}})$ .

L'optimisation numérique a été faite (Popescu T.) ; les résultats du modèle sont illustrés sur la figure 14.37.



Variation de  $COP_F$  pour diverses valeurs de  $H_C$  et pour  $\bar{k}_{pc} = 0,1$ ,  $\bar{S}_{ir} = 0,5$



Variation de  $COP_F$  pour diverses valeurs de  $\bar{k}_{pc}$  et pour  $\bar{S}_{ir} = 0,5$ ,  $H_C = 6$

Figure 14.37 Optimum de COP du tube de Ranque



Il apparaît bien sur ces figures une influence positive du rapport de compression  $H_C$  et de la conductance de pertes chaudes réduite sur l'optimum de COP : une augmentation de ces deux paramètres conduit à un optimum pour une valeur de  $\mu$  plus grande. La sensibilité du MAX de COP à  $H_C$  est plus marquée que celle de  $\overline{k_p}$ .

L'influence de  $\overline{S_{ir}}$  est par contre négative.

**Remarque :** la même étude peut être faite en pompe à chaleur, mais ce n'est pas l'application majeure du tube de Ranque.

## 14.6 CONCLUSION

Ce chapitre était consacré au transfert de matière, qui est une opération élémentaire dans de nombreuses machines et procédés ; à la base il s'agit donc surtout d'études d'écoulements, souvent isothermes (typiquement de la mécanique des fluides).

Les modèles correspondants rendent de grands services, surtout en fluide incompressible.

L'extension en fluide compressible fait apparaître le couplage avec les transferts de chaleur ; cela sera développé encore dans les machines motrices. On a noté l'intérêt de la compression isotherme, même si elle reste difficile de réalisation, puis l'abaissement de température par détente. Dans ce dernier cas, l'exemple du tube de Ranque montre la richesse et la complexité des couplages transfert de matière (écoulement), séparateur thermique (génération de froid).

Enfin, trop souvent le domaine du vide (dépression par rapport à l'atmosphère) est ignoré dans les livres ; cette lacune est réparée, compte tenu de son usage industriel de plus en plus développé.

## BIBLIOGRAPHIE

Air liquide, *Encyclopédie des gaz de l'Air Liquide*, Elsevier, 1976.

CAMPANAUD J., Le point de vue sur les éoliennes, *Science et Vie*, avril 2006, p. 140-143.

COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides*, Masson, Paris, 3<sup>e</sup> édition, Tome II, p. 292-303, 1982.

EXARHU M., *Sur l'optimisation de la répartition des charges entre des turbines de tailles différentes*, Communication CIEM, Comptes-Rendus du Colloque, Bucarest, Roumanie, p. 149-154, octobre 2003.

FEIDT M., *Thermodynamique et optimisation énergétique des systèmes et procédés*, TEC et DOC, Paris, 2<sup>e</sup> édition, p. 351-357, 1996.

Gaz de France, Les solutions de stockage souterrain, *Document DER*, Département Réservoirs Souterrains, 19 p., septembre 1997.

GUYON E., HULIN J.-P., *Granites et fumées, un peu d'ordre dans le mélange*, Éditions O. Jacob, novembre 1997.

IDELCIK I.E., *Mémento des pertes de charge*, Eyrolles, Paris, 1986.

- ISHII M., *Thermo-fluid dynamic theory of two phase flow*, Eyrolles, Paris, Collection de la DER d'EDF, Tome 22, 1975.
- LALLEMAND A., Compression et détente des gaz et vapeurs, *Techniques de l'Ingénieur*, Article BE8013, Paris, 26 p.
- LOCKART R.W., MARTINELLI R.C., *Proposed correlation of data for isothermal two phases two components flow in pipes*, 6<sup>th</sup> Regional Meeting, Buffalo, New York, USA, 1949.
- PLUVIOSE M., *Machines à fluides ; principes de fonctionnement*, Technosup, Ellipses, Génie Énergétique, 2002.
- POPESCU T., *Analyse thermodynamique du tube de Ranque-Hilsch*, rapport de stage Erasmus-Socratès, Université Henri Poincaré Nancy, mai 2005.
- RADCENCO V., *Générateur tourbillonnaire de froid et de chaleur*, Editura Technica, Bucharest, (en roumain), 1992.
- Science et Vie*, Une voiture à air comprimé et bio-carburant, *Actualités, Environnement et Cadre de Vie, Automobile*, p. 42, mai 2005.
- VRINAT G., Rappel des principes de la lyophilisation ou cryodessiccation, *Revue Générale du Froid*, n° 1054, p. 47-52, juin 2005.

## Chapitre 15

# Machines à cycles inverses

### 15.1 DE LA PRODUCTION DE FROID À LA REVALORISATION DE LA CHALEUR

Le chapitre 14 a permis de montrer comment le transfert de fluide pouvait être réalisé à partir de machines réceptrices (pompes, ventilateurs, compresseurs) en fournissant de l'énergie mécanique au fluide ou réciproquement, comment le transfert de fluide à potentiel décroissant dans une machine motrice permettait de générer sur l'arbre de ce moteur (turbine) une énergie mécanique de rotation utile (on pourrait aussi concevoir des détendeurs à piston : voir moteurs thermiques au chapitre 16). Le présent chapitre a pour but l'étude des machines thermomécaniques à cycles inverses et de leurs variantes ; il prolonge en l'amplifiant l'étude qui a clos le chapitre 14, où la détente tourbillonnaire d'un fluide avec le tube de Ranque permettait de produire du froid et du chaud selon l'extrémité (la sortie) du tube considéré.

#### 15.1.1 Les machines à cycles inverses

##### a) *Tentative de classification*

La synthèse proposée ici considère en priorité la production de froid (basse température et cryogénie) ; ces machines présentent les caractéristiques suivantes.

##### ► Le fluide cyclé

Il s'agit d'un fluide permanent (corps pur ou mélange avec changement de phase).

**Remarque :** certaines machines ou procédés utilisent des supports solides (effets thermoélectriques ; effets thermomagnétiques).

► Le niveau de température

Au voisinage de l'ambiance, il y a conditionnement d'air. Le froid est généralement dit positif ( $t$  supérieur à  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) ; l'application climatisation est très développée. La figure 15.1 est un exemple de climatisation.



Figure 15.1 Exemple de climatisation.

La réfrigération : ce domaine inclut la réfrigération classique, la congélation, la surgélation ; le domaine typique de température est compris entre  $[0\text{ }^{\circ}\text{C}, -100\text{ }^{\circ}\text{C}]$ . On appelle aussi ce domaine froid négatif.

La cryogénie : la température est alors inférieure à  $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$  ; ce domaine reste particulier vu les basses, voir très basses, températures.

Les pompes à chaleur et thermotransformateurs : la température est ici au contraire au-dessus de la température ambiante, et généralement supérieure à  $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Il s'agit d'une opération de revalorisation de la chaleur : augmentation du potentiel thermique.

► La puissance utile de la machine

La gamme de puissance standard des machines est dans l'intervalle  $[10\text{ W}, 10\text{ kW}]$ , mais l'industrie utilise souvent des méga ou hyperconfigurations  $[100\text{ kW} ; 10\text{ MW}$  ou plus]. Certaines applications spécifiques font apparaître des mini et micromachines, du W au  $\mu\text{W}$ , en particulier aux très basses températures. Des études portent même actuellement sur les nanomachines.

► Définition générale d'une machine à cycle inverse

Une machine à cycle inverse est une machine qui par usage d'une certaine forme d'énergie noble permet le transfert d'énergie thermique d'une source à basse température vers un puits à haute température.

b) *Modèle thermodynamique général de machines à cycle inverse*

Quelle que soit la machine considérée, le premier principe de la thermodynamique s'applique :

$$\sum_i \overset{o}{q}_i + \overset{o}{w} = 0 \quad (15.1)$$

$\overset{o}{q}_i$  est la puissance thermique au contact du réservoir  $i$  ;  $\overset{o}{q}_i$  est positif si reçu par le médium cyclé (négatif, si cédé ; convention thermodynamique).

$\overset{o}{w}$  est associé à la consommation globale d'énergie noble de la machine (toutes énergies, sauf thermique) ;  $\overset{o}{w}$  est toujours une puissance positive, reçue par le médium cyclé.  $\overset{o}{w}$  peut être une somme de contributions  $\left( \overset{o}{w} = \sum_j \overset{o}{w}_j \right)$ .

Parmi les énergies thermiques considérées, au moins une constitue un effet utile ; soit  $k$  le réservoir correspondant, tel que  $\overset{o}{q}_k = \overset{o}{q}_u$ . Il est possible (et cela se rencontre en pratique) de concevoir une machine, avec plusieurs effets utiles. Dans ce cas, il vient :

$$\overset{o}{q}_u = \sum_k \overset{o}{q}_k \quad (15.2)$$

De façon similaire, le second principe, exprimé sous forme algébrique s'écrit :

$$\sum_i \frac{\overset{o}{q}_i}{T_i} + \overset{o}{S}_i = 0 \quad (15.3)$$

$T_i$  est la température de médium cyclé au niveau du réservoir  $i$  ; pour la suite du raisonnement, on particularisera ici au cas des réservoirs thermiques de type thermostat, à température constante  $T_{si}$ .

Ce cas est une bonne approximation de la pratique courante, si on remarque que le côté limitant de la machine (fluide limitant par exemple) doit être le médium cyclé ; sinon  $T_i$  et  $T_{si}$  sont à prendre comme les températures entropiques moyennes.

$\overset{o}{S}_i$  est le flux d'entropie créé du fait de l'irréversibilité interne de la machine. En première approximation, cette fonction peut être supposée constante, mais il est possible de la détailler par analyse entropique.

La description des transferts thermiques est à ajouter aux relations précédentes, pour chaque contact thermique de la machine ; on donne (15.4) une forme générale aux lois de transfert thermique qui dépendent essentiellement de  $T_i$ ,  $T_{si}$  :

$$\overset{o}{q}_i = F_i(T_i, T_{si}) \quad (15.4)$$

Pour une machine non adiabatique, les interactions avec l'environnement à  $T_o$  supposent des courts-circuits thermiques entre chaque réservoir et l'environnement qui correspondent à un flux de perte  $\overset{o}{q}_{pi}$  tel que :

$$\overset{o}{q}_{pi} = G_i(T_o, T_{si})$$

### ➤ Conclusion de cette modélisation générale

Il ressort deux constatations essentielles du modèle thermodynamique proposé.

Le modèle est applicable directement pour les machines à cycle continu (régime dynamique stationnaire), mais transposable pour les machines à cycle discontinu, moyennant l'usage d'énergie et non de flux d'énergie : la forme du cycle peut être quelconque.

Le modèle est valable quelle que soit la forme des lois de transfert utilisées ; la relation (15.4) permet l'usage de lois de transferts différentes selon les modèles.

## 15.1.2 Les fluides

L'histoire des techniques du froid se confond avec l'histoire de ses fluides. Si l'utilisation du froid a commencé dès l'époque romaine, avec l'usage de la glace, de la neige, et donc de la glacière, l'apparition de machines est plus récente (aux environs de 1750) et a été liée essentiellement à l'évolution des composants de machine, dont le compresseur (voir chapitre 14), puis des fluides cyclés.

### a) Désignation des fluides frigorigènes

L'abondance de fluides utilisables a conduit à la mise en place d'une notation normalisée ; un composé, fluide frigorigène est représenté par la lettre R (réfrigérant) suivi d'un nombre qui permet de le désigner exactement.

### ➤ Les fluides standards

Les fluides frigorigènes les plus courants sont encore de nos jours la série de fluides obtenus à partir des alcanes sous forme de dérivés halogénés. Les contraintes environnementales (ODP, GWP, TEWI) ont conduit à évoluer successivement des CFC (chlorofluorocarbones : exemple R12, aujourd'hui interdit) aux HCFC (hydrochlorofluorocarbones : exemple R22), puis aux HC (hydrochlorocarbones : exemple R134a).

**Remarque :** la démarche est identique pour les fluides frigorigènes dérivés des alcènes.

Pour les hydrocarbures cyclés ou leurs dérivés, la dénomination comporte un C : exemple RC270 (cyclopropane).

Les composés organiques divers sont rassemblés en revanche dans la série 600 (exemples : composés à base de soufre ; R600, butane).



### ► Les fluides naturels

Les composés inorganiques se sont vus attribuer la série 700 ; le fluide frigorigène a un numéro qui correspond à sa masse molaire (en g) ajoutée à 700.

Exemples : R717, ammoniac ; R718, eau.

Parmi les fluides naturels, il faut noter le renouveau d'un ancien fluide, le dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$ , R744. Ce fluide est l'objet de nombreuses recherches, d'un point de vue systémique ; il donne lieu à des cycles particuliers car transcritiques. On notera par ailleurs une spécificité de ce frigorigène qui est liée à la présence de son point triple à une pression de 5,1 MPa pour une température de  $-56,6^\circ\text{C}$  ; cela permet l'usage du  $\text{CO}_2$  sous forme de neige carbonique. Le diagramme de la figure 15.2 rend compte de la sublimation atmosphérique de  $\text{CO}_2$  à  $-78,5^\circ\text{C}$ , avec une chaleur latente de sublimation de 572 kJ/kg.

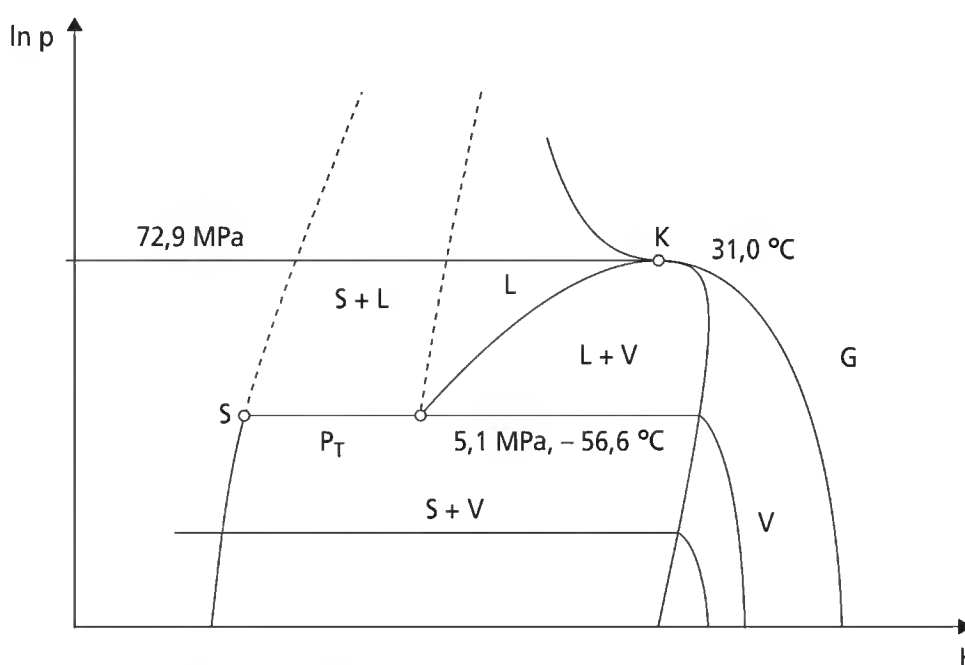


Figure 15.2 Diagramme de Mollier du R744

### ► Les mélanges zéotropes et azéotropiques

Les mélanges azéotropes sont des mélanges souvent binaires (deux corps purs) qui se comportent comme un corps pur ; parmi les anciens frigorigènes, le R502 était un azéotrope, mélange de R22 et R115. Les mélanges azéotropes se sont vu attribuer la série des numéros R500 (selon les numéros d'enregistrement).

Les mélanges zéotropes, contrairement aux mélanges azéotropes, ont une température qui varie (glissement de température) lors du changement de phase à pression constante ; cela influe sur les caractéristiques de transfert et a donc un impact sur le fonctionnement et le dimensionnement des échangeurs de chaleur.

Les mélanges zéotropes sont souvent des mélanges ternaires. Exemples : R407C ; R410A ; R404A. Ce dernier est un mélange de R143 (52 %)/R125 (4 %)/R134a (4 %) (pourcentage en masse).

Les numéros des mélanges zéotropes appartiennent à la série 400 dans l'ordre d'enregistrement, complété par une majuscule caractérisant la composition particulière.

**Remarque :** on distingue parfois les quasi-azéotropes, pour lesquels le glissement est petit.

### b) Données sur les fluides

#### ► Données générales

Les données essentielles sur les fluides frigorigènes les plus utilisés sont recensées dans le tableau 15.1. La dernière colonne du tableau fait apparaître un paramètre de sécurité ; ainsi A1 désigne un fluide non toxique et non inflammable, A2 un fluide toxique et (ou) inflammable, A3 un fluide très toxique et explosif.

**TABLEAU 15.1** DONNÉES ESSENTIELLES SUR LES FLUIDES FRIGORIGÈNES.

Fluide	Formule	Glissement	T°C Ebul. N	T°C K	$P_k$ MPa	$\frac{\dot{V}}{\dot{V}_{CO_2}}$	COP -15°C/+30°C	O D P	GWP	Sécurité
<b>Fluides halogènes</b>										
R134a	CH <sub>2</sub> FCF <sub>3</sub>	0	-26,1	101,1	4,06	5,90	4,5	0	1 300	A1
R404A	R143a/ R125/R134a	0,7	-47	73	3,73			0	3 800	A1
R407C	R32/R125/ R134a	7,4	-44	87	4,62			0	1 520	A1
R410A	R32/R125	0,2	-51	72	4,95			0	1 725	A1
<b>Hydrocarbures</b>										
R600a	CH(CH <sub>3</sub> ) <sub>3</sub>	0,0	-12	135	3,65				20	A3
R290	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	0,0	-42	97	4,25				20	A3
<b>Fluides naturels</b>										
R279	Air (Brayton)			-221		83,0	1,1			
R718	H <sub>2</sub> O		100	375	22,1	477	4,1 (+5°C/+30°C)			
R744	CO <sub>2</sub>	0,0	-55,6 (TT)	31	7,38	1,0	2,56		1	A1
R717	NH <sub>3</sub>	0,0	-33,3	135,0	11,42	3,44	4,76	0	0	B2
<b>Cryogénie</b>										
R702	H <sub>2</sub>									
R704	Ne									
R728	N <sub>2</sub>									
R732	O <sub>2</sub>									



► Données particulières et diagrammes

Les données relatives aux corps purs ont déjà été développées, cependant nous complétons les informations pour quelques mélanges.

Ainsi, pour les fluides R410A et R407C, l'équation d'état proposée est une équation de type Martin Hou :

$$P = \frac{RT}{v - B} + \sum_{i=1}^4 \frac{Ai + BiT + Ci \exp(-KT)}{(v - B)^{i+1}} \quad (15.5)$$

Les fonctions d'état enthalpie et entropie spécifiques massiques sont obtenues à partir de la chaleur spécifique massique isobare identifiée  $C_p^{id}$  :

$$C_p^{id} = a + bT + cT^2 + dT^3 + \frac{f}{T} \quad (15.6)$$

Elles s'écrivent sous la forme :

$$h = h_o + \int_{T_o}^T C_p^{id} dT - RT + \frac{P}{\rho} + \int_0^P \left[ \frac{P}{\rho^2} - \frac{T}{\rho^2} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \right] d\rho \quad (15.7)$$

$$s = s_o + \int_{T_o}^T \frac{C_p^{id}}{T} dT - R \ln \left( \frac{\rho RT}{P_o} \right) + \int_0^P \left[ \frac{R}{\rho} - \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \right] d\rho \quad (15.8)$$

Les paramètres et références des équations 15.5 à 8 figurent dans le tableau 15.2.

**TABLEAU 15.2** CONSTANTES ET CONDITIONS DE RÉFÉRENCE POUR LES ÉQUATIONS DES FLUIDES R410A ET R407C.

Constantes	R410A	R407C
A1	$-1,721781 \cdot 10^{-1}$	$-2,242960 \cdot 10^{-1}$
A2	$2,381558 \cdot 10^{-4}$	$3,607793 \cdot 10^{-4}$
A3	$-4,32907 \cdot 10^{-7}$	$-3,443757 \cdot 10^{-7}$
A4	$-6,241072 \cdot 10^{-10}$	$-2,9604712 \cdot 10^{-9}$
B1	$-1,646288 \cdot 10^{-4}$	$3,749717 \cdot 10^{-4}$
B2	$-1,462803 \cdot 10^{-8}$	$-6,445503 \cdot 10^{-7}$
B3	0	0
B4	$1,380469 \cdot 10^{-12}$	0
C1	-6,293665	-0,251725
C2	$1,532803 \cdot 10^{-2}$	$-4,027373 \cdot 10^{-3}$
C3	0	0
C4	$1,604125 \cdot 10^{-7}$	$-3,281494 \cdot 10^{-7}$
R	0,11455	0,09645
K	0,017	0,0152
B	$4,355134 \cdot 10^{-4}$	0
$\alpha$	0,2676084	-0,083843

Constantes	R410A	R407C
b	$2,11532461 \cdot 10^{-3}$	0,00321516
c	$-9,848184 \cdot 10^{-7}$	$-1,94062 \cdot 10^{-6}$
d	$6,493781 \cdot 10^{-11}$	0
f	0	36,35655
Conditions	R410A	R407C
$s_o$ (kJ/kg.K)	1,8973	1,8487
$h_o$ (kJ/kg)	404,23	389,5
$p_o$ (kPa)	180,3	85
$T_o$ (K)	233,15	233,15

On présente dans l'annexe 4 un ensemble de diagrammes thermodynamiques des fluides frigorigènes les plus usités ce jour.

Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé vers les monographies spécialisées éditées par l'IIF (Institut International du Froid ; web : [iifir@iifir.org](mailto:iifir@iifir.org)) ou vers Dehon Service, spécialiste français de la distribution de fluides frigorigènes (web : [dehonparis@dehon.com](mailto:dehonparis@dehon.com)) (aspect industriel) ou encore vers des publications spécialisées : on citera à cet effet un article relatif au R404A (Macaudière S.).

De nombreux logiciels fournissent les propriétés thermophysiques de frigorigènes, dont le logiciel FORANE®, de ELF-ATOCHEM.

### c) Critères de choix des fluides frigorigènes

#### ► Multiplicité des critères

Critères thermodynamiques : en premier lieu, il y a le domaine d'usage en température (variable intensive). Ce domaine pour un fluide est nécessairement limité entre la température du point triple et celle du point critique ; on distinguera ainsi des fluides basse température, haute température. La chaleur latente est aussi une donnée déterminante, parce que jouant sur la quantité de chaleur échangée.

Critères mécaniques : à ces considérations thermodynamiques, il faut ajouter des conditions mécaniques dont les niveaux de pression et le volume spécifique à l'aspiration basse pression de la machine ; souvent le niveau de pression est représenté par la pression critique  $P_k$  (voir tableau 15.1).

Les critères environnementaux ont joué un rôle déterminant ces dix dernières années, et encore aujourd'hui dans l'évolution de l'usage des fluides (ODP, GWP, TEWI).

Les autres critères sont des critères de sécurité (toxicité et inflammabilité, sans être exhaustif), mais aussi des critères économiques, de compatibilité avec des matériaux et produits dont les huiles de lubrification.

#### ► L'huile dans les systèmes frigorifiques

Ce dernier point donne lieu actuellement à de nombreux développements et recherches. Le couple frigorigène-huile est essentiel pour assurer une bonne lubrification

de la machine de compression, sans perturbation profonde des transferts de matière et de chaleur.

Ainsi, la miscibilité du couple huile-frigorigène est un facteur déterminant, avec la viscosité de l'huile sur la fonction retour d'huile.

Toutefois, la présence de l'huile affecte aussi les transferts de chaleur. Les travaux de Youbi Idrissi M. montrent comment le diagramme de Mollier est modifié par la présence de l'huile pour deux couples (R134a/PAG ; R407C/POE).

#### ➤ Les grandes familles d'huile de lubrification

On distingue deux grandes familles d'huile de lubrification.

Les huiles minérales sont soit à base paraffinique, soit à base naphténique.

Les huiles synthétiques sont les plus nombreuses. Elles comprennent les polyalphaoléfinés PAO, les alkylbenzènes AB ou dialkylbenzènes DAB, les polyalkylènes glycols PAG, les diesters DE et polyesters POE, les polyvinyléthers PVE.

#### d) Conclusions sur les fluides frigorigènes

Les applications standard du froid (à l'exclusion de la cryogénie) montrent que le challenge du remplacement des fluides frigorigènes nocifs à l'environnement est en passe d'être résolu.

Le R12 a été remplacé par le R134 pour les applications en conditionnement d'air et froid standard [0, – 10 °C].

Le R502 est remplacé par le R407C en conditionnement d'air.

Le R410A peut servir à tous usages selon que la machine est à un ou deux étages.

Cependant, les problèmes à résoudre sont complexes, et tout particulièrement l'incidence du changement de fluide sur la lubrification et les matériaux utilisés.

Une nouvelle étape est en cours d'étude : il s'agit du passage aux fluides dits naturels, dont les hydrocarbures, voire d'autres familles de fluides.

### 15.1.3 Panorama des applications

Les applications des machines à cycles inverses sont très variées ; elles déterminent en partie l'architecture des machines.

#### a) Climatisation et conditionnement d'air

Cette application a pris une grande importance durant ces dix dernières années sous l'impulsion des pays développés, qui favorisent des conditions de confort tant dans l'habitat que dans les transports.

#### ➤ Notions sur le confort

La notion de confort est complexe et fait intervenir tant des paramètres objectifs que des paramètres suggestifs. O. Fanger, au Danemark, a particulièrement contribué au développement de cette notion, mais le lecteur trouvera de nombreux prolongements dans (Givoni B.).

Pour résumer, la notion de confort est multiparamétrique, et nécessite de se trouver dans une zone qui est un compromis entre principalement :

- la température sèche (celle mesurée au thermomètre classique) ;
- la température humide (voir chapitre 17, paragraphe 17.3) : cette température est représentative de l'hygrométrie ambiante. Elle sera introduite ultérieurement ;
- la température radiative (effet de paroi froide ou de paroi chaude) ; cette température fait intervenir l'échange de chaleur du corps avec une paroi ;
- la vitesse d'air ; selon l'intensité du vent autour du corps, la sensation est plus ou moins bien perçue, il peut même exister des couplages entre les paramètres précédents : vent froid, vent chaud.

**Remarque :** la sensation de confort chaud dépend aussi du vêtement de la personne, ainsi que de son métabolisme (état de santé) : on ne climatise pas de la même façon dans les transports et en hôpital.

### ► Climatisation et conditionnement d'air dans l'habitat

Le dimensionnement et l'architecture du système diffèrera selon les lieux et ambiances, et nécessitera une étude amont soigneuse pour déterminer la charge thermique associé au type de confort désiré (aval du système : exemples, confort de jour, confort de nuit ; en hôpital, confort en chambre de malade, contrainte en salle d'opération) par rapport à un environnement généralement fluctuant (climat, saison, météorologie amont du système).

Dans la majorité des cas, les systèmes de climatisation actuels proposent de répondre à une température sèche et une hygrométrie, tout en limitant les nuisances sonores (bruits de ventilation).

Les systèmes de chauffage classiques apparaissent donc comme plus rudimentaires, puisque n'intéressant que la température sèche. Toutefois, les systèmes de chauffage, de climatisation et de conditionnement d'air restent des systèmes dynamiques, énergivores, qui ne doivent pas être déconnectés du système passif que constitue un habitat (tant l'enveloppe que le volume) ; cette remarque vaut aussi bien à la conception d'un local neuf, qu'à la rénovation d'un habitat ancien : l'isolation et l'inertie des parois, la protection solaire, la circulation d'air, la gestion des émissions de chaleur et de l'humidité sont à prendre en compte dans une approche intégrée ; l'apport de l'architecture vernaculaire est à réhabiliter en ce sens, si on considère une écoconception et une architecture durable.

Il est possible ainsi de faire du froid avec du « chaud » comme il sera vu par la suite (dont les machines à froid solarisées).

### ► Climatisation et conditionnement d'air dans les transports

Le problème relatif aux transports reste très voisin du précédent, pour ce qui est des applications dans le domaine maritime et ferroviaire. Il en diffère fondamentalement pour ce qui est de l'application dans le domaine aérien, où les contraintes d'environnement sont différentes, de même que les contraintes de poids et d'encombrement.



Pour les applications dans le domaine automobile, les principales contraintes sont économiques et d'encombrement. Il faut ajouter la fonction climatisation (confort passager), l'importance de la fonction conditionnement d'air (déshumidification d'un espace confiné et aussi fonction dégivrage).

Actuellement, les systèmes utilisés en transport automobile sont essentiellement à base de frigorigène R134a ; certaines alternatives ont été proposées récemment (R152a), qui pourraient permettre une moindre charge en fluide et de ce fait minimiser les émissions dans l'atmosphère (les circuits de climatisation automobiles ne sont pas étanches). Reste le risque d'inflammabilité ; aussi l'alternative fluide naturel R744 (CO<sub>2</sub>) est-elle très étudiée, car sans danger et neutre du point de vue atmosphérique, mais elle nécessite un cycle transcritique.

De façon plus prospective que pour l'habitat, des projets existent pour des véhicules dont la climatisation fonctionne grâce à des cellules photovoltaïques (ce système a l'intérêt de fonctionner véhicule arrêté).

### b) Applications dans le domaine agroalimentaire

Ces applications se répartissent en deux grandes catégories : l'entreposage et le traitement de produits.

#### ► L'entreposage

Ce qu'il est convenu d'appeler la chaîne du froid fait intervenir après production, la conservation des produits dans des conditions précises. Celles-ci sont fonctions surtout de leur nature, du type de conditionnement, de la durée d'entreposage ; ces conditions visent à la préservation de qualité organoleptiques du produit ; une législation existe dans ce domaine (tableau 15.3).

**TABLEAU 15.3** TEMPÉRATURES MAXIMALES DES DENRÉES ALIMENTAIRES ANIMALES OU D'ORIGINE ANIMALE AU COURS DE LEUR ENTREPOSAGE.

Nature	Température maximale des denrées
<b>Congelées</b>	
Toutes denrées surgelées au sens du décret modifié n° 64-949 du 9 septembre 1964	- 18 °C
Glaces et crèmes glacées	- 18 °C
Autres denrées congelées, y compris pour animaux de compagnie	- 12 °C
<b>Réfrigérées</b>	
Poissons, mollusques et crustacés, conditionnés (à l'exception des poissons, mollusques et crustacés vivants).	Glace fondante ou température de celle-ci 0 °C à + 2 °C
Viandes hachées et préparations de viandes hachées	+ 2 °C
Abats et préparations de viandes en contenant	+ 3 °C

Nature	Température maximale des denrées
Autres préparations de viandes de toutes espèces, y compris la chair à saucisse et la saucisse crue	+ 4 °C
Viandes de volailles, lapin, rongeurs gibier d'élevage, gibier à plumes	+ 4 °C
Viandes d'animaux de boucherie, viandes de gibier ongulé	+ 7 °C
Matières premières destinées à la fabrication d'aliments pour animaux de compagnie	+ 7 °C
Aliments pour animaux de compagnie stabilisés ou crus	+ 4 °C
Ovoproduits à l'exception des produits UHT	+ 5 °C
Œufs réfrigérés	Au sec, à l'abri du soleil et de préférence à température constante
Œufs de la catégorie A	
Œufs non réfrigérés ni conservés de la catégorie B	
Œufs non classés	
Lait cru	+ 6 °C
Lait pasteurisé, produits laitiers frais (yaourts, kéfirs, crème et fromages frais)	Température définie sous la responsabilité du fabricant ou du conditionneur
Divers produits transformés à base de viandes, plats cuisinés et préparations culinaires (viande, poisson), produits à base de poisson	
Divers produits à base de lait tels que crèmes pâtisseries, pâtisseries fraîches, entremets, fromages affinés	
Autres denrées	

Comme pour l'habitat, il existe un optimum résultant du compromis entre isolation et puissance frigorifique du système dynamique ; cette optimisation est le plus souvent thermoéconomique. L'hygrométrie et sa gestion ne peuvent pas être ignorées dans cette application (Gac A.). Suite à cet entreposage, des transferts successifs (transports réfrigérés) doivent amener le produit vers sa consommation finale, à travers des magasins (vitrines, gondoles) puis des cuisines soit professionnelles ou particulières (congélateurs, réfrigérateurs).

L'architecture du froid commercial est fortement fonction de la taille du magasin (magasin de proximité, supermarché, hypermarché) ; actuellement se pose la question de l'usage optimal des systèmes à détente directe, et des systèmes indirects utilisant des fluides frigopORTEURS dont les coulis de glace : cette thématique donne lieu à développement.

### ► Procédés du domaine agroalimentaire

Avant la conservation, il est nécessaire d'effectuer le traitement du produit, dont la mise en froid finale ; selon le cas, la mise en froid donne lieu à réfrigération, congélation, surgélation.

Cette opération peut être précédée d'opérations de pasteurisation (cas du lait), de cuisson, de séchage ; une conception intégrée du système peut amener des économies d'énergie (gestion optimale) conséquentes : c'est le cas du séchage utilisant des pompes à chaleur.

La pasteurisation nécessite des températures de l'ordre de 80 °C, alors que la conservation nécessite des niveaux de température compris entre 5 °C et l'ambiante ; on conçoit aisément que l'écart de température associé à ces deux fonctions permet d'envisager l'usage de thermofrigopompe (effets utiles chaud et froid).

De même, l'usage des hautes pressions dans le domaine agroalimentaire est plus récent ; il permet des traitements plus efficaces dans certaines opérations, dont la congélation-décongélation sous haute pression.

### c) Applications au domaine médical

Les applications du domaine médical relèvent de :

- la conservation aussi bien pour des produits (vaccins) que des organes ;
- la cryochirurgie : dans ce cas, les basses températures constituent un des paramètres du procédé chirurgical ;
- l'hibernation : cette technique, bien que très ancienne dans le principe (Hippocrate préconisait déjà de refroidir une plaie pour réduire les saignements), se développe depuis une cinquantaine d'années. Elle consiste à réduire la température actuellement au voisinage de 30 °C (hypothermie) ; cela permet de limiter certains mécanismes biochimiques d'autodestruction de cellules, dont les neurones.

### d) Applications dans l'industrie et les laboratoires

#### ► Applications industrielles standard

Les applications sont nombreuses. On peut se contenter de citer des applications industrielles dans :

- les industries chimiques : pétrochimie, en particulier avec les hydrocarbures ;
- les industries sidérurgiques : aciérie à l'oxygène (production d'oxygène) ;
- les industries de transformation : plasturgie (refroidissement de moules) ;
- l'énergie : transport et stockage de GNL (gaz naturel liquéfié), GPL (gaz de pétrole liquéfié) ;
- les travaux publics : congélation du sol pour consolidation ; création de bouchons de glace en conduite pour maintenance.

Nouvelles applications : production de neige artificielle pour pistes

Le développement des sports d'hiver fait que la production de neige artificielle permet de s'affranchir au maximum des conditions météorologiques ; toutefois

produire de la neige, quelles que soient les conditions extérieures ambiantes, n'est pas une mince affaire : la neige est produite par des canons à neige.

Il est beaucoup plus facile et classique de produire de la glace pour une patinoire en intérieur.

### *Refroidissement de composants électroniques miniaturisés*

La miniaturisation des microprocesseurs n'induit pas des puissances thermiques importantes à évacuer (quelques W), mais cette puissance est concentrée sur des surfaces de plus en plus petites. D'où l'idée d'extraire cette quantité de chaleur dégagée quasi ponctuellement à l'aide d'une micro-pompe à chaleur, pour la restituer sur une surface beaucoup plus grande. Cette micro-machine utilisera une micro-turbine à vitesse de rotation très élevée ( $10^6$  t/min : ordre de grandeur), alors que les micro-tubes auront des diamètres de l'ordre de quelques centaines de nanomètres.

### *Réseau de froid*

L'utilisation de réseaux de froid reste encore peu utilisée en France. Peut-être sera-t-elle supplantée par le stockage à l'ambiante et transport du froid, en conjonction avec les machines à sorption (voir paragraphe 15.3.1).

#### ➤ Applications dans les laboratoires

Ces applications sont souvent très spécifiques. On notera surtout ici les utilisations des très basses températures (cryogénie) ; les machines cryogéniques seront étudiées au paragraphe 15.5.

La recherche est toujours préoccupée par l'obtention de très basses températures : les niveaux de température les plus bas atteints à ce jour sont inférieurs au micro Kelvin, mais dans des conditions très particulières, et dans quelques laboratoires au monde. La recherche de très basses températures ou de faibles échanges énergétiques nécessite de s'affranchir des bruits de fond radiatifs environnants. C'est pourquoi on utilise des cryostats à sorption permettant une température de 500 mK sous une charge thermique de 1 mW, ou des cryostats à dilution (utilisés surtout en physique) permettant une température de 100 mK sous une charge thermique de 50  $\mu$ W pour les machines les plus performantes.

**Remarque :** d'autres machines existent pour des applications moins exigeantes (caméra infrarouge par exemple).

### *La supraconduction*

Ce mécanisme physique très particulier est utilisé dans les grandes machines de physique (accélérateurs du CERN, projet ITER à fusion) qui nécessitent des champs magnétiques très intenses. Toutefois, la supraconduction ne se produit aisément actuellement qu'à des niveaux de température cryogénique.

### *Réfrigération magnétique*

Cette réfrigération, comme la supraconduction, est en pleine évolution de connaissance et, par conséquent, d'applications potentielles. Si au départ la réfrigération



magnétique s'entendait comme la désaimantation adiabatique, il n'en est plus de même aujourd'hui.

## 15.2 LES MACHINES À COMPRESSION MÉCANIQUE DE VAPEUR

### 15.2.1 La machine simple à compression mécanique de vapeur

#### a) Cycle théorique d'une machine en contact avec deux thermostats

La figure 15.3 représente la configuration de base de la machine à compression de vapeur.

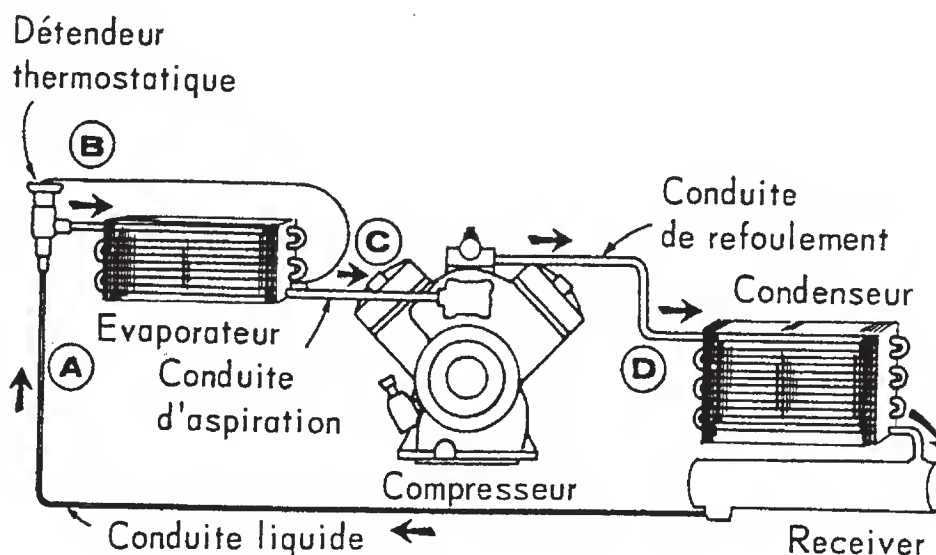


Figure 15.3 Configuration de base de la machine CMV.

Si nous supposons cette machine en contact avec deux thermostats, une source froide et un puits chaud, les cycles fondamentaux qui peuvent être associés au cycle de Carnot inverse sont aussi les cycles de Ericson et de Stirling inverses (figure 15.4).

Si les processus de régénérations thermiques et (ou) mécaniques sont parfaits, alors les trois cycles inverses endoréversibles obéissent aux mêmes lois thermodynamiques et conduisent donc aux mêmes résultats.

Les équations (15.1) et (15.3) deviennent (régime dynamique stationnaire) :

$$\dot{q}_c + \dot{q}_F + \dot{w} = 0 \quad (15.9)$$

$$\frac{\dot{q}_c}{T_c} + \frac{\dot{q}_F}{T_F} + \dot{S}_i = 0 \quad (15.10)$$

#### ► Le COP, critère de performance

On a vu que l'efficacité de la machine, au sens du premier principe, qui est le critère le plus utilisé, se définit comme le rapport de l'effet utile EU, sur la dépense énergétique DE pour obtenir cet effet. Dans le cas des machines à deux réservoirs, il vient :

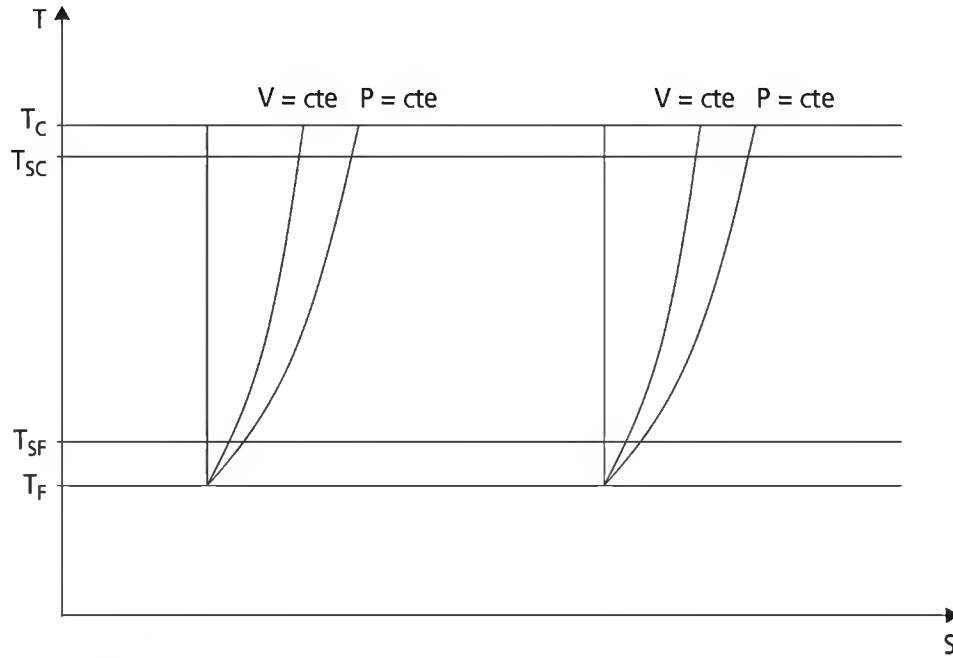


Figure 15.4 Cycles inverses endoréversibles de Carnot, Ericson et Stirling.

- pour les machines à froid (MAF)

$$COP_{MAF} = \frac{\dot{q}_F}{\dot{w}} \quad (15.11)$$

- pour les pompes à chaleur (PAC)

$$COP_{PAC} = -\frac{\dot{q}_c}{\dot{w}} \quad (15.12)$$

**Remarque :** ces définitions valent quelle que soit la configuration de la machine à deux réservoirs.

L'utilisation de (15.9) et des définitions montrent que pour une machine donnée, on a :

$$COP_{PAC} = COP_{MAF} + 1 \quad (15.13)$$

L'utilisation de (15.9, 15.10, 15.11) permet de montrer que le COP pratique est relié au COP endoréversible, à travers les deux relations suivantes représentatives des machines à froid :

$$COP_{MAF} = COP_{MAFendo} \left( 1 - \frac{T_c \dot{S}_i}{\dot{w}} \right) \quad (15.14)$$

si  $\dot{w}$  est un paramètre du problème.

$$\frac{1}{COP_{MAF}} = \frac{1}{COP_{MAFendo}} + \frac{T_c \dot{S}_i}{\dot{q}_F} \quad (15.15)$$

si  $\dot{q}_F$  est un paramètre du problème.

On rappelle que dans tous les cas  $COP_{MAFendo}$  est supérieur au COP pratique ; il correspond à la limite endoréversible à :

$$COP_{MAFendo} = \frac{T_F}{T_C - T_F} \quad (15.16)$$

Si la machine est totalement réversible, il vient alors le résultat thermostatique (limite de l'équilibre thermodynamique) :

$$COP_{MAXrev} = \frac{T_{S_F}}{T_{S_C} - T_{S_F}} \quad (15.17)$$

Le lecteur est invité à développer les mêmes résultats pour une PAC.

Il ressort de la présente étude que le COP peut prendre plusieurs formes (15.11, 15.16, 15.17).

#### ► Efficacité au sens du second principe

Il est possible de réécrire les relations (15.14) et (15.15) sous la forme :

$$\eta_{iw} = \frac{COP_{MAF}}{COP_{MAFendo}} = 1 - \frac{T_C \overset{o}{S}_i}{\overset{o}{W}} \quad (15.18)$$

$$\eta_{iq} = \frac{COP_{MAF}}{COP_{MAFendo}} = \frac{1}{1 + \frac{T_C \overset{o}{S}_i COP_{MAFendo}}{\overset{o}{q}_F}} \quad (15.19)$$

Ces deux efficacités sont relatives aux irréversibilités internes.

**Remarque :** elles sont parfois appelées facteurs de qualité.

L'efficacité relative aux irréversibilités externes  $\eta_e$  est donnée par :

$$\eta_e = \frac{COP_{MAFendo}}{COP_{MAFrev}} \quad (15.20)$$

La combinaison des efficacités internes (15.18 ou 15.19) avec l'efficacité externe (15.20) conduit aux efficacités au sens du second principe  $\eta_{II}$  :

$$\eta_{IIW} = \eta_e \left( 1 - \frac{T_C \overset{o}{S}_i}{\overset{o}{W}} \right) \quad (15.21)$$

lorsque  $\overset{o}{W}$  est paramètre.

$$\eta_{IIq} = \eta_e \left/ \left( 1 + \frac{T_C \overset{o}{S}_i COP_{MAFendo}}{\overset{o}{q}_F} \right) \right. \quad (15.22)$$

lorsque  $\overset{o}{q}_F$  est paramètre.

Ces deux efficacités dépendent à la fois de  $T_C$  et de  $T_F$  ; il y a lieu de choisir ces deux variables de façon adéquate. Leurs valeurs optimales dépendent fortement du cas étudié, comme on peut le voir dans la littérature : Gordon J.M. *et al.* rapportent la

modélisation thermodynamique et sa confirmation expérimentale ; cela confirme l'intérêt pratique de la présente proposition pour comparaison aux machines industrielles existantes : l'influence du débit de fluide de refroidissement au condenseur, sur les performances du refroidisseur est donnée. Khan J.R. étudie davantage l'influence du fluide frigorigène, à travers un système à vitesse variable (le débit d'eau refroidi est constant) ; l'effet du sous-refroidissement et de la surchauffe est étudié, comme la répartition des surfaces de transfert, entre évaporateur et condenseur, à surface totale imposée. De Lieto Vollaro *et al.* proposent un modèle thermodynamique tenant compte des propriétés physiques du réfrigérant, et ils optimisent le flux exergetique (FO) soumis à une contrainte de COP imposé, ou de taille de compresseur imposé. Le lecteur pourra consulter utilement un article de revue récent (Feidt M.).

### ► Quelques résultats

Ces résultats sont relatifs au modèle théorique de machine à compression mécanique de vapeur développé dans ce paragraphe.

#### *Machine de Carnot irréversible avec EU imposé*

En première approche, on suppose le contact avec deux thermostats (des modèles existent sans cette hypothèse), et avec une irréversibilité interne  $\overset{o}{S}_i$  un paramètre constant ; là aussi, des modèles existent sans cette hypothèse. Par simplification de deux lois de transfert linéaire au contact à la source, comme au puits :

$$\overset{o}{q}_i = K_i X_i = K_i (T_{si} - T_i) \quad (15.23)$$

Compte tenu des équations du modèle (15.9, 15.10, 15.11, 15.20), il est aisé de conclure que  $\min \overset{o}{w}$  (DE) correspond à  $MAXCOP_{MAF}$  et  $MAX\eta_{II}$ , pour cette MAF contrainte en EU  $\overset{o}{q}_o$ .

L'usage de (15.10) et de la contrainte fournit les expressions de  $T_c$  et  $T_F$ . Ainsi, une optimisation ne devient possible que si on ajoute des degrés de liberté au point d'état trouvé ( $T_c$  et  $T_F$ ) ; par exemple, si les deux paramètres conductances thermiques  $K_c$ ,  $K_F$  des deux échangeurs condenseur et évaporateur deviennent des variables liées par une condition sur la conductance totale  $K_T$  à distribuer :

$$K_c + K_F = K_T \quad (15.24)$$

Cette nouvelle contrainte résulte à la fois des dimensions finies et aussi d'une limitation économique. Les deux nouvelles variables  $K_c$ ,  $K_F$  soumises à la contrainte (15.24) fournissent une fonction objectif à une variable indépendante ( $K_c$  ou  $K_F$ ). Le min de  $\overset{o}{w}$  se produit pour :

$$K_{Fopt} = K_T \left( \frac{1 + \overset{o}{S}_i / K_T}{2 + T_{SF} \overset{o}{S}_i / \overset{o}{q}_o} \right) \quad (15.25)$$

Toute autre valeur souhaitée peut aisément être déterminée.

La principale conclusion de ces résultats analytiques est que pour une machine réelle  $\left(\overset{o}{S}_i \neq 0\right)$ , l'équirépartition des conductances thermiques n'est possible  $\forall \overset{o}{S}_i$ , que si  $\overset{o}{q}_o = \frac{K_T T_{SF}}{2}$ . Comme généralement  $\overset{o}{q}_o < \frac{K_T T_{SF}}{2}$ , la conductance  $K_F$  est inférieure à la conductance  $K_c$  à l'optimum.

### *Machine de Carnot irréversible avec le COP fonction objectif*

En utilisant le même modèle, mais sans contrainte sur l'effet utile, il vient une expression formelle du COP exprimée en fonction des deux variables  $T_c$  et  $T_F$  et de trois paramètres  $T_{SC}, T_{SF}, \overset{o}{S}_i$ .

L'optimisation par rapport aux deux variables indépendantes  $T_c$  et  $T_F$  conduit au MAXCOP pour le vecteur d'état :

$$T_{Copt} = T_{SC} / \left( 1 - \sqrt{\overset{o}{S}_i / K_T} \right) \quad (15.26)$$

$$T_{Fopt} = T_{SF} / \left( 1 + \sqrt{\overset{o}{S}_i / K_T} \right) \quad (15.27)$$

En conclusion du calcul, on voit que les irréversibilités internes imposent des écarts de température d'autant plus grands aux source et puits, que ces irréversibilités sont importantes. Le MAXCOP associé est fourni par la relation suivante :

$$MAXCOP_{MAF} = \frac{T_{SF} \left( 1 - \sqrt{\overset{o}{S}_i / K_T} \right)^2}{T_{SC} \left( 1 + \sqrt{\overset{o}{S}_i / K_T} \right)^2 - T_{SF} \left( 1 - \sqrt{\overset{o}{S}_i / K_T} \right)^2} \quad (15.28)$$

Les conductances optimales de transfert de chaleur associées à cet optimum sont :

$$K_{Copt} = K_T \frac{1 + \sqrt{\overset{o}{S}_i / K_T}}{2} \quad (15.29)$$

$$K_{Fopt} = K_T \frac{1 - \sqrt{\overset{o}{S}_i / K_T}}{2} \quad (15.30)$$

Les tendances du présent modèle restent les mêmes que celles du modèle décrit au paragraphe précédent, mais ici la distribution optimale des conductances ne dépend que des paramètres  $\overset{o}{S}_i$  et  $K_T$ .

Les figures 15.5 et 15.6 illustrent les résultats correspondants.

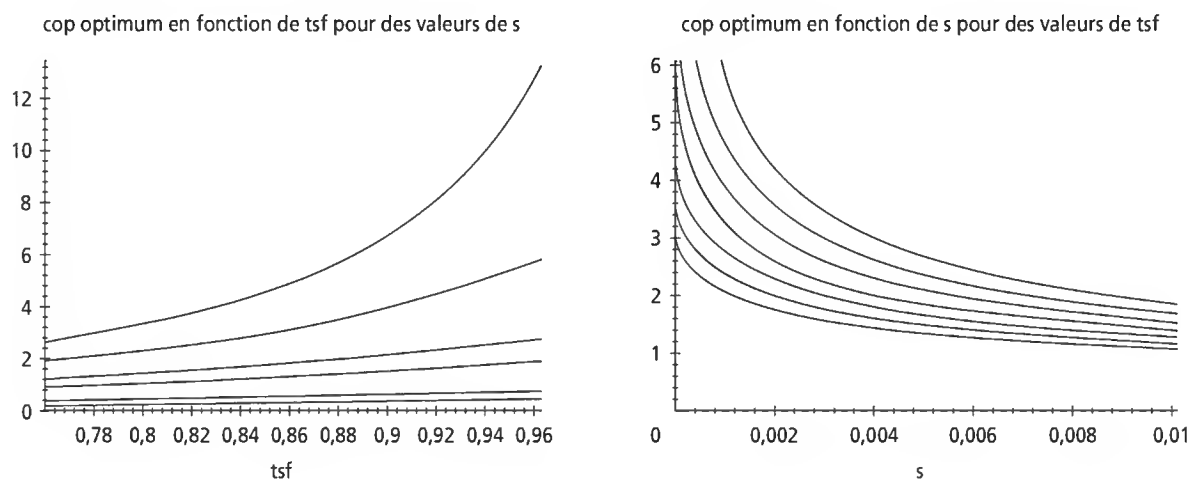


Figure 15.5

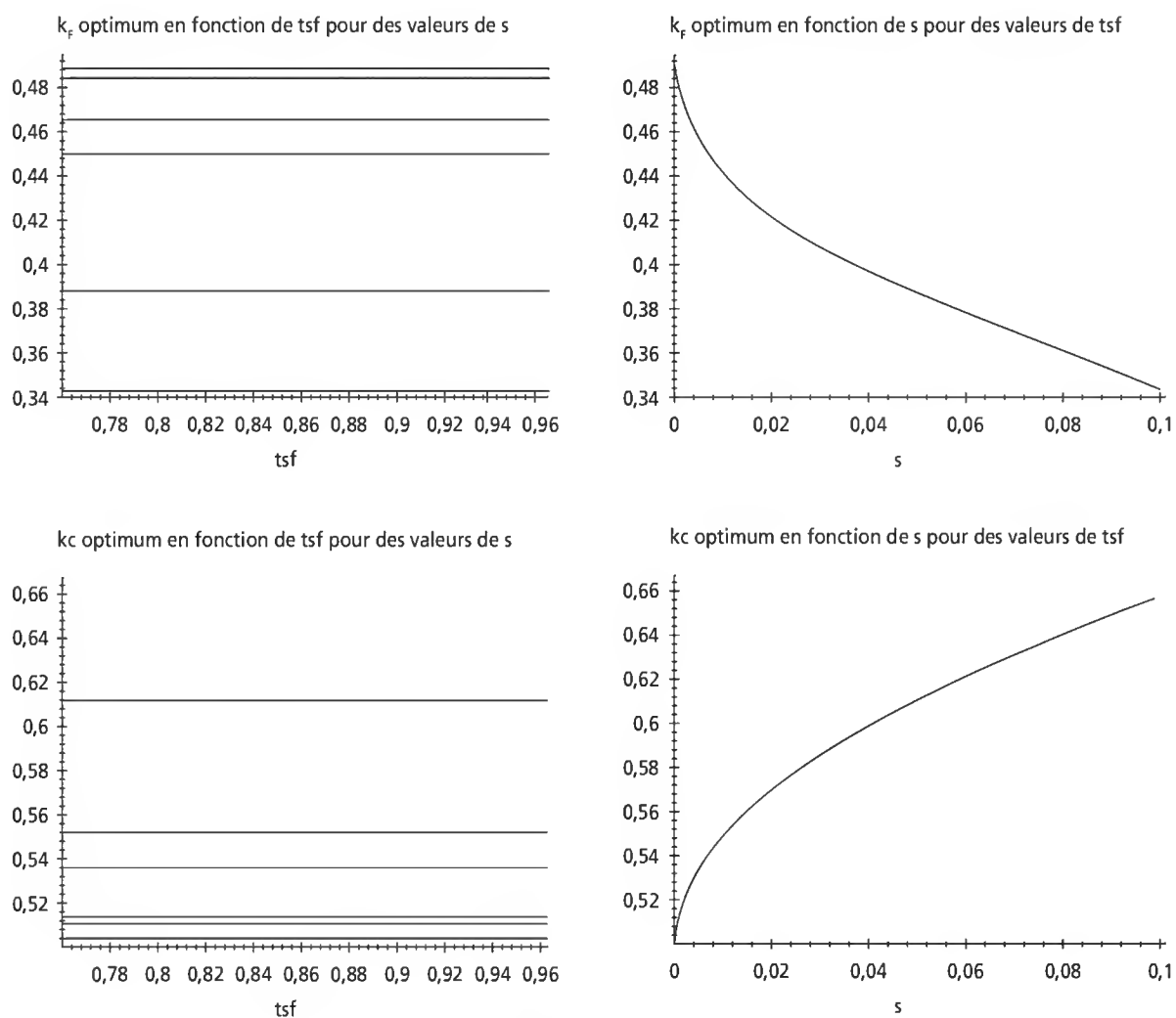


Figure 15.6

Aux modèles thermodynamiques de tendances précédents, il y a lieu d'ajouter la simulation en régime instationnaire, en vue de quantifier et optimiser le fonctionnement à charge partielle des machines (transitoires lents), mais aussi les transitoires rapides (démarrage et arrêt, variations brusques de charges) : la thermodynamique a un rôle important à jouer dans le développement de modèles adaptés au contrôle commande des machines.

### b) Cycle réel des machines à compression mécanique de vapeur

Le cycle réel d'une machine à compression mécanique de vapeur diffère du cycle théorique précédent pour plusieurs raisons, dont particulièrement la réalisation pratique de la machine et le comportement du fluide cyclé.

#### ► L'installation frigorifique de base

Contrairement à ce que laisse voir la figure 15.3, une installation frigorifique simple nécessite plus que les quatre composants de base pour pouvoir fonctionner correctement. Il existe des codes de représentation de ces installations (figure 15.7).

On reconnaît sur cette figure le compresseur 1, le condenseur 2, le détendeur 3 et l'évaporateur 4. Apparaissent aussi un certain nombre d'accessoires tels que le réservoir de stockage 6 pour le frigorigène liquide, le déshydrateur 7, des vannes et des robinets divers pour la sécurité, maintenance et contrôle de l'installation.

**Remarque :** des accessoires peuvent s'avérer indispensables sur certaines machines industrielles : déshuileur 5, séparateur 9.

#### ► Le cycle pratique du frigorigène

Dans la pratique industrielle, la métrologie installée sur machine reste modique (quelques prises de pression et de température, et souvent les débits des fluides externes). Aussi les informations disponibles (entrée et sortie de composants) donnent lieu à la représentation suivante du cycle décrit par le frigorigène dans la machine (figure 15.8).

#### *Description du cycle*

Les frigoristes utilisent très souvent le diagramme de Mollier (enthalpie spécifique-pression absolue). Le cycle fait apparaître les quatre transformations thermodynamiques suivantes : la compression 1-2 et le transfert de chaleur dans le condenseur 2'-3. Ce transfert supposé isobare (sans perte de pression) voit successivement :

- la désurchauffe des vapeurs (2'-2'') ;
- le palier de condensation (2''-2''') ;
- le sous-refroidissement du liquide (2'''-3) ;

**Remarque :** le sous-refroidissement du liquide est supposé se faire dans le condenseur, mais il peut se faire aussi dans le réservoir de stockage (figure 15.7).



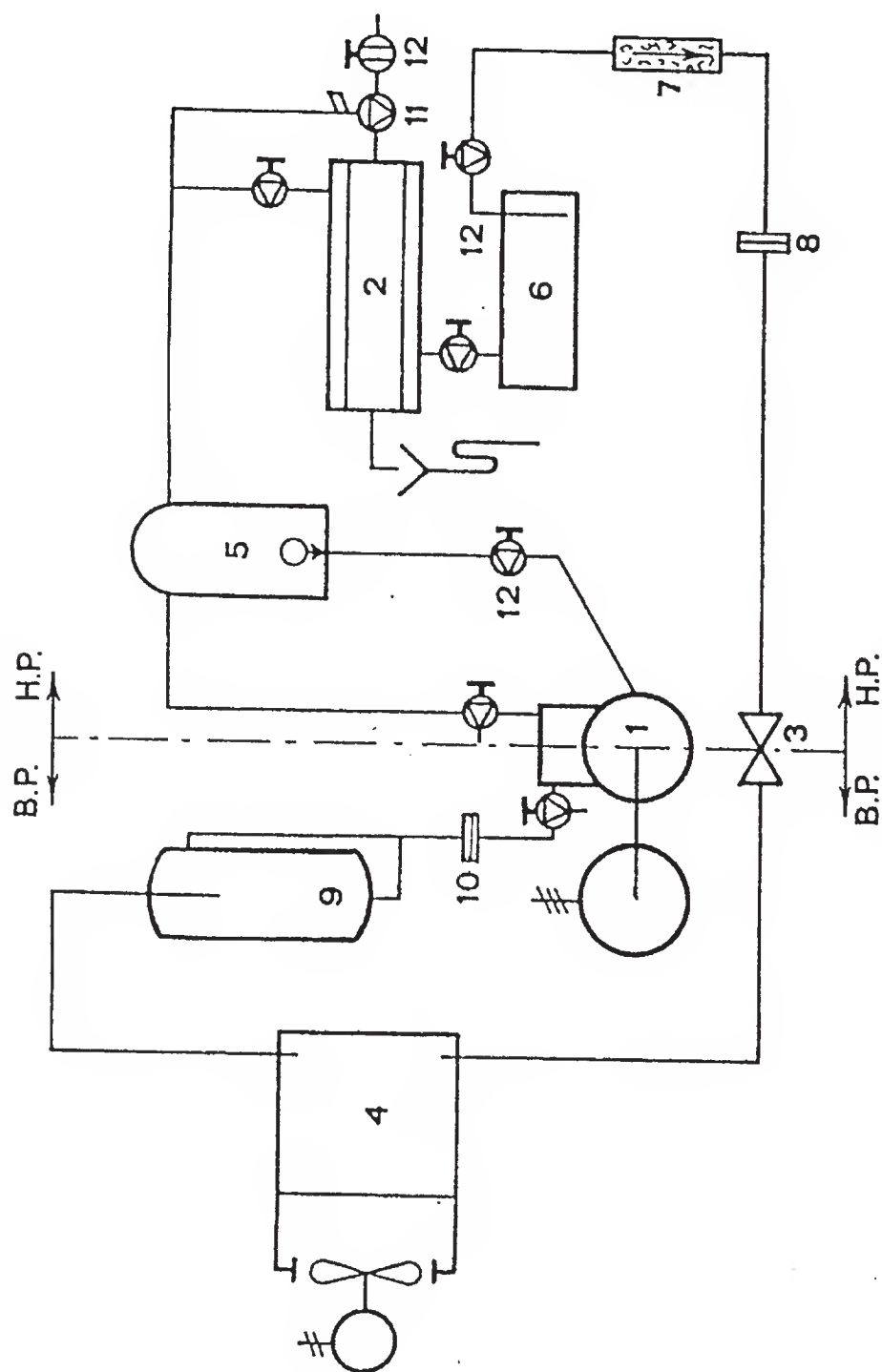


Figure 15.7 Schéma normalisé d'une installation frigorifique simple.



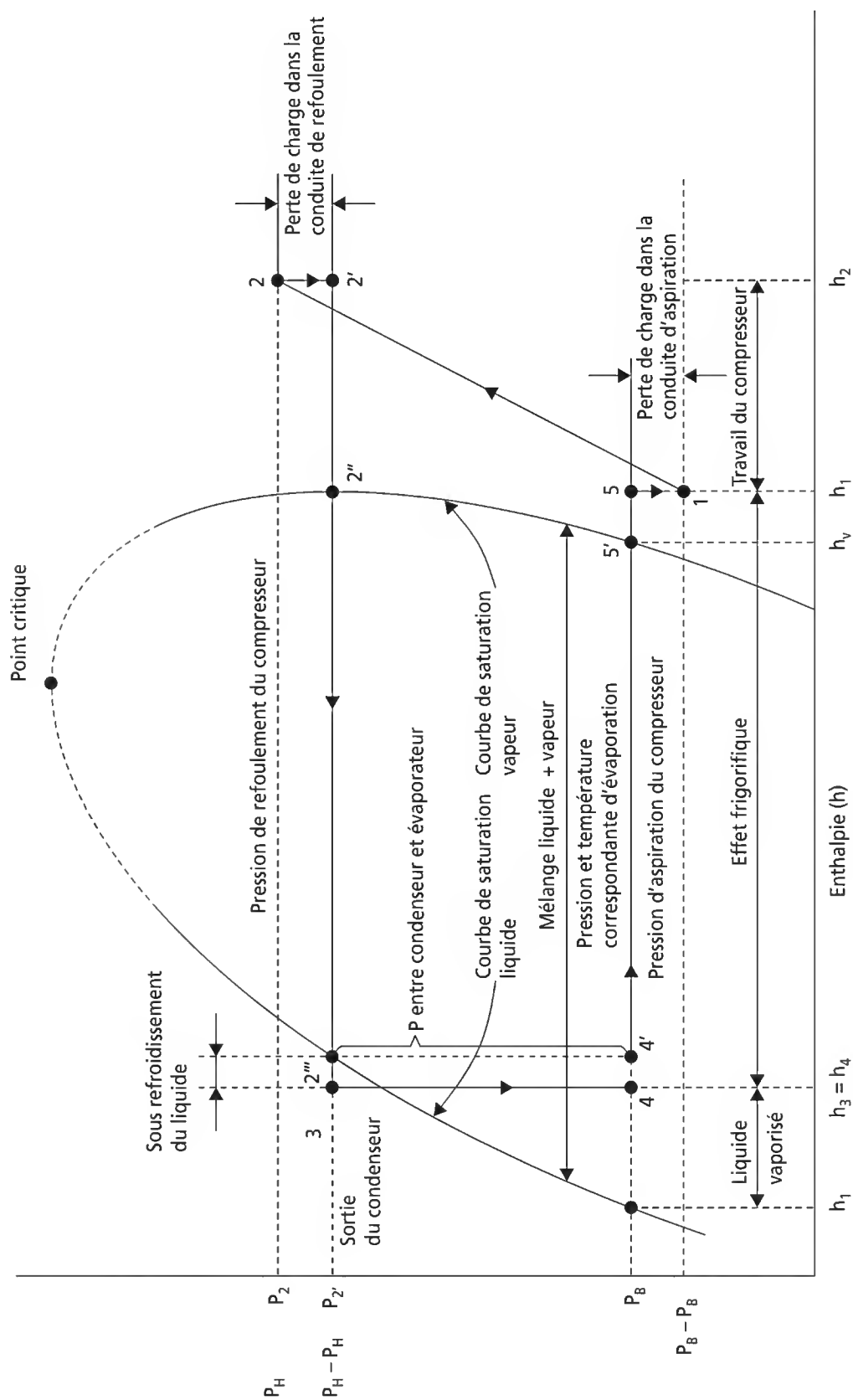


Figure 15.8 Représentation du cycle frigorifique dans le diagramme enthalpie-pression.

- la détente 3-4. Cette détente de type isenthalpique (détente de Joule Thomson) permet l'abaissement de température, par abaissement de pression, sans échange de chaleur, ni de travail avec l'extérieur ; mais elle est foncièrement irréversible. On comprend l'intérêt suscité par les détendeurs alternatifs et les turbines diphasiques ; ces dispositifs sont utilisés en cryogénie, mais apparaissent aussi sur certaines grosses installations industrielles depuis les années 2000 ;
- le transfert de chaleur dans l'évaporateur 4-5. Ce transfert est supposé isobare et fait apparaître une surchauffe de la vapeur en sortie d'évaporateur 5'-5 ou dans la liaison entre sortie d'évaporateur et aspiration du compresseur.

Cette précaution est indispensable pour éviter le « coup de liquide » dans le compresseur : on n'a en effet aucune assurance d'un équilibre thermodynamique au point 5, ce qui peut amener à introduire (sauf configuration adéquate : séparateur gaz-liquide 9 ; voir figure 15.7) du liquide dans le compresseur, cela est toujours dommageable.

### *Analogie et différences avec le cycle théorique*

Sur le diagramme, il apparaît que quel que soit le type de compresseur (voir chapitre 14), la compression s'effectue en phase vapeur (compression sèche).

Du fait de la surchauffe à l'aspiration, et de la désurchauffe au refoulement, les transferts de chaleur sensible empêchent la réalisation du cycle de Carnot (non isothermie).

**Remarque :** selon les fluides, la courbe de saturation côté vapeur peut permettre de s'approcher plus ou moins de ce cycle limite.

La compression réelle ne sera pas isentropique, mais dans le cas d'une transformation adiabatique, elle fera apparaître une irréversibilité dont on rendra compte par le rendement isentropique  $\eta_{is}$ .

La détente réelle isenthalpique (comme il a été dit) introduit une irréversibilité correspondante à la détente : elle apparaît clairement sur la représentation du cycle en  $T, s$  (figure 15.9), par comparaison au cycle théorique représenté en trait discontinu.

À ces différences, il y a lieu d'ajouter le sous-refroidissement éventuel du liquide (échange de chaleur sensible) qui toutefois produit un effet positif, en augmentant l'effet frigorifique spécifique massique, et assurant un bon fonctionnement du détendeur.

Les écoulements de fluide se produisent avec des pertes de pression tout le long du circuit, mais on peut remarquer qu'à débit massique constant, les vitesses maximales de fluide se produisent en phase gazeuse. Aussi, en l'absence d'autres informations, on localisera les pertes de charge du côté vapeur ; soit  $\Delta P_H$ , entre 2 et 2' du côté haute pression,  $\Delta P_B$  entre 5 et 1 du côté basse pression (on rappelle que les pertes de pression sont proportionnelles au carré de la vitesse débitante).

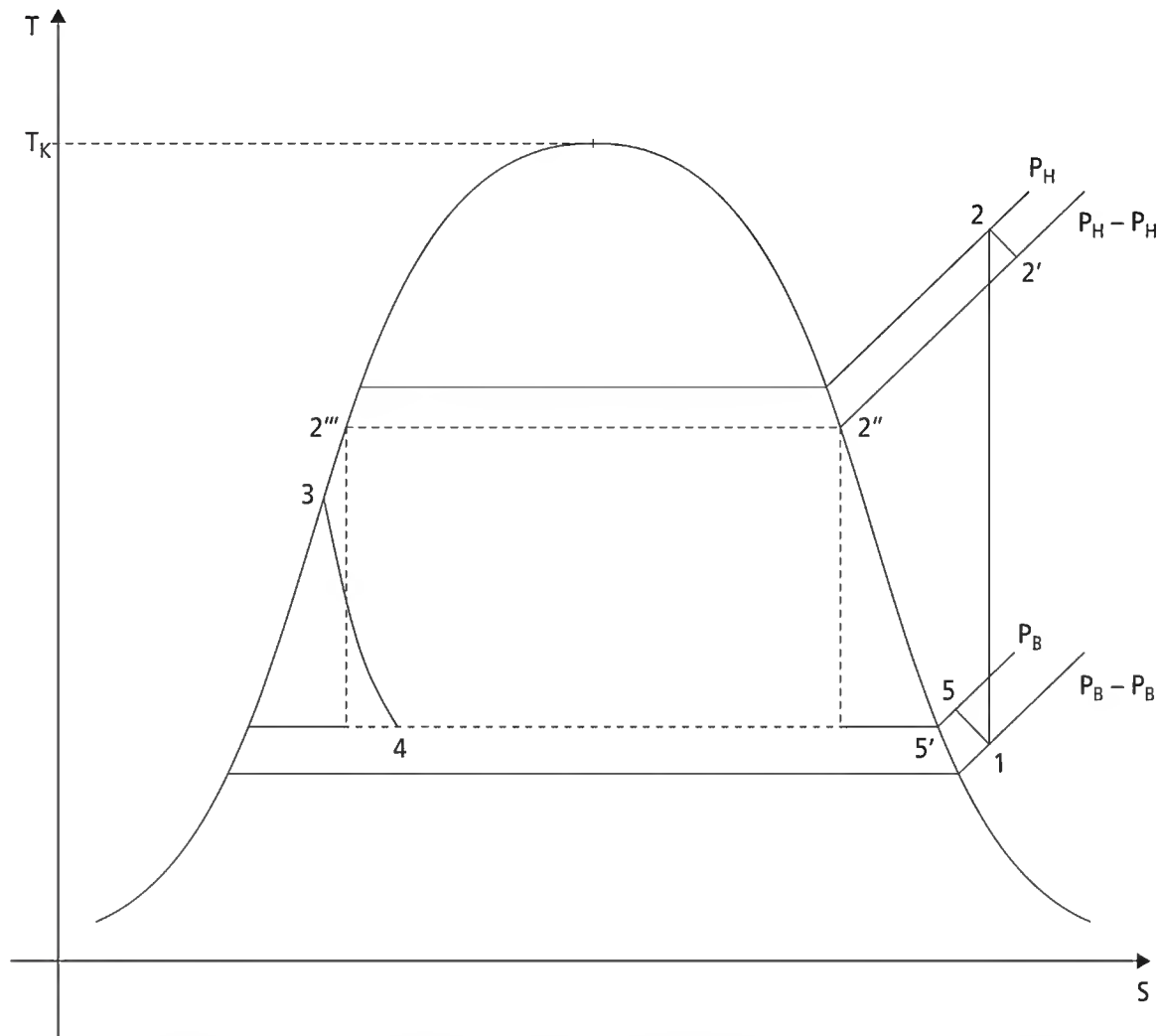


Figure 15.9 Représentation du cycle frigorifique de la machine simple à CMV dans le diagramme entropique.

### c) Méthodologie d'étude d'une machine à froid

#### ► Avant-projet de dimensionnement d'une machine à froid

Pour tracer le cycle du frigorigène pressenti pour la machine à partir du besoin exprimé (une puissance frigorifique  $\dot{q}_o$  connue et un niveau de température  $T_o$ , connu comme la température de sortie du fluide froid  $T_{Fs} = T_o$ ), on suppose un pincement d'échangeur évaporateur  $\Delta T$  (de l'ordre de  $5^\circ\text{C}$ ), ainsi qu'une surchauffe de la vapeur en sortie d'évaporateur (du même ordre de grandeur :  $5^\circ\text{C}$ ) ; les pertes de pression font aussi l'objet d'une estimation en basse ( $\Delta P_B$ ), puis en haute pression ( $\Delta P_H$ ). Pour terminer la détermination du cycle, il faut connaître la température de sortie (estimée) du fluide externe au puits chaud  $T_{cs}$  (sa température d'entrée déterminera le débit masse nécessaire), ainsi que le pincement au condenseur (on prendra ici  $5^\circ\text{C}$ , identiquement à l'évaporateur) : voir figure 15.8.

*Bilan évaporateur*

En négligeant les pertes thermiques et en supposant la surchauffe vapeur externe à l'évaporateur, il vient :

$$\dot{q}_o = \dot{m} \Delta h_{ev} = \dot{m} \cdot (h_{5'} - h_4)$$

D'où  $\dot{m}$ , le débit de frigorigène cyclé. Le calcul peut être poursuivi pour choisir l'évaporateur.

*Bilan compresseur*

La puissance mécanique du compresseur s'en déduit, en compression adiabatique :

$$\dot{w} = \dot{m} \Delta h_{comp} = \dot{m} \cdot \eta_{is} \cdot \Delta h_{rev}$$

Selon la valeur du taux de compression  $R_c = P_H/P_B$ , la machine sera simple ( $R_c \leq 5$ ) ou étagée.

La volumétrie du compresseur est dépendante des conditions d'aspiration ( $P_1, T_1, v_1$ ):

$$\dot{V} = \dot{m} \cdot v_1$$

On pourra alors choisir le compresseur.

*Bilan condenseur*

En négligeant les pertes thermiques et en supposant que cet échangeur effectue successivement la désurchauffe vapeur, la condensation puis le sous-refroidissement, il vient :

$$\dot{q}_{cond} = \dot{m} \Delta h_{cond} = \dot{m} (h_{2'} - h_3)$$

Le calcul peut être poursuivi pour choisir cet échangeur.

**Remarque :** la caractérisation de la machine peut être complétée en recherchant divers COP et facteurs de qualité ; on citera ici le  $COP_{cycle}$  :

$$COP_{cycle} = \frac{\Delta h_{ev}}{\Delta h_{comp}}$$

➤ **Optimisation des machines à froid**

L'optimisation des machines à froid, qui fait suite à la modélisation, donne lieu à des critères d'optimisation variés dont on a vu que le COP était le plus utilisé.

Il existe aussi d'autres critères tels que la maximisation de l'effet utile EU, la minimisation de la charge en frigorigène, la minimisation de la dépense énergétique.

Des optimisations contraintes sont aussi possibles, de même que thermo-économiques.

On illustre ci-après un cas de figure indiqué ci-dessus, sous forme d'un tableau de sensibilité de l'optimum obtenu numériquement pour trois fluides (R22, R134a, R717).

Les données sont : une puissance froide imposée ( $\dot{Q}_o = 100 \text{ kW}$ );  $T_F = 268,15 \text{ K}$  ;  $T_{SC} = 291,15 \text{ K}$  ;  $K_T = 30 \text{ kW/K}$  à répartir.

Le tableau 15.4 fournit les pincements au minimum de  $\dot{w}(MAX_{COP}; MAX\eta_{II})$ , ainsi que les pourcentages de pertes exergetiques ;  $\beta$  représente le rapport de compression à l'optimum.

**TABLEAU 15.4** POINT DE FONCTIONNEMENT OPTIMAL POUR UNE MACHINE À FROID CHARGÉE AVEC TROIS FLUIDES DIFFÉRENTS.

	R134a	R22	R717
$\Delta T_{EV} [K]$	643	6,70	6,97
$\Delta T_m [K]$	7,94	7,89	7,48
$\dot{W} [kW]$	14,94	19,09	17,19
$COP_{MAFirr}$	6,69	5,23	5,81
$\eta_{ex}$	0,57	0,45	0,50
$\bar{\pi}_{irr\_dt} [\%]$	2,1	10,93	5,51
$\bar{\pi}_{irr\_cp} [\%]$	2,42	13,2	10,76
$\bar{\pi}_{irr\_dT_m} [\%]$	20,4	16,46	17,08
$\bar{\pi}_{irr\_dT_{EV}} [\%]$	17,86	14,57	16,85
$\beta$	3,57	3,22	3,36

La figure 15.10 représente en revanche pour un même fluide la comparaison entre l'optimum thermodynamique et l'optimum économique pour le R22 dans les mêmes conditions que ci-dessus.

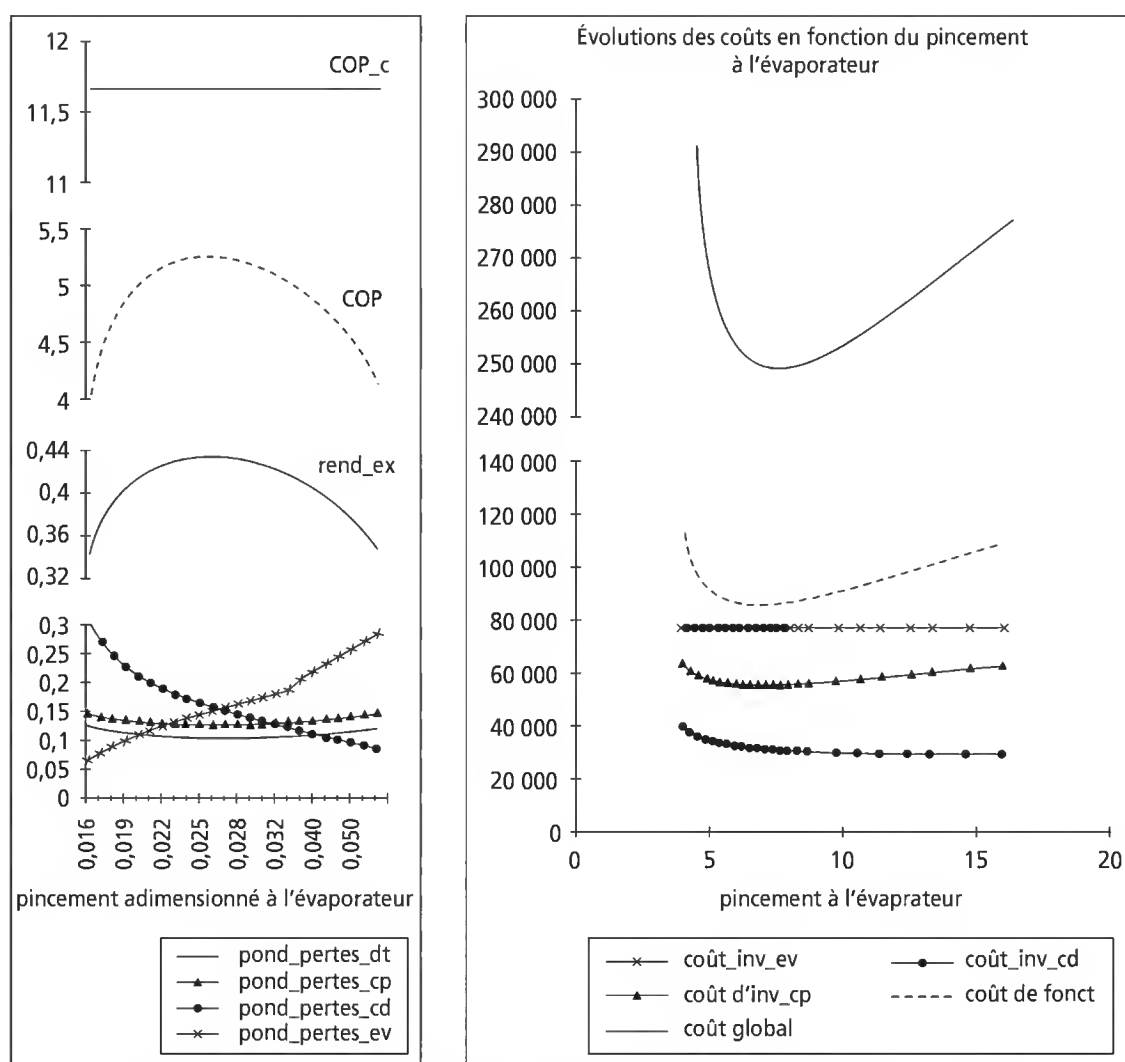
L'optimum thermodynamique (maximum de COP) est obtenu pour un pincement d'évaporateur de 6,7 K, alors que l'optimum thermoéconomique (minimum de coût global se produit pour un  $T_{ev} = 7,5K$ ).

L'étude précédente a été complétée par une optimisation d'un compresseur alternatif ( $\Psi$ , coefficient de perte relative de pression, à l'aspiration AS, en refoulement RF) ; le tableau 15.5 rend compte des résultats obtenus pour la machine à froid à ammoniac.

**TABLEAU 15.5** OPTIMISATION DU COMPRESSEUR À PISTON DE LA MACHINE À FROID À R717.

Données initiales	Résultats optimisation système	Résultats optimisation compresseur
$\dot{Q}_{EV} = 100 \text{ kW}$	$\Delta T_{EV} = 6,97 \text{ K}$	$\Psi_{AS} = 0,08$

Données initiales	Résultats optimisation système	Résultats optimisation compresseur
$K = 30 \text{ kW/K}$	$\Delta T_m = 7,48 \text{ K}$	$\Psi_{RF} = 0,03$
$T_{SF} = 268,15 \text{ K}$	$\beta = 3,36$	$\beta = 3,79$
$T_{PC} = 291,15 \text{ K}$	$\dot{W}^{\min} = 17,19 \text{ kW}$	$\dot{\Pi}_{\text{soupapes}} = 1,25 \text{ kW}$
	$COP_{MAF\_irr}^{\max}$	$\Delta S_{\text{soupapes}} = 0,05 \text{ kJ/kgK}$
	$\dot{\Pi}_{cp} = 1,85 \text{ kW}$	$\dot{\Pi}_{\text{soupapes}} = 1,25 \text{ kW}$
	$\Delta S_{cp} = 0,07 \text{ kJ/kgK}$	$\Delta S_{\text{soupapes}} = 0,05 \text{ kJ/kgK}$



**Figure 15.10** Optimum thermodynamique et optimum économique pour une machine à froid.

Ces résultats, qui sont en accord avec la pratique courante, peuvent être étendus à d'autres types de compresseur (scroll, palettes, vis...), et on citera deux travaux récents.

Lottin O. a montré comment la présence d'huile affecte la valeur de la surchauffe vapeur, qui conduit soit à une puissance de réfrigération maximale, soit au COP

maximum. Yu F.W. a proposé une procédure permettant l'étagement optimal des ventilateurs de refroidisseurs de liquide à condenseur à air, en terme d'efficacité de la machine ; les gains peuvent varier de 4 à 40 % selon les conditions de charge de la machine, et les conditions d'ambiance.

#### d) Régime transitoire et contrôle-commande

Le contrôle-commande des machines et installations de réfrigération suppose la maîtrise du comportement instationnaire des composants (dont les échangeurs de chaleur : (Jacquot C.)), mais aussi du système. Cette problématique est illustrée par des considérations sur les enceintes froides.

##### ➤ Enceinte froide, système en régime instationnaire

##### *Relaxation thermique d'une enceinte froide dans l'ambiance*

La figure 15.11.a représente le schéma de relaxation de l'enceinte froide, dont la température à l'instant initial  $t = 0$  vaut  $(T_o) = T_f < T_o$ .

La capacité thermique de l'enceinte et de son contenu  $C_{th}$  évolue en température de telle sorte que :

$$C_{th} \frac{dT}{dt} = \dot{q} = K_{th}(T_o - T) \quad (15.31)$$

L'intégration de cette équation (15.31) combinée à la condition initiale indiquée conduit à :

$$\frac{T_o - T(t)}{T_o - T_f} = e^{-t/\tau_{th}}$$

avec  $\tau_{th} = R_{th}C_{th}$ , constante de temps de l'enceinte.

**Remarque :** généralement, les constantes de temps thermiques sont grandes devant les constantes de temps mécaniques : on peut supposer les régimes mécaniques établis.

##### *Mise en température d'une enceinte par une machine à froid de puissance froide constante*

La mise en équations du problème s'appuie dans ce cas sur la figure 15.11.b, en supposant à l'instant initial  $t = 0$  une température égale à l'ambiante,  $T(o) = T_o$ .

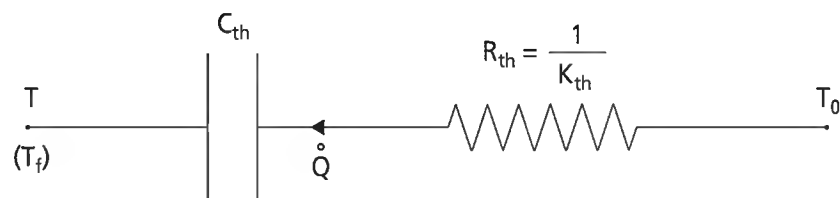
L'équation (15.31) devient alors :

$$-C_{th} \frac{dT}{dt} = \dot{q}_f - K_{th}(T_o - T) \quad (15.32)$$

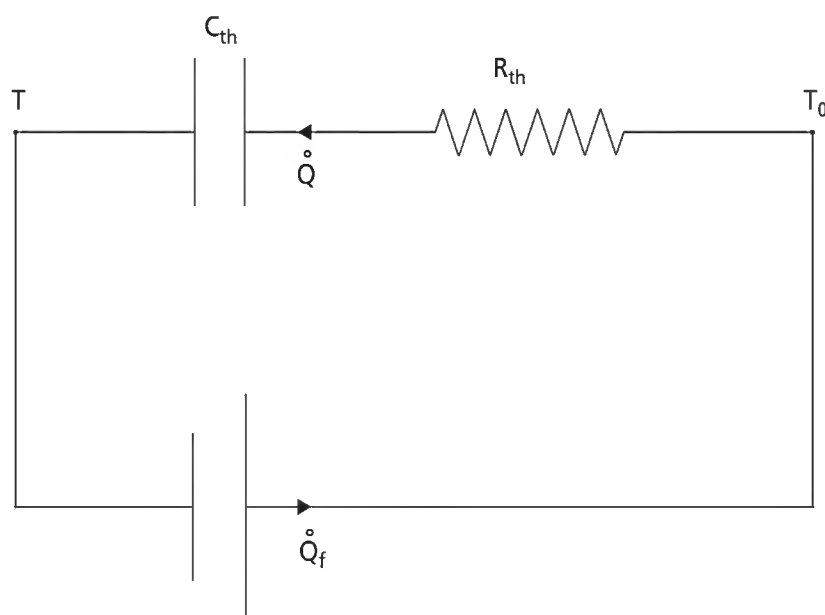
Si bien qu'en régime dynamique stationnaire final, on a :

$$\dot{q}_f = K_{th}(T_o - T_f) \quad (15.33)$$

$T_f$ , température froide d'équilibre du système (telle que  $\frac{dT}{dt} = 0$ ).



a) enceinte froide en relaxation dans l'ambiance

b) enceinte froide, mise en température par une machine de puissance froide  $\dot{Q}_f$  constante**Figure 15.11** Régime instationnaire d'une enceinte froide  
a) régime de relaxation, b) mise en froid

Par combinaison de (15.32) et (15.33) et intégration, il vient :

$$\frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = e^{-t/\tau_{th}} \quad (15.34)$$

La constante de temps reste la même, mais (15.34) peut s'exprimer en fonction de la puissance froide de la machine sous la forme :

$$T(t) - T_0 = \frac{\dot{Q}_f}{K_{th}} (e^{-t/\tau_{th}} - 1) \quad (15.35)$$

- Notions sur le contrôle-commande et la régulation des systèmes à compression mécanique de vapeur

#### *Principaux dispositifs de contrôle-commande des machines à froid*

On rapporte ici les quatre principaux dispositifs physiques assurant le contrôle des machines à froid.



Tube capillaire (figure 15.12.a) : ce dispositif est le plus « rustique » avec égalisation de pression dans le temps ; il est allié au contrôle en marche tout ou rien du compresseur. Le choix du capillaire est un compromis difficile (choix de son diamètre et de sa longueur).

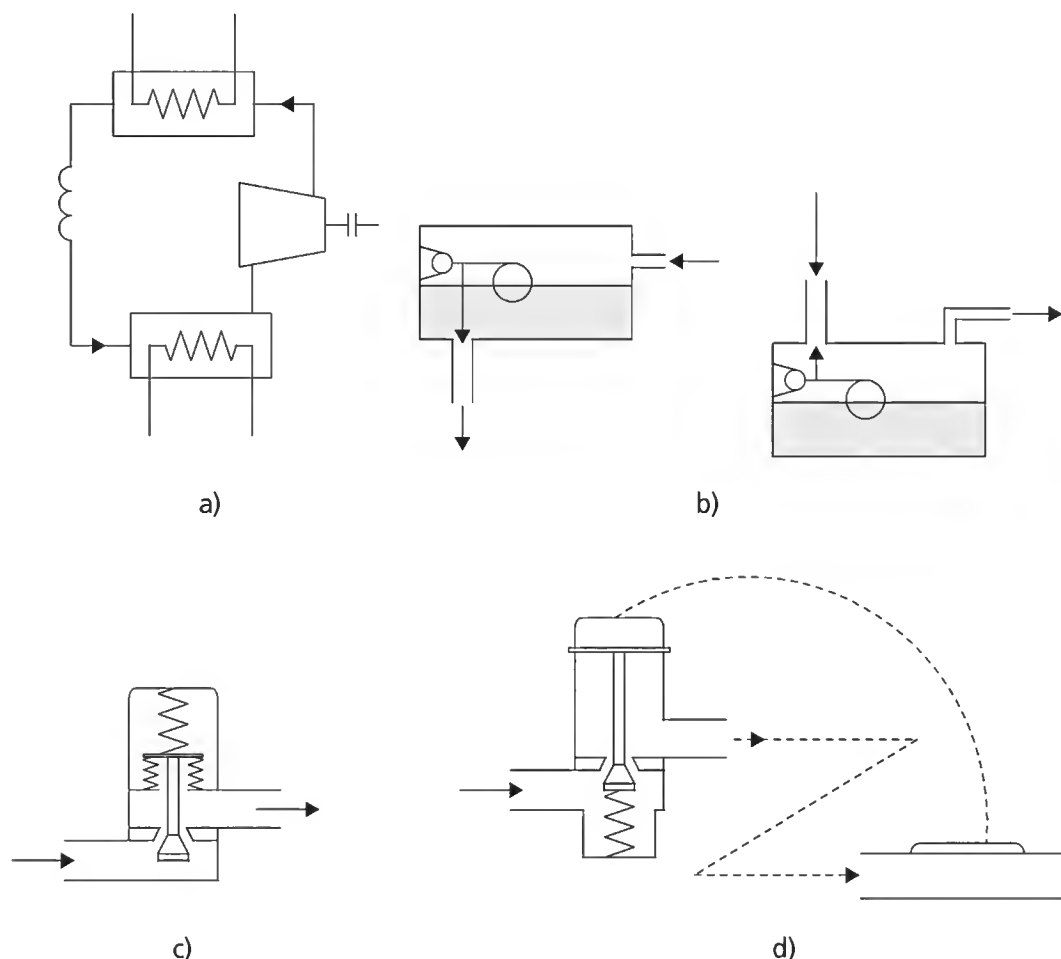


Figure 15.12 Quatre dispositifs de contrôle en détente de la machine à froid

Régulation de niveau du réservoir à condensat : cette régulation peut s'effectuer par commande aval ou commande amont (voir figure 15.12.b) ; la commande aval fait qu'il y a peu de contrôle sur la pression et la température d'évaporation. La commande amont quant à elle répond aux besoins de l'évaporateur, mais elle n'est pertinente qu'avec un évaporateur noyé, ce qui assure en revanche un meilleur transfert de chaleur sur les surfaces complètement mouillées de cet échangeur.

Vanne pressostatique : le contrôle de la pression d'évaporation peut se faire par une vanne pressostatique (figure 15.12.c) commandée par la pression d'évaporateur, ou par la pression en sortie de détendeur ; cette pression agit sur un soufflet (ou diaphragme) commandé par un ressort à position fixe ou ajustable : la vanne s'ouvre (ou se ferme) selon que la pression d'évaporation diminue (ou augmente).

Ce dispositif fonctionne bien comme régulateur, pour un fonctionnement à charge fixe. Il n'en est plus de même à charge variable.

Vanne thermostatique : une façon de résoudre les insuffisances précédentes consiste à mettre en œuvre une vanne thermostatique (voir figure 15.12.d). Ce dispositif régule alors la surchauffe en sortie d'évaporateur (différentiel de température).

### *Autres dispositifs de contrôle et évolutions actuelles*

Sur une machine, le contrôle précédent surtout dédié à la maîtrise de l'EU est complété par :

- le contrôle de refroidissement de condenseur : ce contrôle se fait par ajustement de débit de fluide de refroidissement (eau, air), par vanne tout ou rien, par étagement des pompes ou ventilateur ;
- le contrôle de séparateur d'huile : ce contrôle a pour but un bon retour d'huile et une bonne lubrification ;
- le contrôle du moteur électrique : ce contrôle assure la limitation en pression haute  $P_H$ , et en pression basse  $P_B$  ;
- le dégivrage : cette opération qui peut s'effectuer par arrêt de l'appareil, chauffage électrique (traçage), renversement de cycle, est commandé par le différentiel de température, entre l'air et le fluide frigorigène (voir le paragraphe 13.5.3).

Les changements de fluides frigorigènes, induits par les accords internationaux visant à la protection de l'environnement (fluides moins performants et nouvelles contraintes), ne sont pas toujours compatibles avec une optimisation énergétique.

Il en découle une tendance à une évolution technique (pression de condensation flottante, détendeurs électroniques, variation électronique de vitesse) ; cela pousse à la recherche et la mise en œuvre d'algorithmes de commandes rendus possibles par l'usage commun de la microinformatique. Des recherches sont en cours sur ce thème depuis quelques années (Leducq D., Sublon J.).

## **15.2.2 Principales variantes des machines à compression de vapeur**

### *a) Compression et détente étagées*

La figure 15.13 représente dans le diagramme entropique une compression étagée.

Le passage de la pression  $P_B$  à la pression  $P_H$  se fait par une pression intermédiaire  $P_i$ , qui sauf contrainte particulière, peut être choisie de façon optimale ; on peut facilement montrer que pour le gaz parfait avec refroidissement intermédiaire jusqu'à la température initiale  $T_1$ , la pression optimale est  $P_i = \sqrt{P_H \cdot P_B}$ .

Ce résultat se généralise au-delà de deux étages, pour rejoindre au mieux la compression isotherme, qui est la plus économique.

On voit les avantages de la compression étagée avec refroidissement intermédiaire (jusqu'au point de saturation vapeur) sur la figure 15.13 : diminution de la température de sortie haute pression ( $T_2 \rightarrow T_4$ ), diminution du travail mécanique à

fournir proportionnel à l'aire ( $2''2'43$ ), moindre coût des compresseurs (et encombrement).

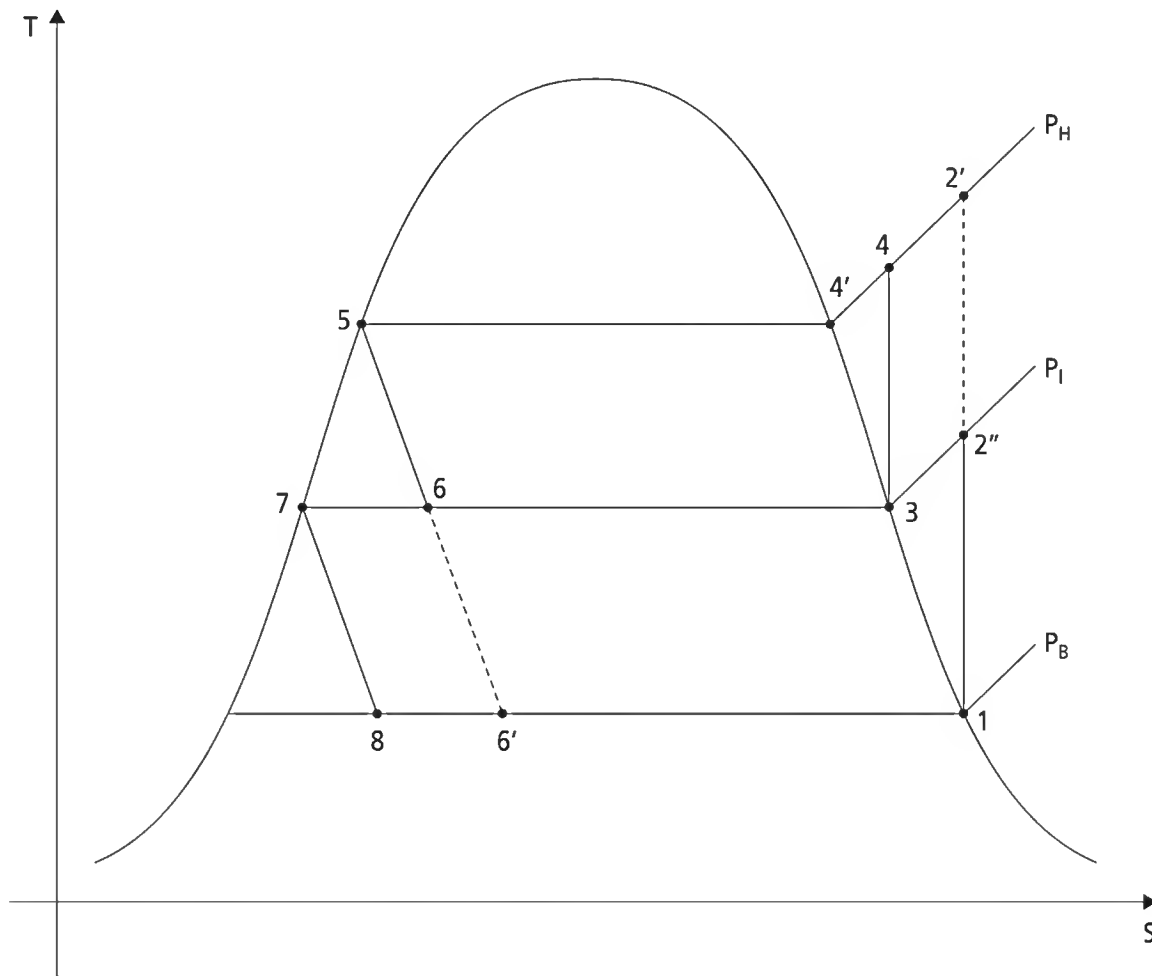


Figure 15.13 Machines améliorées : compression et détente étagées.

Contrairement à la compression, la détente isenthalpique ne fait pas intervenir de restriction mécanique. Néanmoins, l'usage d'effets frigorifiques à des niveaux de température différents ( $P_i$ , imposée dans ce cas) justifie cette variante.

On voit par ailleurs apparaître sur la figure la possibilité de n'alimenter le détendeur vers la basse pression qu'en liquide (détente partielle à partir du point 7) ; dans ce cas l'effet frigorifique spécifique à la basse pression est augmenté ( $\Delta h_{ev}$  passe de  $\Delta h_{6'-1}$  à  $\Delta h_{8-1}$ ).

### Couplage des compressions et détente

L'utilité d'une machine étagée se fait sentir dans deux cas : pour la production de froid à plusieurs niveaux de température et lorsque l'écart entre la température de condensation et celle d'évaporation devient trop important, entraînant une diminution de la puissance frigorifique spécifique.

Pour cela, on opère un fractionnement de la compression et de la détente, combiné avec la réaspiration des vapeurs intermédiaires conformément au schéma à deux étages et au diagramme  $(T, s)$  correspondant (figure 15.14).

Lorsque la compression et la détente s'effectuent en deux temps, la masse de fluide parcourant chacun des étages est différente. L'étage basse pression cycle 1 kg de fluide alors que l'étage haute pression cycle  $(1 + a)$ .

Au point 7, la masse de fluide vaporisée est telle que :

$$a = (1 + a)x_7$$

Ayant cette relation, il est facile de réaliser le bilan thermodynamique de l'installation, et de déterminer les rendements correspondants.

Il apparaît directement sur le diagramme que l'effet frigorifique  $\Delta h_{ev} = h_1 - h_9$  a été augmenté de la quantité  $(h_8 - h_7)$ .

Le travail moteur  $\Delta W$  a parallèlement subi deux influences contradictoires se compensant : le refroidissement du fluide entre les deux étages, et d'autre part le débit massique plus important au second étage. Il en résulte un accroissement faible du travail laissant l'avantage à l'augmentation de  $\Delta h_{ev}$ .

Il est possible de parfaire l'avantage précédent en aspirant au second étage de la vapeur saturée sèche ( $4 \equiv 10$ ). Pour cela, il faut faire barboter la vapeur surchauffée sortant du 1<sup>er</sup> étage dans le séparateur.

Il en résulte pour un débit massique unitaire au premier étage une vaporisation supplémentaire  $b$  dans le séparateur telle que :

$$(1 + a + b)h_7 + h_3 = h_8 + (1 + a + b)h_{10}$$

Production de froid à plusieurs niveaux de température : l'installation correspondante est une variante de l'installation précédente (figure 15.15).

L'effet frigorifique se décompose donc en un échange de chaleur spécifique dans l'évaporateur 1 tel que  $\Delta h_{ev1} = h_{10} - h_7$  et celui dans l'évaporateur 2 tel que  $\Delta h_{ev2} = h_1 - h_9$ .

$a$  désignant le débit massique de fluide réaspiré sous forme vapeur en 11, on a comme précédemment  $a = (1 + a)x_{10}$ . La détermination de  $x_{10}$  est donc nécessaire. Celle-ci peut se faire à partir de la connaissance du rapport des puissances frigorifiques à fournir :

$$\frac{\frac{q_1}{q_2}}{\frac{q_1}{q_2}} = \frac{(1 + a) \Delta h_{ev1}}{\Delta h_{ev2}} = \frac{1}{1 - x_{10}} \cdot \frac{L_{V_1}(x_{10} - x_7)}{L_{V_2}(x_1 - x_9)} = \rho$$

D'où :

$$x_{10} = \frac{\rho L_{V_2}(x_1 - x_9) + L_{V_1}x_7}{\rho L_{V_2}(x_1 - x_9) + L_{V_1}}$$

qui entraîne la connaissance de  $a$  et du point 4 :

$$h_4 = h_3 - a(h_{11} - h_4)$$

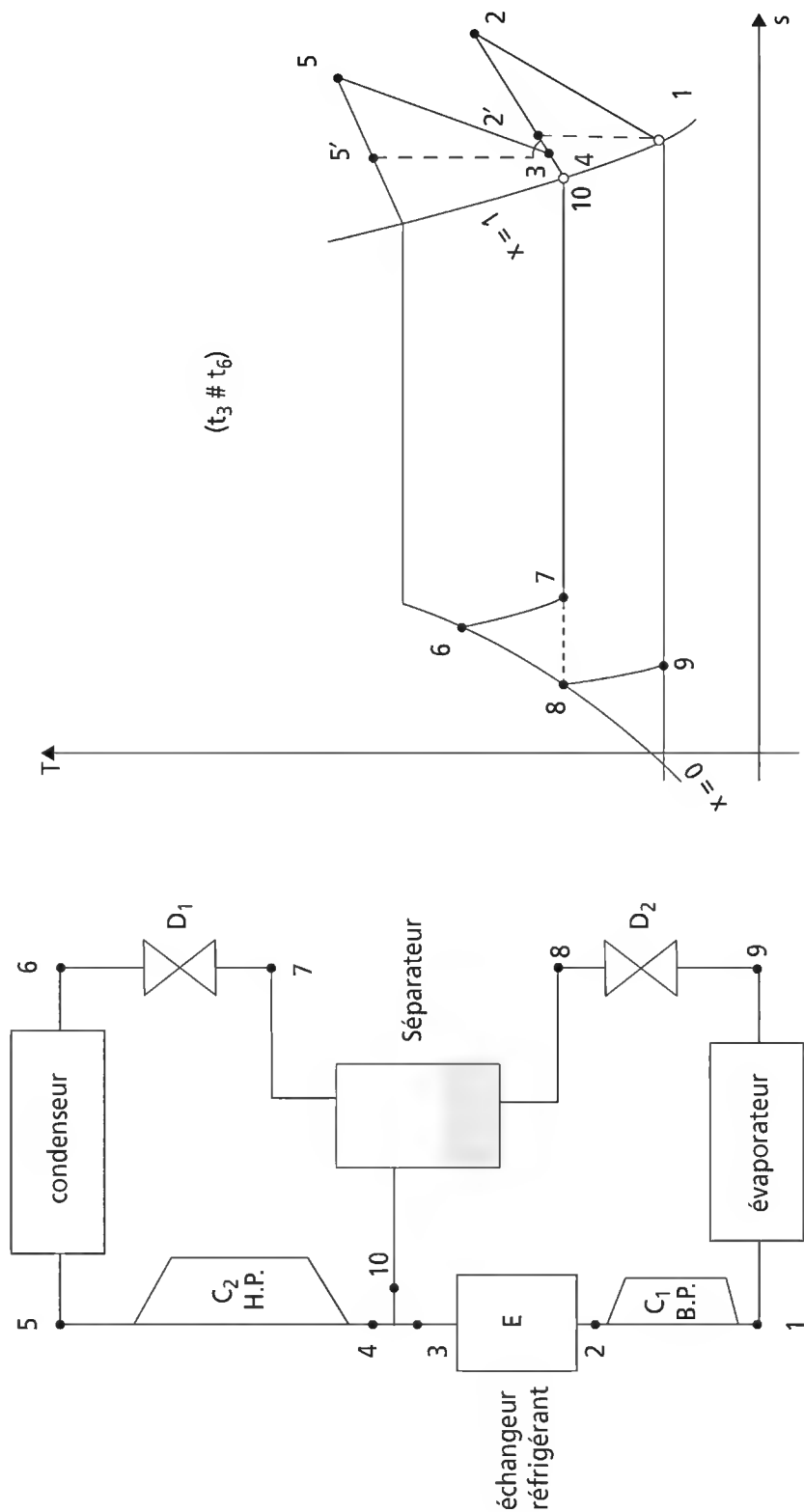


Figure 15.14

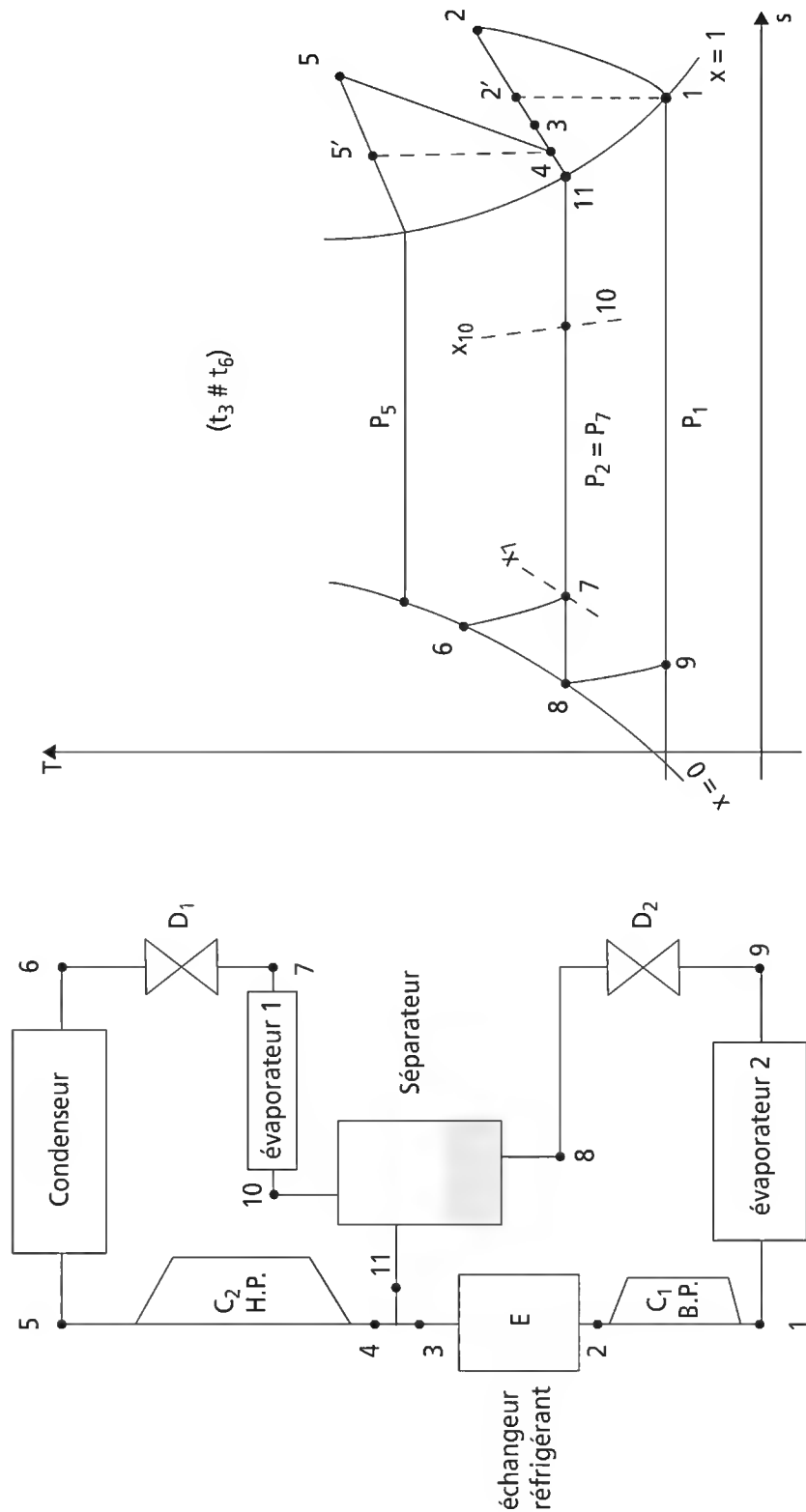


Figure 15.15

Il en résulte la valeur des débits massiques à cycliser :

$$\dot{m}_2 = \frac{\dot{q}_1}{(1+a)\Delta h_{ev}} = \frac{\dot{q}_2}{\Delta h_{ev2}} \text{ et } \dot{m}_1 = \dot{m}_2(1+a)$$

Le travail isentropique spécifique total correspondant :

$$\Delta W_{S_r} = \left( h_2' - h_1 + \frac{h_5' - h_4}{1 - x_{10}} \right)$$

permettrait de définir un COP frigorifique isentropique moyen :

$$\overline{\text{COP}} = \frac{\Delta q_1(1+a) + \Delta q_2}{\Delta W_{S_r}}$$

sans grande utilité pratique.

Les seules données intéressantes sont en effet les rendements frigorifiques relatifs à chaque étage.

Remarquons qu'au niveau de l'étage haute pression, le point 4 appartient au domaine des vapeurs surchauffées alors que le point 11 est sur la courbe de saturation, donc le rendement frigorifique isentropique de l'étage haute pression est plus faible que si la compression commençait en 11. Le rendement frigorifique spécifique de l'étage basse pression correspond en revanche à celui obtenu pour la machine frigorifique étagée.

Ainsi, l'effet frigorifique dans l'évaporateur 1 étant plus faible que celui d'une machine à froid classique, alors que celui de l'évaporateur 2 correspond à une machine à froid à deux étages, cette solution ne sera adoptée que si l'effet frigorifique global est trop faible pour justifier l'emploi de deux machines.

### b) Machines en cascade

#### ➤ Modèle classique de machine à deux fluides

Lorsque la température d'évaporation désirée est très basse, inférieure à  $-70^\circ\text{C}$ , on utilise une variante du montage précédent faisant intervenir une cascade de fluides (deux fluides lorsque la température reste supérieure à  $-100^\circ\text{C}$ ). On évite de ce fait un certain nombre de contraintes quant à la température du point triple du fluide, aux pressions trop faibles dans l'évaporateur qui entraînent en particulier un volume spécifique important à l'aspiration.

Un cycle s'effectuant au voisinage du point critique est aussi très désavantageux, car il diminue l'efficacité au niveau de la condensation.

On représente (figure 15.16) le schéma de principe de la machine à deux fluides, la plus courante. Les fluides intervenant au niveau de la très basse température sont l'éthane, l'éthylène pour les raisons indiquées ci-dessus. Récemment, Dincola G. a proposé une cascade utilisant le R717 ( $\text{NH}_3$ ) pour l'étage haute température, et des mélanges à base de R744 ( $\text{CO}_2$ ) pour l'étage basse température ; cela permet de proposer une machine en cascade à deux étages pour une température froide de  $-70^\circ\text{C}$ .

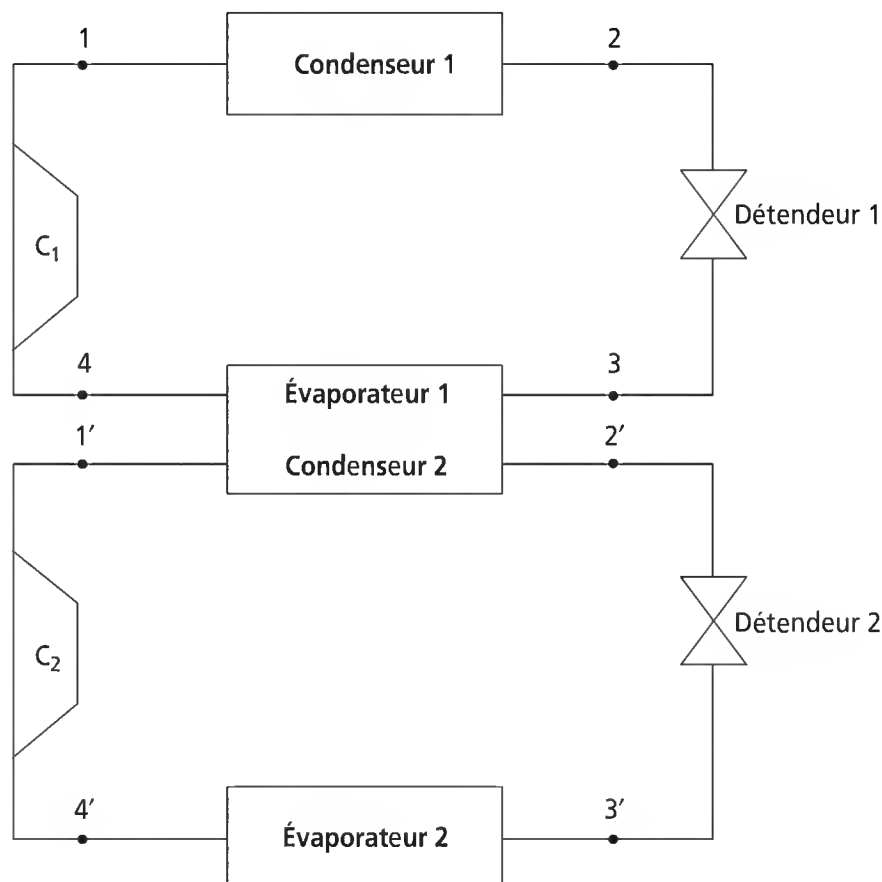


Figure 15.16 Machine en cascade à deux étages.

Le condenseur de la machine à basse température est refroidi à l'eau, tandis que le condenseur de la machine à très basse température est refroidi par le fluide frigorigène courant. L'effet frigorifique recherché est donc égal à :

$$(h_4' - h_3') \cdot \dot{m}' = \dot{q}'$$

$\dot{m}'$  désignant le débit massique de fluide à très basse température.

Si l'on suppose d'autre part l'échange de chaleur parfait entre l'évaporateur basse température et le condenseur très basse température, on a :

$$\dot{m} \cdot (h_4 - h_3) + \dot{m}' \cdot (h_2' - h_1') = 0$$

$\dot{m}$  désignant le débit massique de fluide à basse température.

Il en résulte l'expression du travail isentropique fourni par les compresseurs :

$$\dot{W}_s = \dot{m}' \cdot (h_2' - h_1') + \dot{m} \cdot (h_2 - h_1)$$

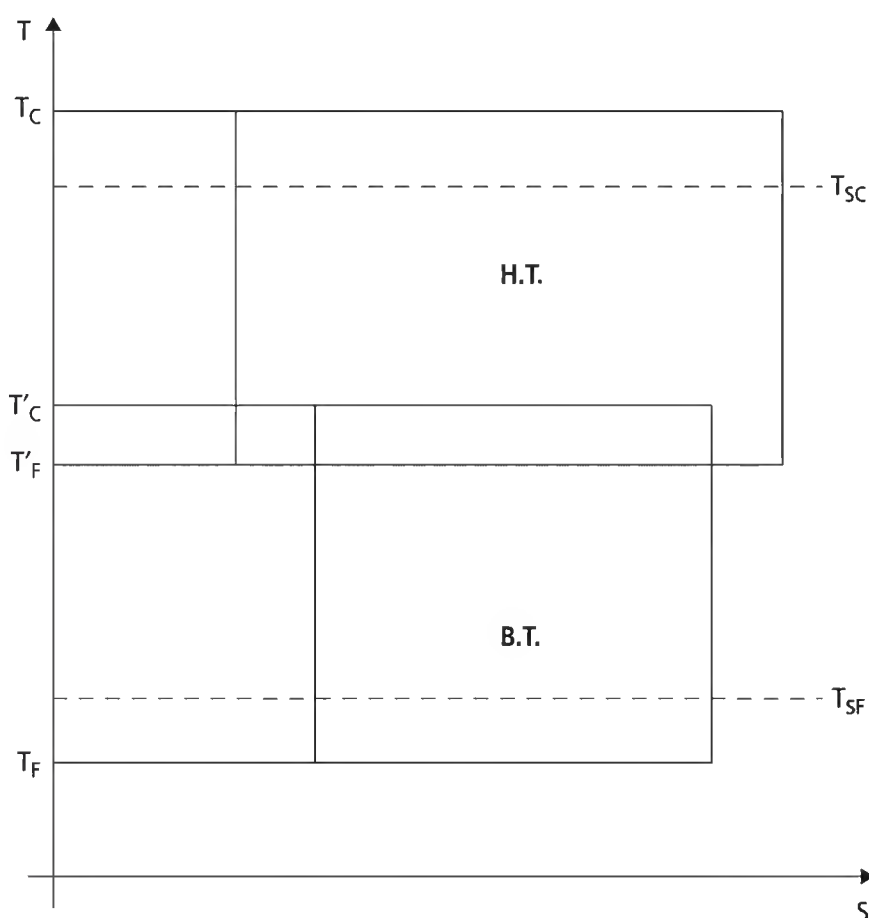
On en déduit facilement l'expression des rendements, et pour un effet frigorifique voulu, les débits des fluides respectifs, ainsi que les puissances de compression nécessaires. D'où le dimensionnement de la machine, sachant qu'il est possible d'améliorer les performances par certaines des variantes proposées précédemment.



**Remarque :** pour des températures inférieures à  $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , les machines frigorifiques à gaz permanent présentent un intérêt pratique par rapport aux machines à fluides condensables.

► Un exemple d'application de la thermodynamique en dimensions finies

Soit un cycle en cascade à deux étages, adiabatiques et endoréversible, conformément à la figure 15.17.



**Figure 15.17** Représentation dans le diagramme entropique d'un cycle en cascade endoréversible à deux étages.

En supposant des lois de transfert de chaleur linéaire et un régime de fonctionnement dynamique stationnaire, on recherche la répartition des conductances correspondant au minimum de dépense énergétique  $\left(\min \dot{w}\right)$  à effet utile imposé  $\dot{q}_c = \dot{q}_o$ , pour un fonctionnement en pompe à chaleur.

Expression des transferts thermiques en variables conductances de transfert :

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_c &= K_c (T_{SC} - T_c) \\ \dot{q}_i &= K_i (T'_c - T_F) \end{aligned} \right\} \text{ machine HT}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i' &= -\dot{q}_i = K_i(T_F' - T_c') \\ \dot{q}_F &= K_F(T_{SF} - T_F) \end{aligned} \right\} \text{ machine BT}$$

Conservation de l'énergie :

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_{HT} &= -(\dot{q}_c + \dot{q}_i) \\ \dot{w}_{BT} &= -(-\dot{q}_i + \dot{q}_F) \end{aligned} \right\} \dot{w}_T = -(\dot{q}_c + \dot{q}_F)$$

Bilans entropiques :

$$\frac{\dot{q}_c}{T_c} + \frac{\dot{q}_i}{T_F} = 0 \quad (15.36)$$

$$-\frac{\dot{q}_i}{T_c} + \frac{\dot{q}_F}{T_F} = 0 \quad (15.37)$$

Expression du  $COP_{PAC}$  :

$$COP_{PAC} = \frac{\left| \dot{q}_u \right|}{\dot{w}_T} = \frac{-\dot{q}_c}{-\dot{q}_c + \dot{q}_F} = \frac{K_c(T_{SC} - T_c)}{K_c(T_{SC} - T_c) + K_F(T_{SF} - T_F)}$$

Le problème à résoudre comporte quatre variables  $(T_c, T_F', T_c', T_F)$ , cinq paramètres  $(T_{sc}, T_{sf}, K_c, K_i, K_F)$  ; une FO (le COP) et deux contraintes (équations 15.36 et 15.37 ; il possède donc deux degrés de liberté.

En fait, le  $COP_{PAC}$  s'exprime en fonction de  $(T_c, T_F)$  et du rapport des températures intermédiaires  $(T_F'/T_c')$  : les contraintes 15.36 et 15.37 et la contrainte d'effet utile imposé fournissent  $T_c, T_F$  et le rapport précédent en fonction des paramètres du problème.

En remarquant que  $MAXCOP_{PAC}$  correspond dans ce cas à  $\min \dot{w}_T$ , l'optimisation en conductances variables conduit à la recherche du min de la FO suivante :

$$\dot{w}_T = \dot{q}_o \left[ 1 - \frac{T_{SF}}{T_{SC} + \dot{q}_o \left( \frac{1}{K_c} + \frac{1}{K_i} + \frac{1}{K_F} \right)} \right]$$

avec la contrainte de limitation (dimensions finies) en conductance :

$$K_C = K_F = K_i = K = \frac{K_T}{3}$$

**Remarque :** le  $MAX(COP_{PAC})$  associé vaut

$$MAXCOP_{PAC} = \frac{\dot{q}_o}{\min \dot{W}_T} = \frac{1}{1 - \frac{T_{SF}}{T_{SC} + 9\dot{q}_o / K_T}}$$

### c) Quelques exemples d'utilisations particulières

#### ► D'autres variantes

Aux deux types de variantes précédentes des machines CMV, il y a lieu d'ajouter de nombreuses autres selon les cas :

Le cycle avec échangeur sous-refroidisseur de liquide-surchauffeur de vapeur : ce dispositif permet sans trop de frais, une gestion plus efficace de la chaleur sensible du cycle, par adjonction d'un petit échangeur de chaleur supplémentaire,

L'inversion du cycle : elle permet d'utiliser la machine tant en rafraîchissement qu'en chauffage, au dépens d'une circuitrie, un peu plus complexe, mais surtout d'une moindre adaptation des échangeurs, vu que les rôles des évaporateur et condenseur sont permutés.

L'adjonction d'un stockage thermique (chaud ou froid).

#### ► Les pompes à chaleur

Outre l'application machine à froid (EU à la source froide), il ne faut pas négliger les applications avec un effet utile chaud (EU au puits : revalorisation de la chaleur) : conditionnement d'air été-hiver, souvent en pompe à chaleur air-air ; mais il existe aussi des variantes air-eau, eau-air, eau-eau (pompes à chaleur géothermique, à échangeur enterré, voire à capteur solaire dans le cas d'une machine solarisée.

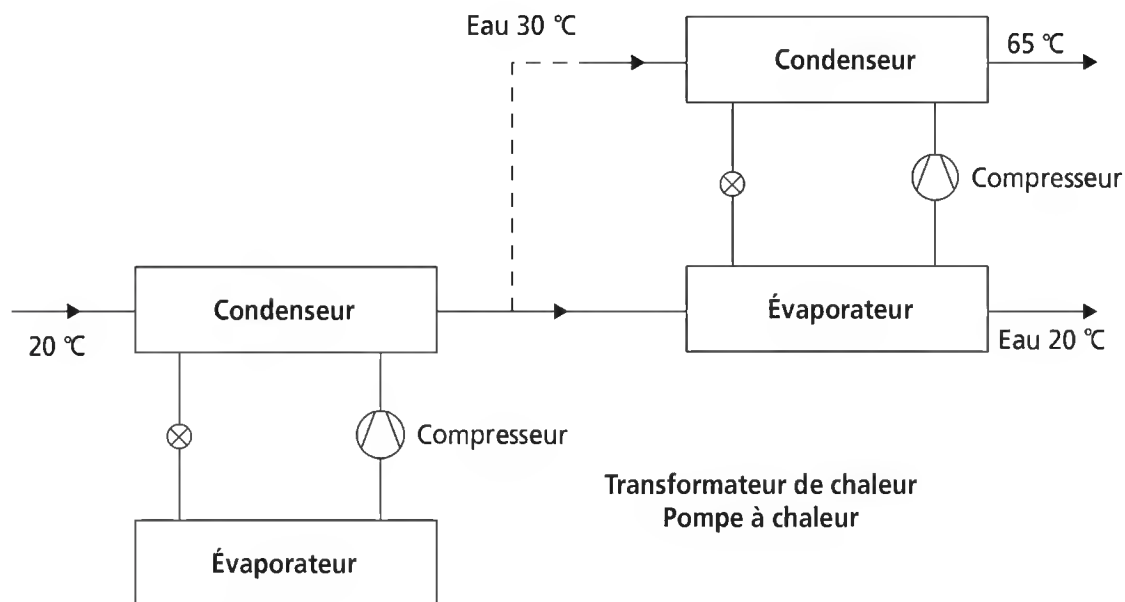
#### *Production d'eau chaude sanitaire (ECS)*

Cette application devient une préoccupation du moment. Elle peut se satisfaire d'une machine simple selon la semi-cascade représentée à la figure 15.18.

Actuellement, de nombreuses études et développements visent à produire de l'ECS, mais par utilisation d'un cycle transcritique avec le frigorigène CO<sub>2</sub>.

On notera sur la figure 15.18 la présence simultanée de deux effets utiles, chaud et froid ; selon le niveau de chaleur désiré, on parle de pompe à chaleur ou de thermo-transformateur. L'utilisation des deux effets utiles conduit en fait à l'appellation thermofrigopompe. Le COP de ce système au sens du premier principe est :

$$COP = \frac{-\dot{q}_c + \dot{q}_F}{\dot{W}} \quad (15.38)$$



Besoins frigorifiques

Figure 15.18 Deux circuits disposés en série sur l'eau pour la production d'ECS.

**Remarque :** on voit sur l'expression (15.38) que le numérateur comporte en fait deux flux de chaleur à des niveaux de température différents ; en conséquence, l'approche au sens du second principe (exergétique) reste préférable et préconisée.

### Les pompes à chaleur dans l'industrie

Les opérations de chauffage et de refroidissement sont du domaine commun industriellement et à des niveaux de température très variés ; chaque cas est donc spécifique. Toutefois, les opérations de séchage-déshumidification sont importantes dans les industries agroalimentaires, les industries du papier, l'industrie des tissus (moquettes). Ces opérations utilisent le plus souvent à la fois l'effet chaud et l'effet froid.

#### ► Les systèmes indirects

Les circuits indirects utilisent des frigoporteurs (ou caloporteurs) *a priori* moins dangereux pour l'environnement et permettant de surcroît un stockage froid (chaud).

#### Les frigoporteurs

Les principaux frigoporteurs sont à base de sels, d'alcool (éthylque) ou de matériaux organiques (éthylène glycol, propylène glycol) ; ces divers corps purs en mélange avec l'eau présentent des points eutectiques qui sont utilisés dans le domaine du froid (stockage froid) ; voir figure 15.19 et (Duminil M.).

Les cryohydrates permettent le stockage froid avec des chaleurs latentes de fusion comprises entre environ 300 kJ/kg et 150 kJ/kg lorsque la température varie entre  $-1\text{ °C}$  et  $-55\text{ °C}$ .

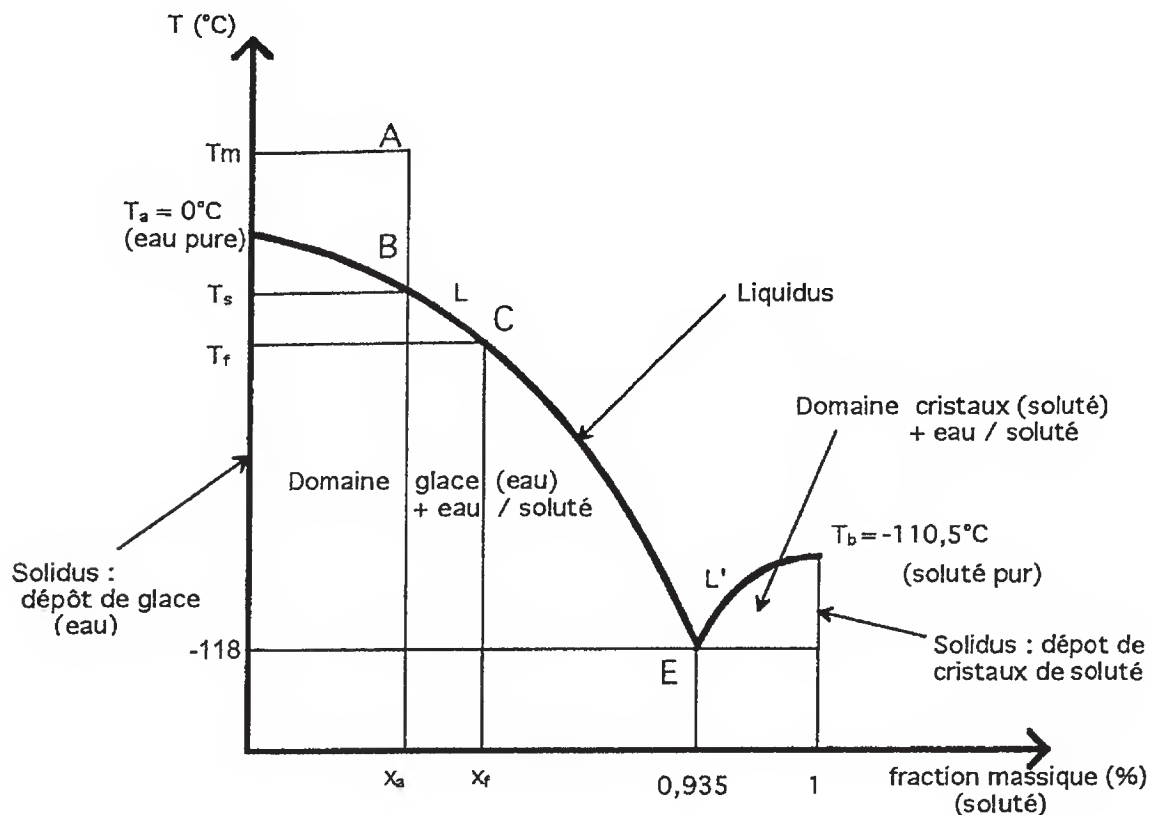


Figure 15.19 Exemple : Diagramme de phases eau-éthanol

Toutefois, ces stockages par plaque eutectique, s'ils sont utilisés en pratique, n'en posent pas moins des problèmes fondamentaux liés aux irréversibilités thermodynamiques (surfusion, résistances thermiques dont interfaciales).

Assez récemment est apparue une autre technique prometteuse pour stocker et conserver du froid.

Un coulis de glace (ou liquisol) est un fluide qui se compose de particules solides de glace dans un liquide, formant ainsi une suspension diphasique.

Cette définition n'est pas unique, et la recherche dans ce domaine évolue rapidement. De nombreuses données commencent à être disponibles, dont sur les caractéristiques d'écoulement de ces fluides à rhéologie atypique (Royon L.). Ces données sont indispensables en vue d'une utilisation optimale.

### Exemples de circuits indirects

La figure 15.20 représente une configuration de circuit indirect avec le générateur de coulis de glace. Il apparaît clairement que ce circuit indirect s'il est couplé avec un réservoir tampon (stockage) nécessite une pompe supplémentaire et introduit des irréversibilités de transfert supplémentaires.

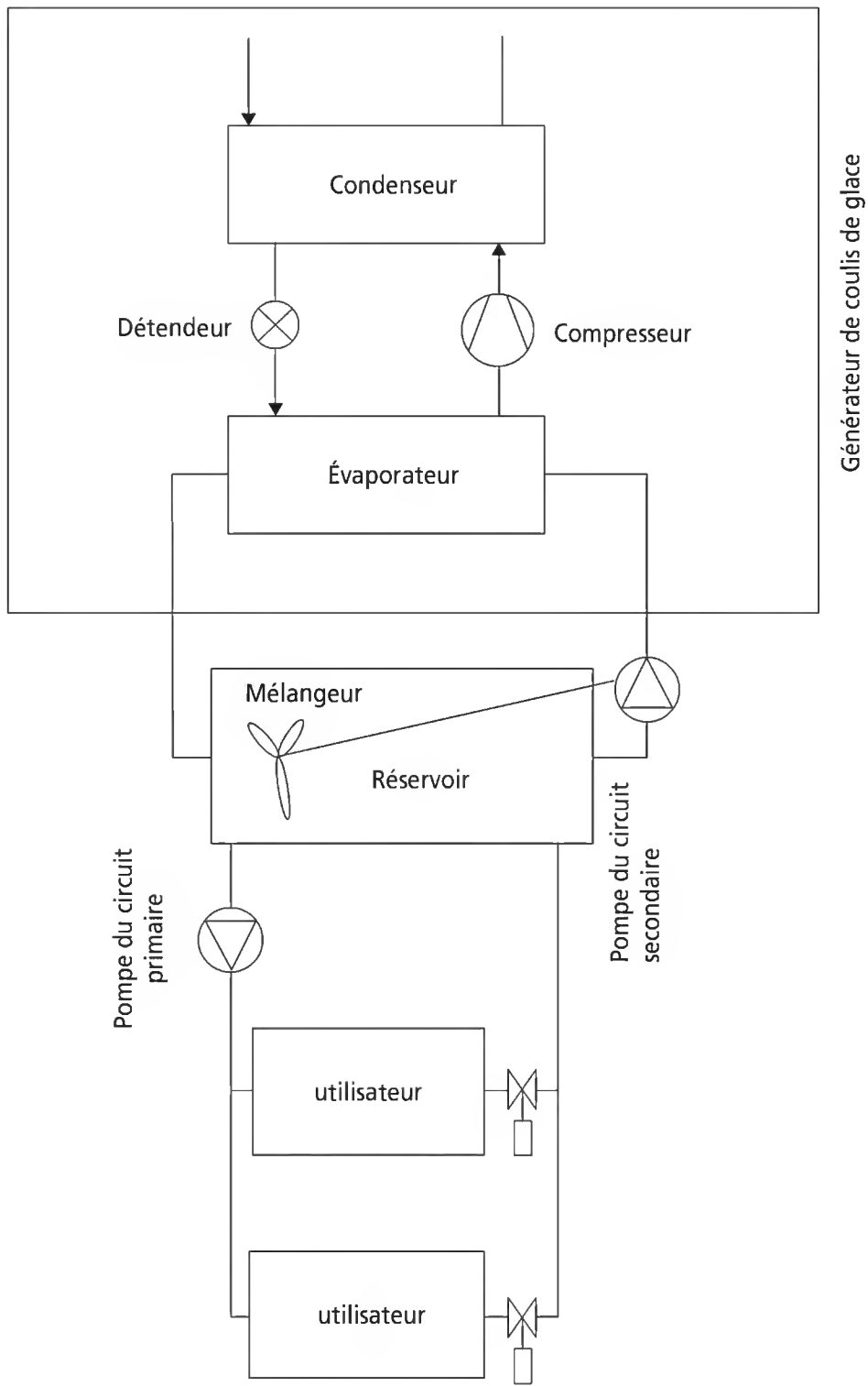


Figure 15.20 Circuit indirect à coulis de glace.

Le réservoir à température constante est dans ce cas mélangé (l'hypothèse courante est celle d'un mélange parfait).

La figure 15.21 montre un circuit indirect avec un stockage qui introduit trois phases possibles pour le fonctionnement : fonctionnement sans stockage, fonctionnement en accumulation, fonctionnement en déstockage.

Les deux derniers modes peuvent être activés totalement ou partiellement. La cuve de stockage peut ici être en chaleur sensible avec stratification (thermocline : cas des installations à ECS et solaires) ; ces derniers systèmes sont d'usage courant.

#### d) La recompression mécanique de vapeur

Le schéma simplifié de cette installation est représenté sur la figure 15.22.

Cette installation permet de concentrer pour recyclage des effluents, et ce de façon avantageuse (agroalimentaire : recyclage de glucose, métallurgie : recyclage d'huile de coupe). Elle permet aussi la production et le recyclage d'eau.

Le schéma fait apparaître l'originalité de la machine par la présence d'un seul échangeur évapo-condenseur ; la configuration de celui-ci est le plus souvent à faisceau tubulaire vertical (échangeur à film tombant). La machine mécanique fonctionne entre deux pressions ( $P_H = P'_{sat}$  ;  $P_B = P_{sat}$ ) très voisines : surpresseur (et non compresseur), faible taux de compression de l'ordre de 1,1.

#### ► Un modèle thermodynamique

Pour développer ce modèle, les hypothèses suivantes sont adoptées :

- dans l'évapo-condenseur, la vapeur et le liquide sont supposés saturés ;
- le régime est dynamique stationnaire et sans pertes thermiques, ni récupération de chaleur.

**Remarque :** cette hypothèse est incluse implicitement par l'entrée de l'effluent à la température de saturation  $T_{sat}$  (préchauffage de l'effluent).

- la solution n'est pas recirculée dans l'installation (pratique courante en fait).

#### Bilans de matière

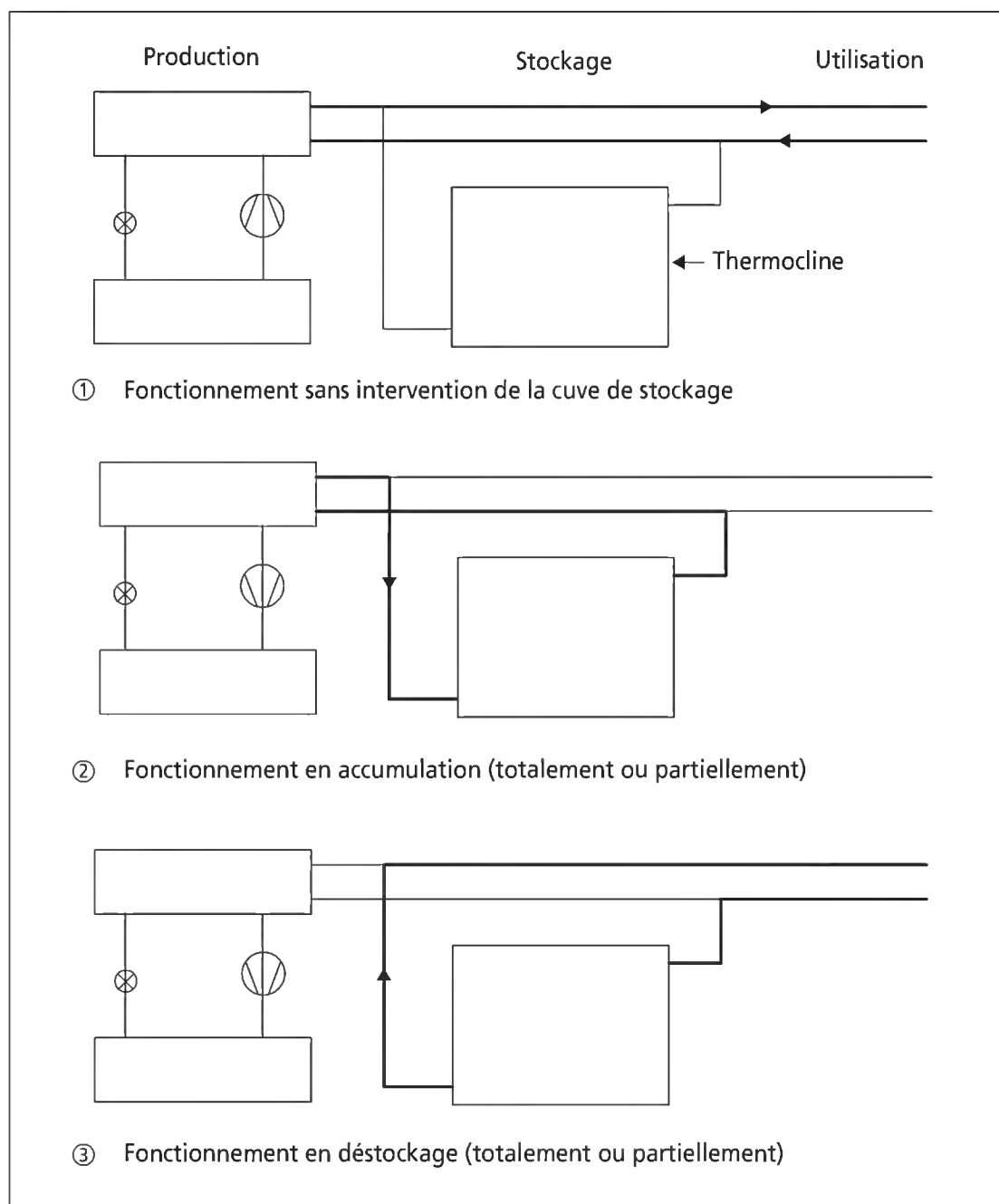
Bilan global :  $\dot{m}_e = \dot{m}_{cd} + \dot{m}_s$ , avec  $\dot{m}_{cd} = \dot{m}$  si on condense toute la vapeur.

Bilan soluté :  $\dot{m}_e x_e = \dot{m}_s x_s$  avec  $x_e, x_s$  titres massiques en entrée et sortie de solution d'où :  $\dot{m} = \dot{m}_e \left( 1 - \frac{x_e}{x_s} \right)$ .

#### Transfert de chaleur dans l'évapo-condenseur

$$\dot{q}_{e-c} = \dot{m} h_{L-V}(T_{sat})$$

$$\dot{q}_{e-c} = \dot{m}_{cd} h_{L-V}(T'_{sat}) + \dot{q}_{appoint}$$



**Figure 15.21** Circuit indirect avec stockage.



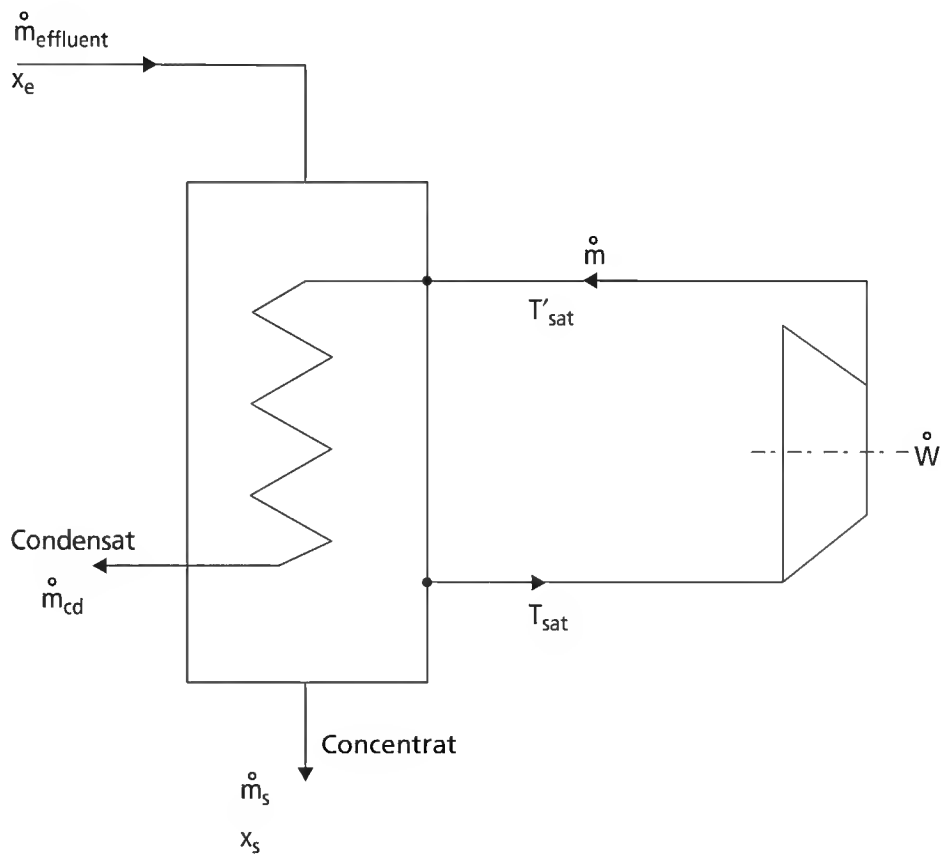


Figure 15.22 Représentation schématique d'une installation à recompression mécanique de vapeur.

**Remarque :** il apparaît sur le diagramme de Mollier de l'eau, la nécessité d'un appoint ( $\Delta h_{L-V}(T'_{sat}) < \Delta h_{L-V}(T_{sat})$ ) si  $\dot{m}_{cd} = \dot{m}$ .

$$\dot{q}_{e-c} = kg \cdot A (T'_{sat} - T_{sat}) = kg \cdot A \cdot \Delta T \quad (15.39)$$

**Remarque :**  $kg$  reste à exprimer ; il vaut pour l'eau de l'ordre de  $3\,000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ .

*Bilan d'énergie du système*

$$\dot{m}_e h_L(T_{sat}) + \dot{W} + \dot{q}_{\text{appoint}} = \dot{m}_s h_L(T_{sat}) + \dot{m} h_L(T'_{sat})$$

En combinant les bilans matière et énergie, il vient :

$$\dot{W} = \dot{m} [h_L(T'_{sat}) - h_L(T_{sat})] - \dot{q}_{\text{appoint}}$$

Il apparaît sur cette dernière expression que la surchauffe de compression (et, ou l'appoint) compense le déficit en chaleur latente (et, ou la non-adiabacité).

En supposant que la vapeur se comporte comme un gaz parfait subissant une compression isentropique et sans surchauffe, il vient pour  $\dot{W}$  :

$$\dot{W} = \dot{m} \cdot C_{p_v} (T'_{sat} - T_{sat}) = \dot{m} \cdot C_{p_v} \cdot \Delta T \quad (15.40)$$

$C_{p_v}$ , chaleur spécifique massique de la vapeur supposée constante entre  $T_{sat}$  et  $T'_{sat}$ .

Il en résulte la consommation spécifique massique de l'installation  $\frac{\dot{W}}{\dot{m}}$ , critère courant pour cette installation : il est proportionnel à  $\Delta T$ . En effet, l'effet utile est l'extraction d'eau.

### ► Une première approche thermoéconomique

#### *Coût de fonctionnement*

Dans cette approche, on néglige le coût de circulation des fluides, hormis la compression de la vapeur. Il vient alors :

$$C_F = v_{méca} \dot{m} \cdot C_{p_v} \Delta T \Delta t \quad (15.41)$$

avec  $v_{méca}$ , prix de l'unité d'énergie mécanique, et  $\Delta t$ , durée de vie de l'installation

#### *Coût d'investissement*

Il comporte les coûts des deux composants évapo-condenseur et surpresseur, conformément aux corrélations économiques :

$$C_I = v_{éch} \cdot A + v_{comp} \cdot \dot{W} \quad (15.42)$$

En combinant les relations 15.39, 15.40 et 15.42, le coût d'investissement est :

$$C_I = \dot{m} \left[ v_{éch} \cdot \frac{h_{LV}(T_{sat})}{kg \Delta T} \right] + v_{comp} C_{p_v} \cdot \Delta T \quad (15.43)$$

#### *Optimisation des coûts*

La relation (15.43) fait apparaître un minimum d'investissement par rapport à la variable  $\Delta T$ , tel que :

$$\Delta T_{opt} = \sqrt[2]{\frac{v_{éch}}{v_{comp}} \cdot \frac{h_{LV}(T_{sat})}{kg \cdot C_{p_v}}} \quad (15.44)$$

**Remarque :** En fait,  $kg$  est une fonction de  $\Delta T$ , qu'il est possible d'explicitier ; l'optimisation devient alors numérique (Hayani Mounir S.).

Les relations (15.41) et (15.43) déterminent par somme le coût global de l'installation  $C_G$  ; celui-ci admet un minimum différent correspondant à :

$$\Delta T_{Gopt} = \sqrt[2]{\frac{v_{éch}}{v_{comp} + v_{méca}} \cdot \Delta t \cdot \frac{h_{LV}(T_{sat})}{kgCp_v}} \quad (15.45)$$

Dans les deux cas, on voit apparaître le même paramètre physique ; par contre les rapports des valeurs économiques diffèrent d'autant plus que  $\Delta t$  et  $v_{méca}$  augmentent. Dans tous les cas,  $\Delta T_{Gopt} < \Delta T_{iopt}$ .

## 15.3 LES MACHINES THERMIQUES

Développées parallèlement, ces machines constituent une alternative de plus en plus crédible aux machines étudiées ci-dessus.

### 15.3.1 Les configurations des machines à sorption

On décrit ci-après les trois principales configurations des machines à sorption.

#### a) La machine à absorption

Historiquement, la machine à absorption s'est développée en même temps que la configuration simple de la machine à compression de vapeur ; mais en raison des progrès technologiques des compresseurs, la machine à absorption a disparu dans les années 1950, pour réapparaître avec la crise de l'énergie, surtout aux États-Unis et au Japon.

Le schéma général de cette machine correspond à un fonctionnement en régime dynamique stationnaire (cycle de type continu), tel que représenté sur la figure 15.23.

Cette machine comporte quatre échangeurs-réacteurs ; c'est donc une machine à quatre contacts thermiques.

#### b) La machine à résorption

Cette seconde configuration est illustrée par la figure 15.24. On peut voir par comparaison des figures 15.23 et 15.24 que la partie identique correspond au « compresseur thermique ». L'ensemble classique condenseur-détendeur-évaporateur est remplacé par l'ensemble résorbeur-dégazeur.

Le calcul de ces machines tant à absorption qu'à résorption se fait par l'usage de diagrammes de Oldham (voir annexe 4) et de Merkel ; ces deux diagrammes synthétisent les propriétés des mélanges utilisés. Les mélanges les plus développés sont :  $H_2O$  (frigorigène) – LiBr pour le froid positif (climatisation) ;  $NH_3$  (frigorigène) –  $H_2O$  en froid négatif.

#### c) La machine à adsorption

Ce dernier type de machine reste du domaine du développement, bien qu'il en existe quelques réalisations industrielles. Pour ces machines, les cycles associés sont

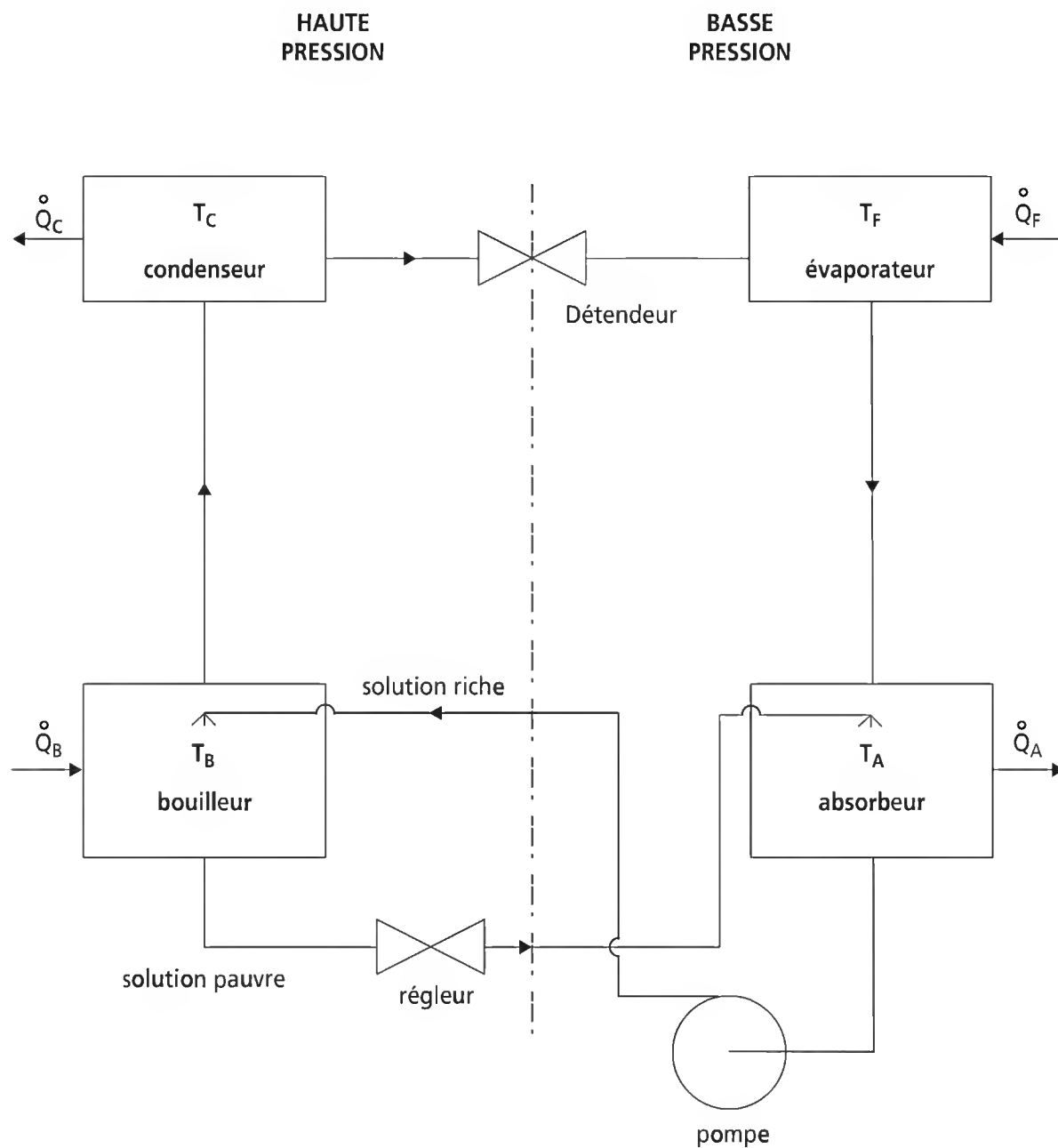


Figure 15.23

fondamentalement discontinus, et les propriétés physiques utilisées sont relatives à un couple fluide frigorigène-solide (cela explique les discontinuités). Le phénomène d'adsorption peut être soit physique, soit chimique ; les réactions chimiques sont généralement plus énergétiques, mais moins réversibles que les réactions physiques. Le lecteur intéressé peut se reporter à la synthèse de la référence (Luo L.).

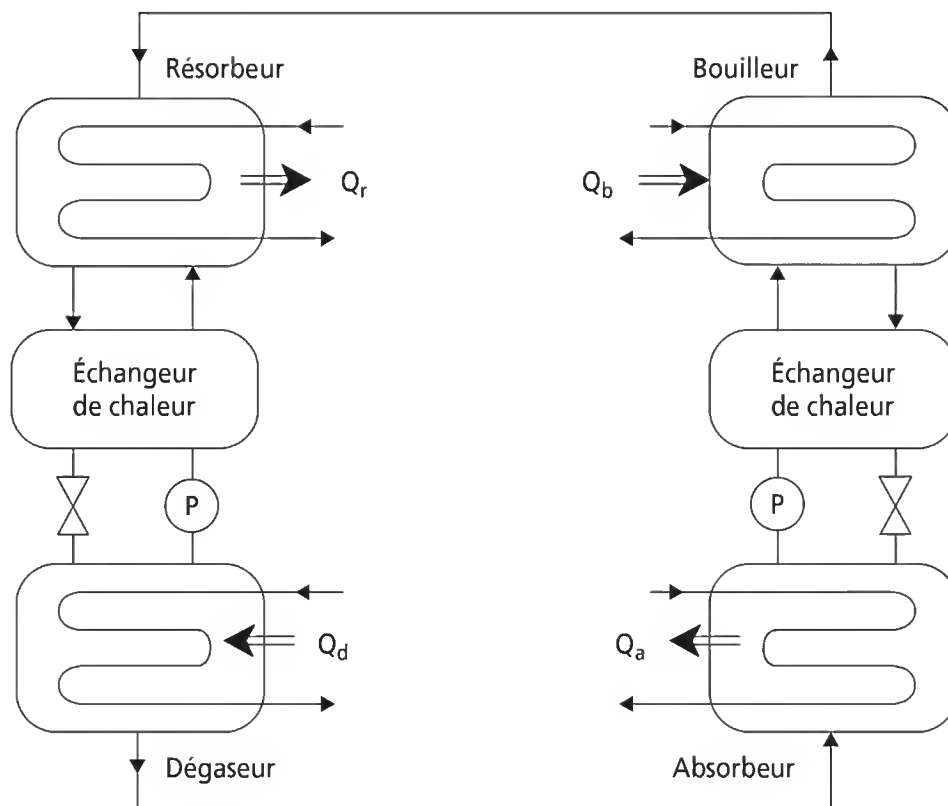


Figure 15.24

#### d) Un exemple de calcul

##### ► Position du problème

La variante de machine à froid étudiée utilise le couple ammoniac-eau pour produire du froid (puissance utile  $\dot{q}_F = 100 \text{ kW}$ , à la température utile de  $t_u = 0 \text{ °C}$ ). La condensation et l'absorption se font en parallèle à la même température de  $t_i = 30 \text{ °C}$ .

On suppose que les trois échangeurs précédents sont dimensionnés pour le même pincement d'échangeur ( $\Delta T = 5 \text{ K}$ ). Le bouilleur (désorbeur) est chauffé par une vapeur saturée à basse pression ( $t_{sat} = 120 \text{ °C}$ ), telle que la température de solution chauffée soit en moyenne à  $100 \text{ °C}$  (écart de  $20 \text{ °C}$ ). On se propose de montrer que la puissance de la pompe de circulation de solution est négligeable par rapport à la puissance utile de réfrigération.

##### ► Détermination du débit d'ammoniac

L'utilisation du diagramme de l'ammoniac permet la représentation du point de sortie de condenseur (hypothèse d'un liquide saturé à  $t_c = + 30 \text{ °C}$ ), suivi d'une détente isenthalpe jusque  $t_E = - 5 \text{ °C}$  ; l'effet frigorifique spécifique qui en résulte suppose une vapeur saturée en sortie d'évaporateur :  $\Delta h_{ev} = 1130 \text{ kJ/kg}$ .

On en déduit le débit d'ammoniac à cycler :

$$\dot{m}_{NH_3} = \frac{\dot{q}_F}{\Delta h_w} = 88,5 \text{ g/s}$$

► Représentation du cycle de la machine en diagramme de Oldham

Le diagramme de Oldham permet de relier les pressions à l'inverse des températures absolues (ou aux températures en °C). On a vu que la connaissance de  $t_F$  et  $t_C$  (identique à la température d'absorption  $t_A = t_C = t_I = + 30 \text{ °C}$ ) fixait les pressions basse ( $P_B = 3,5 \text{ bar}$ ) et haute ( $P_H = 12 \text{ bar}$ ) du cycle ; la pression basse est aussi celle qui règne à l'absorbeur, la pression haute celle qui règne au bouilleur (en négligeant les pertes de pression : absorption et désorption isobares).

Il vient alors sur le diagramme (figure 15.25) le point 2 de sortie d'absorbeur (solution riche en  $NH_3$ ), et le point 4 de sortie de bouilleur (solution pauvre en  $NH_3$ ).

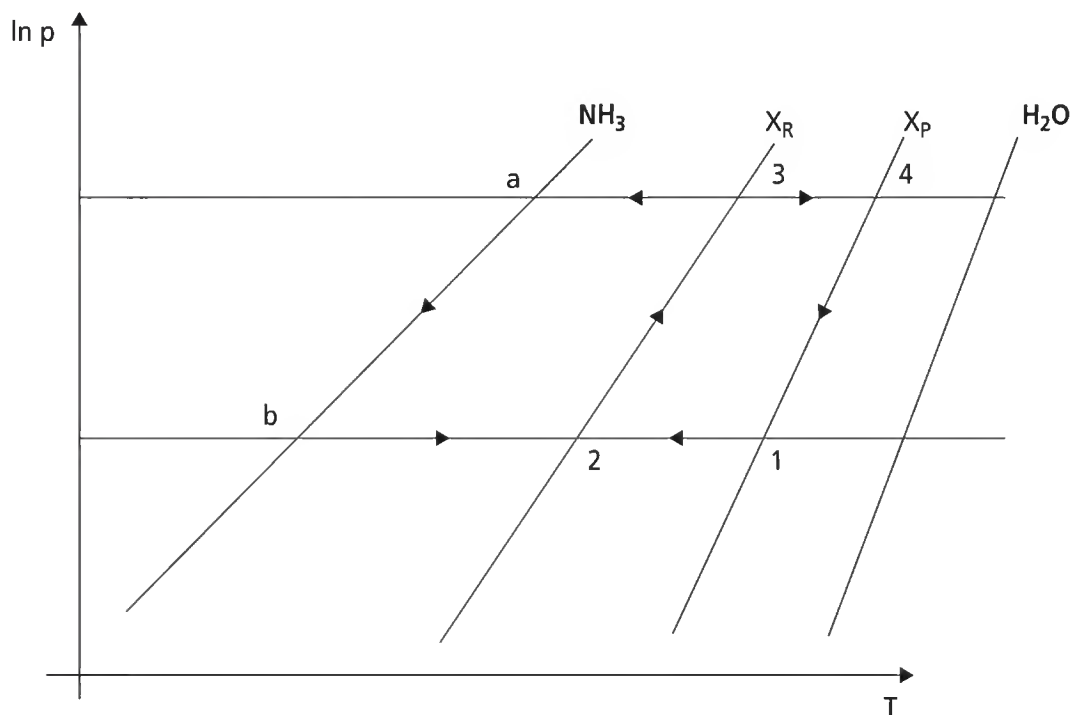


Figure 15.25 Cycle de la machine en diagramme de Oldham.

On trouve alors en 2 le titre massique  $x_R$  de la solution riche quittant l'absorbeur ( $x_R = 0,50$ ), puis en 4 le titre  $x_P$  de la solution pauvre quittant le bouilleur ( $x_P = 0,35$ ) : chaque kilogramme de solution cyclée entre l'absorbeur et le bouilleur libère 0,15 kg d'ammoniac dans le circuit de refroidissement.

Le cycle de la machine à absorption comporte donc deux boucles :

1 → 2 une absorption à pression constante de la vapeur en provenance de l'évaporateur b → 2 ;

2 → 3 le pompage de la solution riche de l'absorbeur vers le bouilleur (travail mécanique de la pompe)

3 → 4 la vaporisation dans le bouilleur avec production de la vapeur du frigorigène allant au condenseur 3 → a

4 → 1 retour de la solution pauvre du bouilleur vers l'absorbeur (avec équilibrage des débits par laminage).

**Remarque :** la transformation ab complète le cycle de l'ammoniac (détente du frigorigène).

### Prédimensionnement de la machine

On pourrait, à partir de la connaissance des températures, pincements, débits, et puissances calorifiques échangées, prédimensionner les échangeurs (condenseur, évaporateur, absorbeur, bouilleur) comme il a été vu au chapitre 13.

On se contentera ici d'indiquer que la solution riche et froide provenant de l'absorbeur gagne à être préchauffée par la solution pauvre mais chaude sortant du bouilleur (récupération de chaleur interne au cycle).

### Pompe de circulation

Cette pompe est la seule pièce mécanique de la machine, ce qui en fait une partie de son intérêt.

Le débit moyen de solution cyclée vaut :

$$\dot{m} = \frac{\dot{m}_{NH_3}}{x_R - x_p} = 0,59 \text{ kg/s}$$

On en déduit la puissance mécanique de transvasement que la pompe doit fournir à la solution, en supposant une masse volumique de solution identique à l'eau :

$$\dot{W} = (P_H - P_B) \cdot \dot{V} = 500 \text{ W}$$

En conséquence, même en tenant compte du rendement du groupe de pompage, cette puissance reste négligeable par rapport à la puissance thermique utile : elle pourra être ignorée pour des bilans (en première approche), mais pas d'un point de vue technique.

**Remarque :** il existe des machines fonctionnant sans pompe, en utilisant le mécanisme de diffusion (pression partielle) dans un mélange avec gaz inerte.

### 15.3.2 Les modèles quadritherme et tritherme

Ce paragraphe constitue une extension des résultats proposés au paragraphe 15.2.1.a aux modèles de machines à trois ou quatre réservoirs de chaleur. L'approche courante par une machine à trois contacts thermiques est une bonne approximation des configurations simples de machines à sorption.

L'accent peut être mis sur le COP, l'effet utile EU ou la dépense énergétique DE, en vue d'une conception optimale ou commande optimale de la machine.

### a) Coefficients de performance d'une machine tritherme

Avec les mêmes hypothèses que celles retenues pour la machine en contact avec deux réservoirs, on définit les coefficients de performance suivants selon les machines :

$$- \text{ pour les machines à froid } COP_{MAF} = \frac{q_L}{q_H + W} \quad (15.46)$$

$$- \text{ pour les pompes à chaleur } COP_{PAC} = \frac{q_I}{q_H + W} \quad (15.47)$$

$$- \text{ pour les thermotransformateurs } COP_{TT} = -\frac{q_H}{q_I + W} \quad (15.48)$$

Pour une machine fonctionnant entre trois réservoirs, le premier et second principe de thermodynamique imposent les contraintes égalités :

$$W + q_H + q_I + q_L = 0 \quad (15.49)$$

$$\frac{q_H}{T_H} + \frac{q_I}{T_I} + \frac{q_L}{T_L} + S_i = 0 \quad (15.50)$$

Les températures  $T_H, T_I, T_L$  sont constantes pour le fluide cyclé aux contacts avec les thermostats ( $T_{SH}$ , thermostat haute température ;  $T_{SI}$ , thermostat intermédiaire ;  $T_{SL}$ , thermostat basse température) :

$$T_{SH} > T_{SI} > T_{SL}$$

Dans le cas général (machines irréversibles adiabatiques), les fonctions objectives deviennent :

$$COP_{MAF} = \frac{\frac{1}{T_I} - \frac{1}{T_H}}{\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_I}} \left[ 1 + \frac{w - T_H S_i}{w + q_H} \cdot \frac{T_I}{T_H - T_I} \right] \quad (15.51)$$

$$COP_{PAC} = \frac{\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_H}}{\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_I}} \left[ 1 + \frac{w - T_H S_i}{w + q_H} \cdot \frac{T_L}{T_H - T_L} \right] \quad (15.52)$$

$$COP_{TT} = \frac{\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_I}}{\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_H}} \left[ 1 + \frac{w - T_I S_i}{w + q_I} \cdot \frac{T_L}{T_I - T_L} \right] \quad (15.53)$$

Sans irréversibilité interne ( $S_i = 0$  : machine endoréversible), la seule irréversibilité qui apparaisse est dans les échanges de chaleur avec les réservoirs ; si de plus on suppose l'énergie mécanique négligeable (comme vu précédemment), on retrouve le cas classique des machines trithermes endoréversibles, comme première approximation.



► Particularisation aux lois de transfert linéaires

La loi de transfert linéaire est la plus commune :

$$q_j = u_j(T_{sj} - T_j) \text{ avec } j = L, I, H$$

On remarquera ici que  $q_j$  représente soit une puissance, soit une énergie selon que le cycle est dynamique stationnaire ou discontinu, conformément à :

$$\overset{o}{q}_j = kjAj(T_{sj} - T_j) \quad (15.54)$$

$$q_j = Kj tj(T_{sj} - T_j) \quad (15.55)$$

où  $Kj$  est la conductance thermique en W/K et  $tj$  la durée du transfert de chaleur.

En conséquence, on note que  $uj = kjAj = Kj tj$ .

Le transfert de chaleur au niveau de température intermédiaire  $T_i$  est la somme des transferts de chaleur des deux échangeurs  $q_{ab}$  absorbeur et  $q_{cd}$  condenseur (échangeurs en parallèle pour la machine à absorption) :  $q_i = q_{ab} + q_{cd}$ .

b) Pincements de température correspondant à MAX COP

L'optimisation proposée ci-après est réalisée en conductances de transfert, sachant que ces conductances sont finies (contraintes de conductances) :

$$u_H + u_I + u_L = u_T \quad (15.56)$$

Les trois contraintes (15.49, 15.50, 15.56) permettent la détermination des trois conductances  $u_H, u_I, u_L$ , en fonction des trois variables de températures internes  $T_H, T_I, T_L$  et des paramètres  $T_{SH}, T_{SI}, T_{SL}, w, S_i, u_T$ .

On cherche pour les trois variables le MAX COP (FO), par rapport aux variables pincements suivantes (changement de variables) :

$$x_H = T_{SH} - T_H ; x_I = T_{SI} - T_I ; x_L = T_{SL} - T_L$$

► Machine à froid et pompe à chaleur

Les développements précédents conduisent aux FO suivantes pour la machine à froid (15.57) et la pompe à chaleur (15.58).

$$COP_{MAF} = \frac{q_c}{q_H + w} = \quad (15.57)$$

$$\frac{u_T \left( \frac{1}{T_{SI} - X_I} - \frac{1}{T_{SH} - X_H} \right) + \frac{1}{X_H} \left( \frac{w}{T_{SI} - X_I} - S_I \right) - \frac{1}{X_I} \left( \frac{w}{T_{SH} - X_H} - S_I \right)}{u_T \left( \frac{1}{T_{SL} - X_L} - \frac{1}{T_{SI} - X_I} \right) + \frac{w}{X_H} \left( \frac{1}{T_{SL} - X_L} - \frac{1}{T_{SI} - X_I} \right) + \frac{1}{X_I} \left( \frac{w}{T_{SH} - X_H} - S_I \right) - \frac{1}{X_L} \left( \frac{w}{T_{SH} - X_H} - S_I \right)}$$

$$COP_{PAC} = \frac{q_I}{q_H + w} = \quad (15.58)$$

$$\frac{u_T \left( \frac{1}{T_{SL} - X_L} - \frac{1}{T_{SH} - X_H} \right) + \frac{1}{X_H} \left( \frac{w}{T_{SL} - X_L} - S_I \right) - \frac{1}{X_C} \left( \frac{w}{T_{SH} - X_H} - S_I \right)}{u_T \left( \frac{1}{T_{SL} - X_L} - \frac{1}{T_{SI} - X_I} \right) + \frac{w}{X_H} \left( \frac{1}{T_{SL} - X_L} - \frac{1}{T_{SI} - X_I} \right) + \frac{1}{X_I} \left( \frac{w}{T_{SH} - X_H} - S_I \right) - \frac{1}{X_L} \left( \frac{w}{T_{SH} - X_H} - S_I \right)}$$

L'optimum est obtenu en résolvant un système de trois équations à trois inconnues, obtenu par dérivation de (15.57) et (15.58) par rapport aux trois variables (le même système d'équations pour les deux cas).

La seule solution physiquement acceptable pour ce système est la suivante :

$$\begin{cases} X_I = \frac{T_{SI}}{1 - \sqrt{\frac{Y_H - u_T \sqrt{T_{SH} Y_H}}{Y_H - S_I \sqrt{T_{SH} Y_H}}} \sqrt{\frac{T_{SH} u_T - \sqrt{T_{SH} Y_H}}{T_{SH} S_I - \sqrt{T_{SH} Y_H}}} \\ X_H = \frac{T_{SH} S_I - \sqrt{T_{SH} Y_H}}{S_I - u_T} \\ X_L = \frac{T_{SL}}{1 + \sqrt{\frac{Y_H - u_T \sqrt{T_{SH} Y_H}}{Y_H - S_I \sqrt{T_{SH} Y_H}}} \sqrt{\frac{T_{SH} u_T - \sqrt{T_{SH} Y_H}}{T_{SH} S_I - \sqrt{T_{SH} Y_H}}} \end{cases} \quad (15.59)$$

avec :  $Y_H = wS_I - wu_T + u_T S_I T_{SH}$ .

Le tableau 15.6 présente les valeurs numériques optimales pour une machine tritherme telle que :  $T_{SH} = 348 \text{ K}$  ;  $T_{SI} = 291 \text{ K}$  ;  $T_{SL} = 278 \text{ K}$ .

TABLEAU 15.6

TSL	278 K
TSH	348 K
TSI	291 K
w	50 W
	0,35 W/K
UT	1 200 W/K
XH	4,46 K
XI	- 3,83 K
XL	3,57 K
$COP_{PAC}$	2,162
$COP_{MAF}$	1,162

## a) Optimum d'une machine tritherme (MAF ; PAC)

$T_{SL}$	278 K
$T_{SH}$	348 K
$T_{SI}$	291 K
$w$	50 W
$S_i$	0,35 W/K
$uT$	1200 W/K
$X_H$	- 4,24 K
$X_I$	- 3,39 K
$X_L$	3,46
$COP_{TT}$	0,45

## b) Optimum d'une machine tritherme (thermotransformateur)

## ► Thermotransformateur

Pour le thermotransformateur, la FO est donnée par :

$$COP_{TT} = -\frac{q_H}{q_I + w} = \quad (15.60)$$

$$\frac{u_T \left( \frac{1}{T_{SI} - X_I} - \frac{1}{T_{SL} - X_L} \right) + \frac{1}{X_C} \left( \frac{w}{T_{SI} - X_I} - S_i \right) - \frac{1}{X_I} \left( \frac{w}{T_L - X_L} - S_i \right)}{u_T \left( \frac{1}{T_{SH} - X_H} - \frac{1}{T_{SH} - X_L} \right) + \frac{1}{X_I} \left( \frac{1}{T_{SH} - X_H} - \frac{1}{T_{SL} - X_L} \right) + \frac{1}{X_L} \left( \frac{w}{T_{SI} - X_I} - S_i \right) - \frac{1}{X_H} \left( \frac{w}{T_{SI} - X_I} - S_i \right)}$$

La même méthode que précédemment conduit à un système d'équations différent, dont la solution physique est :

$$\begin{cases} X_H = \frac{T_{SH}}{1 - \sqrt{\frac{Y_I + u_T \sqrt{T_{SI} Y_I}}{Y_I + S_i \sqrt{T_{SI} Y_I}}} \sqrt{\frac{T_{SI} u_T + \sqrt{T_{SI} Y_I}}{T_{SI} S_i + \sqrt{T_{SI} Y_I}}}} \\ X_I = \frac{T_{SI} S_i - \sqrt{T_{SI} Y_I}}{S_i - u_T} \\ X_L = \frac{T_{SC}}{1 + \sqrt{\frac{Y_I + u_T \sqrt{T_{SI} Y_I}}{Y_I + S_i \sqrt{T_{SI} Y_I}}} \sqrt{\frac{T_{SI} u_T + \sqrt{T_{SI} Y_I}}{T_{SI} S_i + \sqrt{T_{SI} Y_I}}}} \end{cases} \quad (15.61)$$

avec :  $Y_I = wS_i - wu_T + u_T S_i T_{SI}$

Malgré des similitudes, on remarque que la différence entre les deux provient d'une dépense énergétique provenant du réservoir intermédiaire pour le thermotransformateur et non du réservoir chaud, comme pour les autres machines.

Un exemple numérique est donné dans le tableau (15.6.b).

**Remarque :** pour chaque machine, on remarque l'existence d'un seuil d'entropie créé  $S_I$  ; ce seuil peut s'expliquer par la dissipation de l'énergie mécanique nécessaire à la circulation interne des fluides :

$$S_I > \frac{w}{T_{SH} - x_{II}} \text{ pour les MAF-PAC}$$

$$S_I > \frac{w}{T_{SI} - x_I} \text{ pour le thermotransformateur}$$

### c) Extensions pratiques

Deux articles de synthèse récents (Feidt M.) dressent un état de l'existant, en allant du modèle à la validation de ceux-ci à travers des résultats expérimentaux. L'optimisation des diverses configurations peut grandement être améliorée par une analyse entropique précise du système.

Pour des applications en réfrigération, nous avons pu montrer la faisabilité de température aussi basse que  $-100^\circ\text{C}$  avec une machine à adsorption à simple effet (Suhanan). D'un point de vue technique, il est possible d'améliorer encore les performances des machines précédentes dans deux directions au moins :

- l'usage de machines étagées (effets multiples) ;
- l'usage de configurations hybrides de machines : une étude commune avec l'université de Delft a permis de réaliser une configuration prometteuse d'une pompe à chaleur hybride à compression-résorption. Cette configuration présente l'originalité d'avoir un compresseur humide.

## 15.4 AUTRES MACHINES

De nombreux phénomènes physiques peuvent permettre la production de froid.

### 15.4.1 Machines à gaz permanent

Parmi les machines à gaz permanent, on notera les machines à cycle de Joule et à cycle de Stirling inverses qui sont les deux plus usitées.

#### a) Cycle de Stirling

Dans le fonctionnement réversible d'une machine de Stirling, le cycle est composé de deux transformations isothermes au contact avec la source froide et au contact avec le puits chaud. Les deux transformations isochores supposent

idéalement une régénération thermique parfaite au passage du gaz à travers l'échangeur régénérateur.

Il apparaît clairement que les mouvements des deux pistons sont déphasés ; trois cinématiques principales (appelées  $\alpha, \beta, \gamma$ ) ont été développées pour répondre techniquement à cette demande. Des détails sur des modèles récents de machines de Stirling à vitesse finie sont disponibles dans la référence (Petrescu S.).

Ce type de machine sert dans la production d'air et d'azote liquide.

### b) Cycle de Joule

La figure 15.26 représente le cycle de Joule d'une machine réelle avec une compression irréversible ( $1 \rightarrow 2'$ ), une détente irréversible ( $3 \rightarrow 4'$ ) et deux transferts de chaleur avec pertes de pression ( $2' \rightarrow 3, 4' \rightarrow 1$ ) ; on notera aussi que la récupération thermique (et non régénération) est imparfaite dans l'échangeur récupérateur ( $T_y, T_x$ ).

Des modèles thermodynamiques avancés existent sur ces bases ; ils seront abordés à l'occasion de l'étude des turbines à gaz (chapitre 16). Il faut seulement citer ici l'utilisation de ce type de cycle dans la climatisation des avions (Coupaye E.).

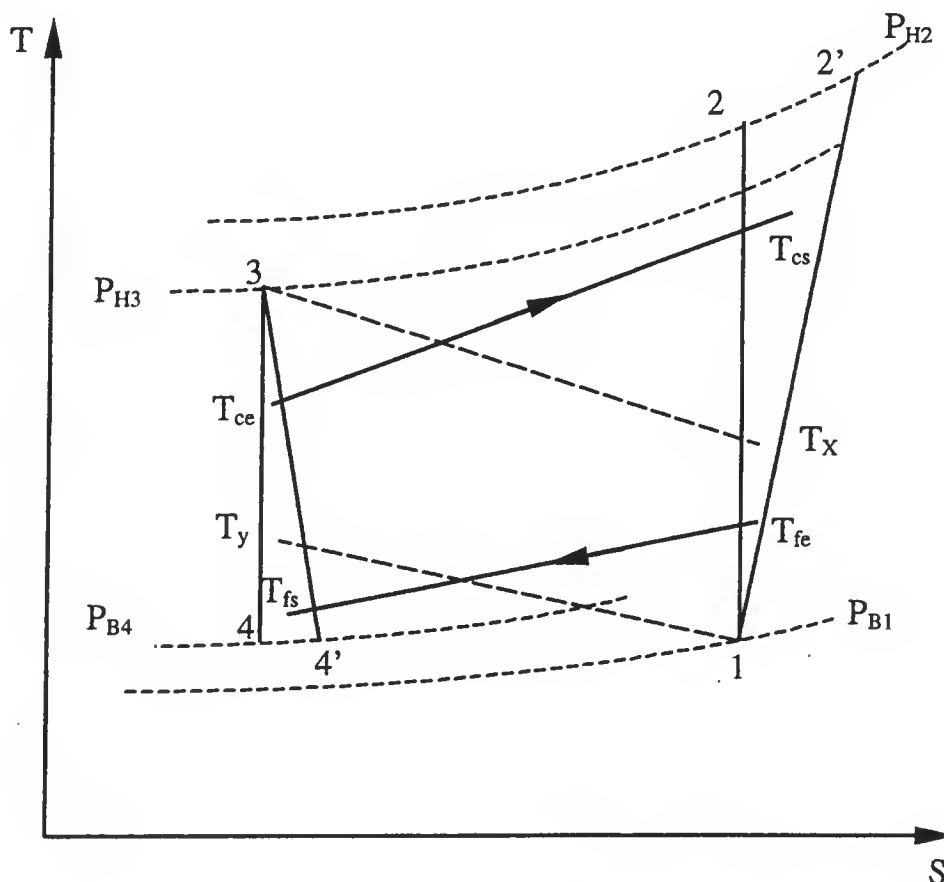


Figure 15.26

### c) Tube à gaz pulsé

L'apparition de ce dispositif est récente (1963). La figure 15.27 représente le schéma de principe d'une machine à froid à gaz pulsé. Le cycle du tube à gaz pulsé est fondamentalement très voisin du cycle de Stirling ; la principale différence provient du mode de déphasage entre l'onde de pression et le débit de gaz nécessaire à la production d'un effet frigorifique au niveau du volume de détente (extrémité froide de la machine). L'avantage principal est l'absence de pièces mobiles au bout froid. La puissance froide est dans la gamme 10 W-100 W à des températures de 50 K.

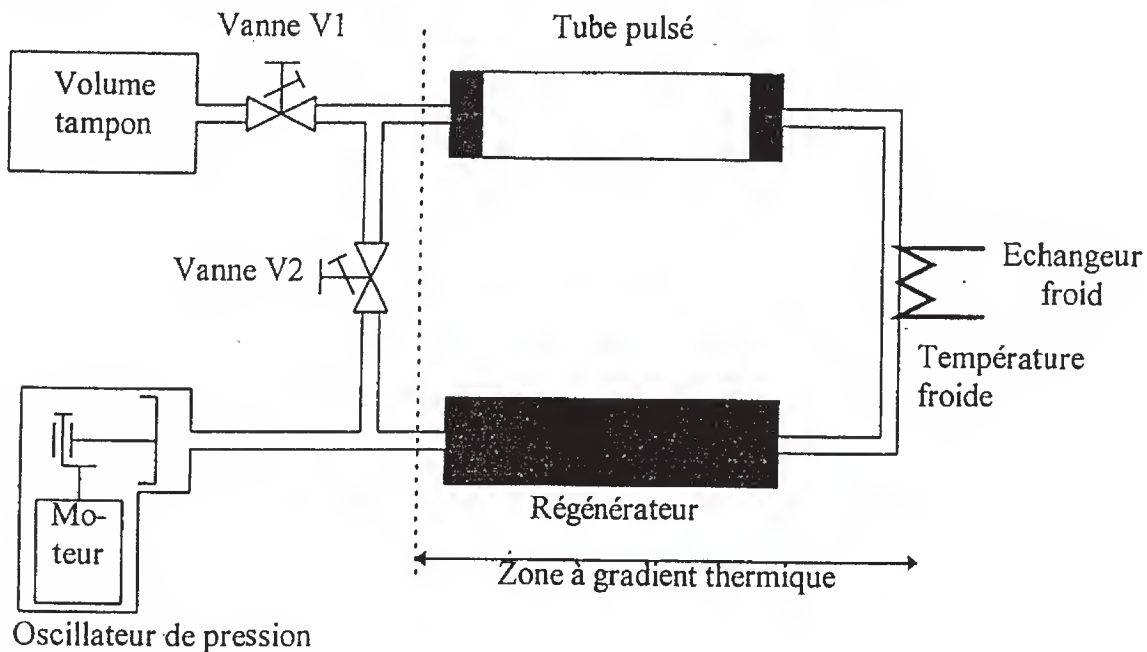


Figure 15.27

### d) Les machines thermoacoustiques

Cette nouvelle technique de réfrigération (1980) est, elle aussi, sans danger pour l'environnement (le fluide frigorigène est de l'hélium ou un mélange de gaz inertes). Les modèles théoriques de machines thermoacoustiques aboutissent à des facteurs de qualité de l'ordre de 0,40 à 0,50, sans tenir compte des irréversibilités de transfert externes, ni de la performance du transducteur acoustique.

Il existe actuellement en chantier des projets de réalisation de tubes dans la gamme de puissance 1 kW-100 kW.

## 15.4.2 Autres configurations

### a) Machines à éjecteur

Cette configuration de machine fait intervenir un changement de phase ; la compression est assurée par l'éjecteur. La machine est représentée schématiquement sur la figure 15.28.

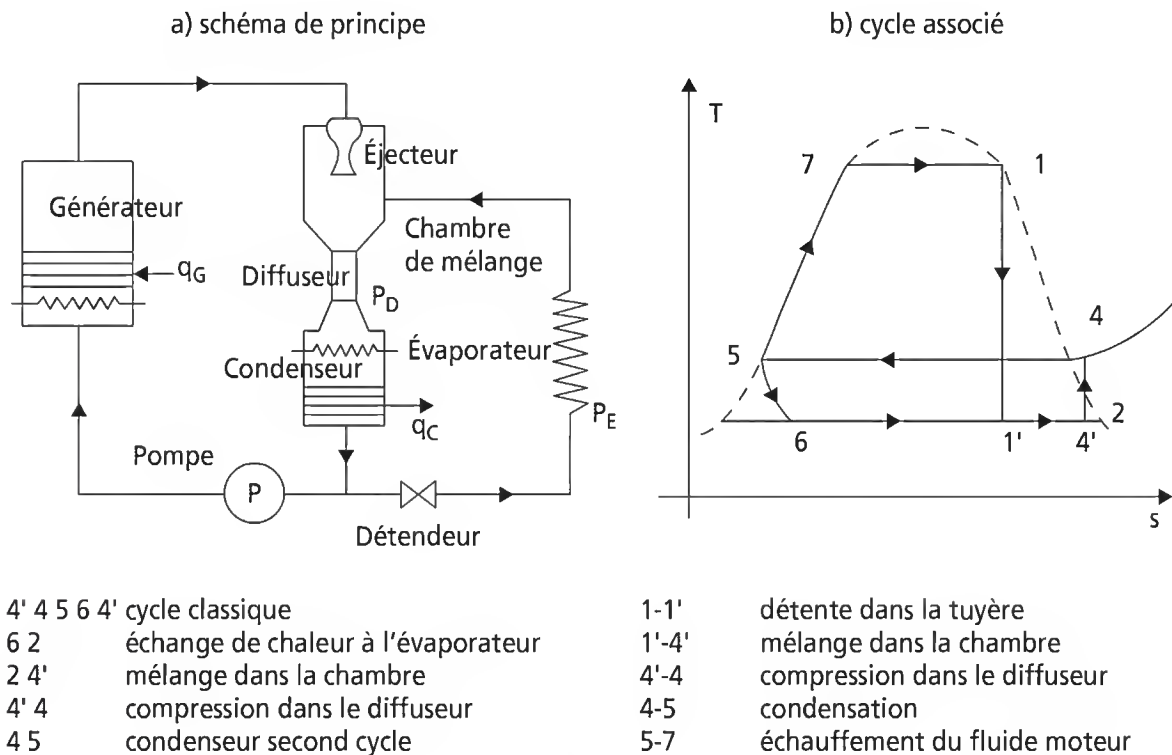


Figure 15.28 Machine à éjecteur.

Le schéma de principe est illustré sur la figure 15.28.a ; il correspond au cycle décrit sur la figure 15.28.b.

Le fluide le plus souvent utilisé dans ces machines est l'eau : l'énergie motrice est l'énergie de la vapeur d'eau haute pression (2 à 40 bars). L'éjection peut se faire en plusieurs étages (2 à 3 étages selon les cas). Toutefois, l'eau à 5 °C par exemple a une pression de vapeur saturante de 6,5 mmHg (dépression par rapport à l'atmosphère), ce qui induit des volumes spécifiques élevés ( $v = 147 \text{ m}^3/\text{kg}$  : taille des machines).

La référence la plus complète sur ce sujet est le travail réalisé par M. Sokolov.

### b) Machines thermoélectriques

#### ➤ Les effets thermoélectriques

Les effets thermoélectriques constituent l'illustration la plus classique de la thermodynamique des phénomènes irréversibles linéarisée (TPIL). En l'absence de champ magnétique, il en existe cinq :

- la conduction thermique ;
- la dissipation par effet Joule ;
- l'effet Seebeck (effet haute impédance) ; l'ajout ou l'extraction de chaleur au contact entre deux matériaux produit une différence de potentiel à la jonction ;
- l'effet Peltier (effet basse impédance) ; il est lié au courant passant à travers les jonctions entre deux matériaux ; il apparaît une différence de température entre



ces deux jonctions. Cette différence a un signe qui dépend du sens du courant dans le circuit des deux matériaux ;

- l'effet Thomson.

La figure 15.29 représente la réalisation pratique d'un élément thermoélectrique.

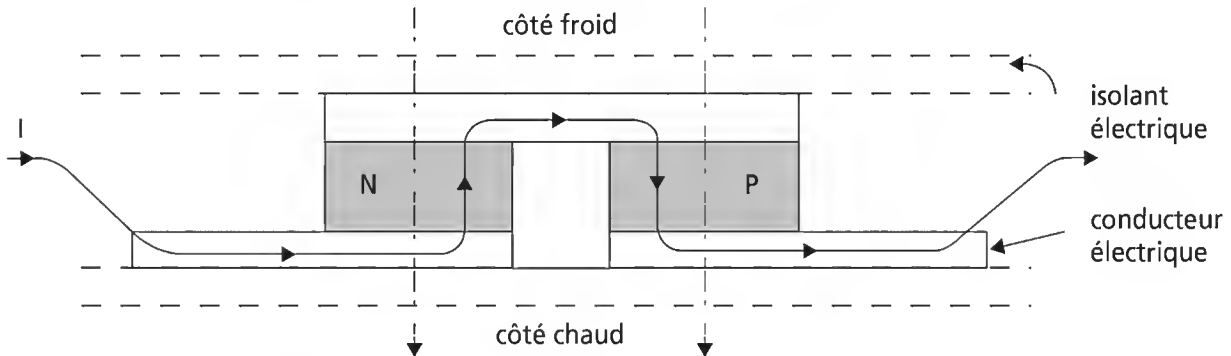


Figure 15.29 Représentation d'un élément thermoélectrique.

#### ► Le modèle thermodynamique

En régime dynamique stationnaire, le bilan d'énergie d'un thermoélément s'établit comme suit (convention de l'ingénieur) :

$$\dot{w}_E + \dot{q}_L = \dot{q}_H$$

avec :

$$\dot{w}_E, \text{ puissance électrique : } \dot{w}_E = \alpha I \Delta T + RI^2$$

$$\dot{q}_L, \text{ puissance froide : } \dot{q}_L = \alpha IT_L - \frac{RI^2}{2} - K \Delta T$$

$$\dot{q}_H, \text{ puissance chaude : } \dot{q}_H = \alpha IT_H + \frac{RI^2}{2} - K \Delta T$$

$\alpha$ , coefficient Seebeck du thermoélément

$R$ , résistance électrique du thermoélément

$K$ , conductance thermique du thermoélément

$\Delta T = T_H - T_L$ , différence de température au thermoélément

$I$ , intensité électrique à travers le thermoélément

La figure 15.30 représente l'évolution en fonction de  $I$  de la puissance disponible à  $T_L$  donné pour différentes valeurs de  $\Delta T$ . Il apparaît un maximum de puissance froide.

De façon similaire, on peut obtenir un MAX de  $COP_{MAF}$  dont on connaît la définition ; l'intensité électrique  $I_{opt}$  associée à ce MAX vaut :



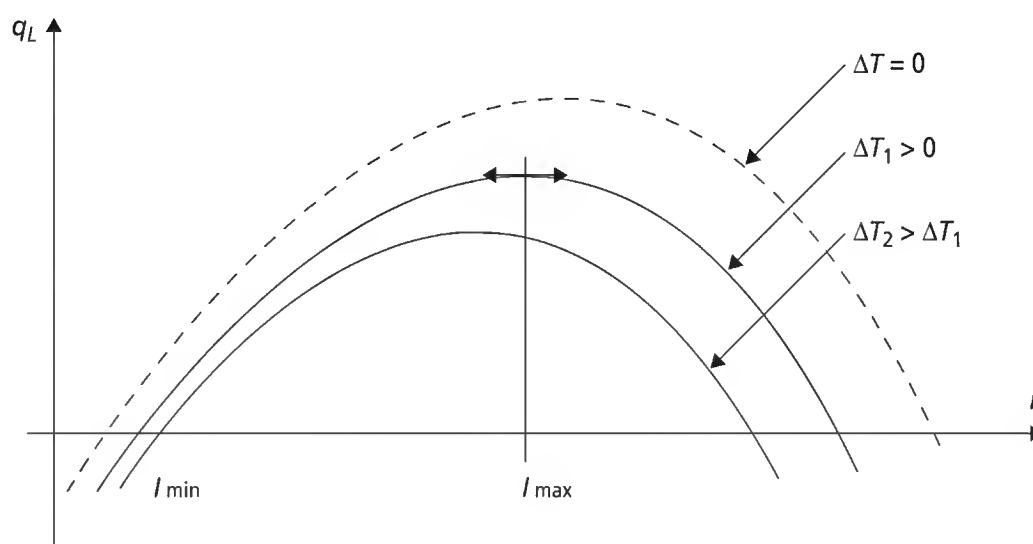


Figure 15.30 Variation de l'effet utile avec  $I$  (paramètre  $T_L$ ,  $\Delta T$ ).

$$I_{opt} = \frac{\alpha(T_H - T_L)}{R \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{2} Z(T_H + T_L)} - 1 \right]}$$

avec :

$$MAXCOP_{MAF} = \frac{T_L}{T_H - T_L} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{2} Z(T_H + T_L)} - \frac{T_H}{T_L}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} Z(T_H + T_L)} + 1}$$

avec  $Z$ , coefficient du thermoélément :  $Z = \frac{\alpha^2}{RK}$

**Remarque :** ce facteur parfois appelé facteur de mérite dépend en premier lieu des matériaux employés.

Le tableau 15.7 présente les valeurs actuelles de  $Z$  pour un thermoélément dédié à la réfrigération au voisinage de l'ambiante.

TABLEAU 15.7 PERFORMANCES COMPARÉES DES THERMOÉLÉMENTS

	Disponible actuellement		Matériaux étudiés en laboratoire		
	I standard	II amélioré	III existant	IV court terme	V prévision
$Z \times 10^3 K$	2,50	2,68	2,87	3,14	3,43
$I_{opt} A$	1,35	1,30	1,33	1,30	1,33
$\Delta V V$	3,01	2,95	2,86	2,74	2,72

TABLEAU 15.7 PERFORMANCES COMPARÉES DES THERMOÉLÉMENTS

$\frac{\dot{Q}_L}{W}$	2,24	2,33	2,53	2,66	3,00
$\frac{\dot{Q}_H}{W}$	6,31	6,17	6,33	6,22	6,62
$\frac{\dot{W}}{W}$	4,07	3,95	3,80	3,56	3,62
COP	0,55	0,61	0,66	0,74	0,83

On précise que ce type de machine fonctionne sans fluide et est très facile de commande et de régulation.

### c) Machines à effets thermomagnétiques

Les systèmes à gaz permanent sont utiles de 170 K à quelques K, comme on le verra au paragraphe 15.5. Toutefois, si on veut pour des expériences de laboratoire des températures inférieures à 1 K, les effets thermomagnétiques sont très performants. La désaimantation adiabatique est une bonne procédure pour diminuer la température conformément à :

$$dT = -\frac{T}{C_B} \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_B dB$$

B, représente le champ magnétique

M, représente le moment magnétique du système

$C_B$ , représente la capacité thermique à induction magnétique constante.

Des températures cryogéniques aussi basses que 20 mK ont été atteintes en laboratoire, par un usage poussé de cet effet.

D'un point de vue industriel, les propriétés thermomagnétiques peuvent être utilisées dans des cycles dits AMR (*Active Magnetic Regeneration*).

Ce cycle permet un refroidissement de type continu. Le gadolinium est probablement le meilleur matériau actuel pour l'intervalle de température [250 K, 310 K], soit une réfrigération au voisinage de l'ambiante. Les efficacités au sens du second principe sont voisines de 0,70 (comparées aux valeurs voisines de 0,50 pour les machines à compression).

Pour les machines thermomagnétiques dans l'intervalle de température [1,5 K ; 4,5 K], les cycles de Carnot et Ericsson sont envisagés (voir figure 15.31) (Yan Z.) ; le choix du matériau devient alors crucial.

## 15.5 TRÈS BASSES TEMPÉRATURES (TBT), LA CRYOGÉNIE

On a vu que toutes les machines précédentes étaient limitées à des températures supérieures à  $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Ici, on va considérer le monde des températures inférieures à ce seuil. La cryogénie nécessite alors la connaissance et la maîtrise des propriétés thermophysiques de l'air sec et d'autres gaz (aussi d'autres matériaux pour les applications) aux températures cryogéniques.

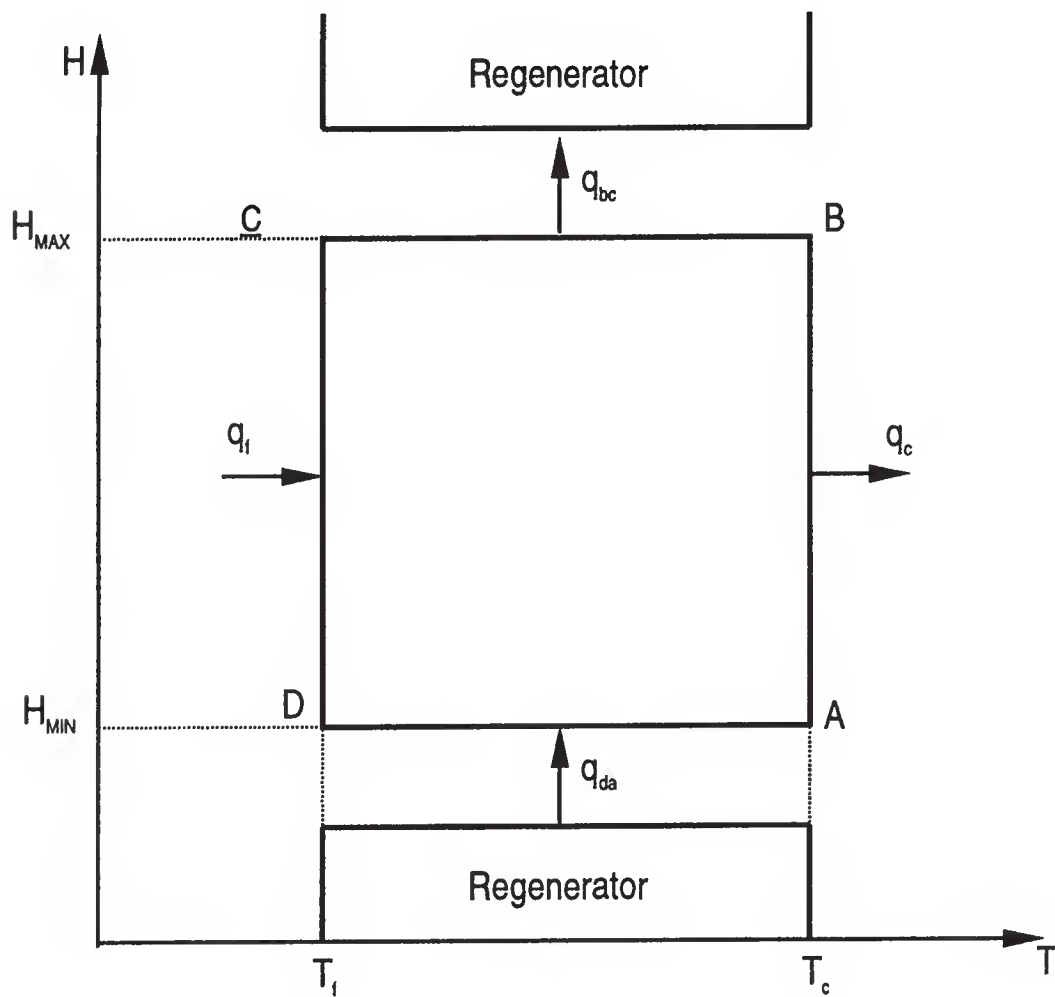


Figure 15.31 Cycle d'Ericsson en réfrigération thermomagnétique dans un diagramme champ magnétique-température.

### 15.5.1 Propriétés thermophysiques de l'air sec et d'autres gaz à TBT

Les principaux fluides sont l'air sec,  $O_2, N_2, H_2, He$ , ainsi que des hydrocarbures (voir tableau 15.8).

TABLEAU 15.8 CARACTÉRISTIQUES DES PRINCIPAUX FLUIDES CRYOGÉNIQUES.

		Masse molaire	Point triple		Point critique	
			K	atm	K	atm
Oxygène	$O_2$	32	54,36	0,0015	154,78	50,10

TABLEAU 15.8 CARACTÉRISTIQUES DES PRINCIPAUX FLUIDES CRYOGÉNIQUES.

Azote	N <sub>2</sub>	28	63,16	0,1237	126,14	33,49
Air		29				
Hydrogène normal	nH <sub>2</sub>	2	13,96	0,0711	31,19	12,98
Hélium	He	4			9,20	2,26

## a) L'air sec

Comme on l'a vu (chapitre 6) l'air est un mélange de 78 % N<sub>2</sub>, 21 % O<sub>2</sub>, 1 % Ar plus des traces (en concentration volumique). En pratique, on pourra considérer que c'est un mélange binaire. Le diagramme le plus courant pour l'air est le diagramme entropique ( $T, s$ ), mais il existe aussi des diagrammes linéaires ( $T, x$ ) en coupe isobare.

## b) L'hydrogène

L'hydrogène atmosphérique (à  $T, P$  ambiantes) dit n-hydrogène (hydrogène normal) se présente sous forme d'un mélange d'orthohydrogène (75 %) et de parahydrogène (25 %) ; l'ortho et le parahydrogène se différencient par la direction des spins de leurs noyaux respectivement parallèle et anti-parallèle.

**Remarque :** la transition ortho-parahydrogène est exothermique (avec une énergie supérieure à celle de la vaporisation).

À l'équilibre liquide-vapeur à la pression atmosphérique (ébullition normale :  $T = 20,4 \text{ K}$ ), l'e-hydrogène est à 99,8 % du parahydrogène. Les points triple et critique sont indiqués dans le tableau 15.8.

## c) L'hélium

L'hélium est un corps pur très particulier, vu son absence de point triple (voir figure 15.32) : à 0 K, l'hélium se présente sous forme liquide.

Sur ce diagramme, on voit qu'il existe deux formes pour l'hélium liquide :

- He I, hélium liquide normal (à HT) ;
- He II, hélium super fluide (à BT).

Cet hélium possède des propriétés très particulières de viscosité nulle (superfluidité) ; il est sujet par ailleurs à l'effet fontaine ou thermomécanique et possède une mouillabilité particulière. Sa conductivité thermique est aussi supérieure à celle du cuivre.

## d) Autres fluides cryogéniques

Il s'agit essentiellement de fluides hydrocarbonés utilisés dans les cycles frigorifiques des installations de GNL pour les BT (GPL pour les HT ; butane ; propane).

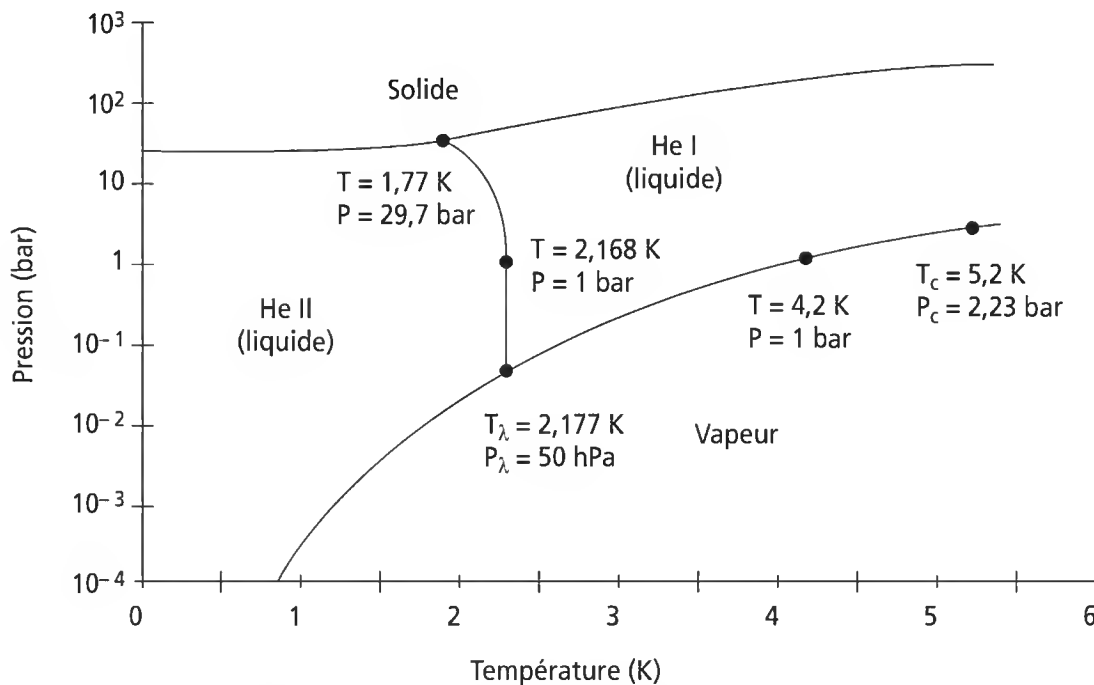


Figure 15.32 Diagramme de phases de l'hélium.

Pour les basses températures, on utilise dans :

- les cycles à cascade classique (voir ci-après) : propane, éthylène, méthane (9 étages) ;
- les cycles à mélange de frigorigène : azote, méthane, éthane, propane, butane et pentane ;
- les cycles à mélange de frigorigène prérefroidi par du propane : propane (3 étages), mélange azote, méthane, éthane et propane.

### 15.5.2 Liquéfaction des gaz

Il existe quatre moyens principaux pour atteindre la température nécessaire à la liquéfaction d'un gaz :

- refroidissement externe par un système de réfrigération séparé ;
- détente de Joule-Thomson du gaz à liquéfier ;
- détente isentropique du gaz sans écoulement ;
- détente du gaz dans un moteur ou une turbine (récepteur).

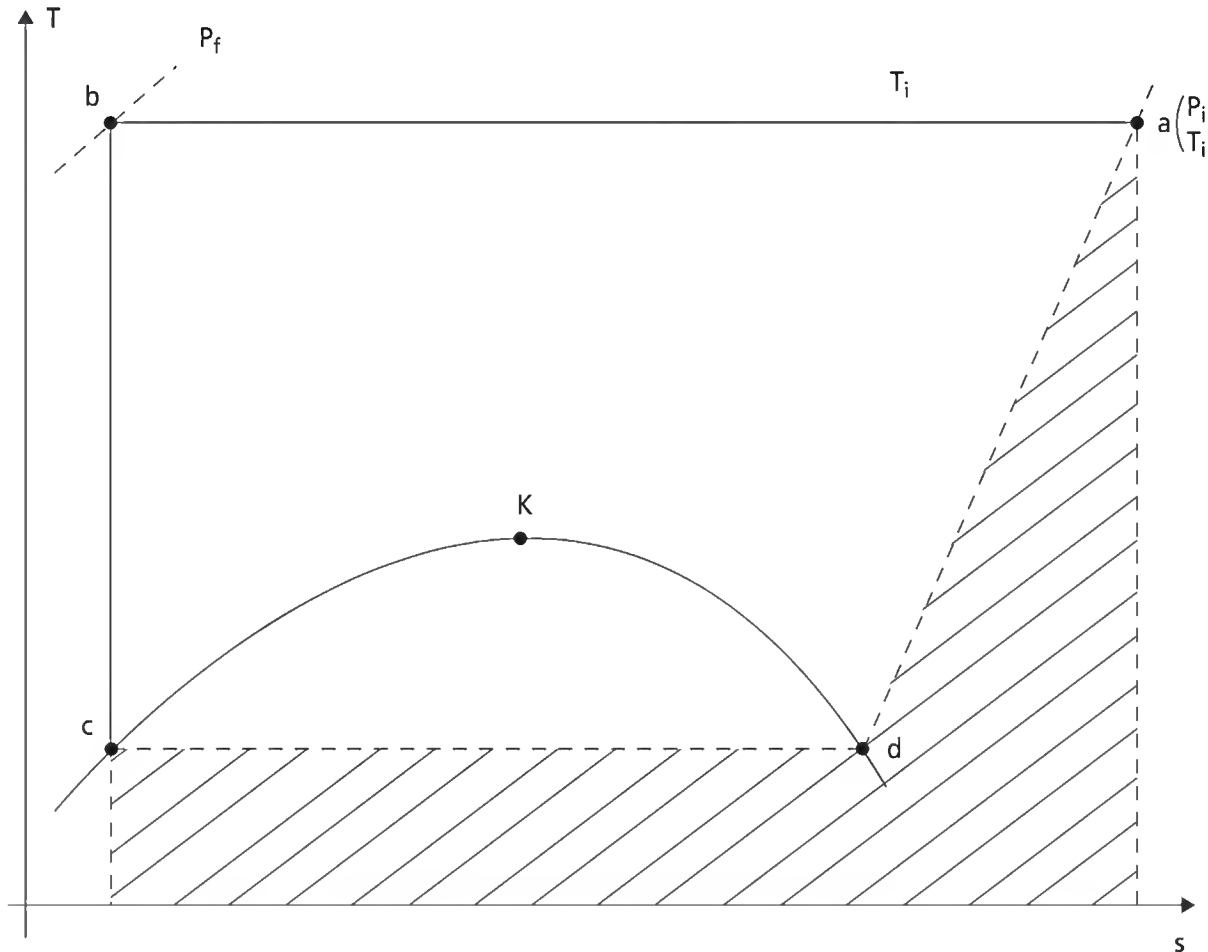
a) *Minimum énergétique nécessaire à la liquéfaction depuis un point d'état ( $P_i$ ,  $T_i$ ).*

Souvent,  $P_i = P_{atm}$  ;  $T_i = T_{atm}$

Il vient alors pour le cycle transcritique représenté sur la figure 15.33 par unité de masse cyclée :

$$\Delta W_{comp} = (h_b - h_a) - \Delta q_H$$

$$\Delta W_{det} = (h_c - h_b)$$



**Figure 15.33** Diagramme  $T,s$  de liquéfaction depuis  $(P_i, T_i)$  : minimum énergétique en cycle supercritique.

$$\Delta q_H = T_i(sb - sa) = T_i(sc - sa)$$

Le bilan sur le système fluide conduit algébriquement à :

$$\Delta W = \Delta W_{comp} + \Delta W_{det} = (h_c - T_i s_c) - (h_a - T_i s_a)$$

Le travail correspond à l'aire  $abcda$ .

**Remarque :**  $P_f$  est très élevée.

Exemple numérique :

Soit  $N_2$  à  $P_i = P$  atmosphérique ;  $T_i = 300$  K.

Dans ces conditions, conformément à la figure 15.33, il vient (source Encyclopédie des gaz, Air Liquide, Elsevier) :

$$h_a = 462 \text{ J/g} ; s_a = 4,41 \text{ J/gK} ; h_c = 33 \text{ J/g} ; s_c = 0,45 \text{ J/gK}$$

Application numérique :

$$\min \Delta W = 760 \text{ J/g}$$

Sachant que :  $\rho_{LN_2} = 800 \text{ g/dm}^3$ , il vient en référence volumique :

$$\min \Delta W = 608 \text{ kJ/dm}^3$$

b) Système de réfrigération séparé pour refroidir un gaz en dessous de son point critique

Le système qui apparaît en premier est le système en cascade généralisé (figure 15.34).

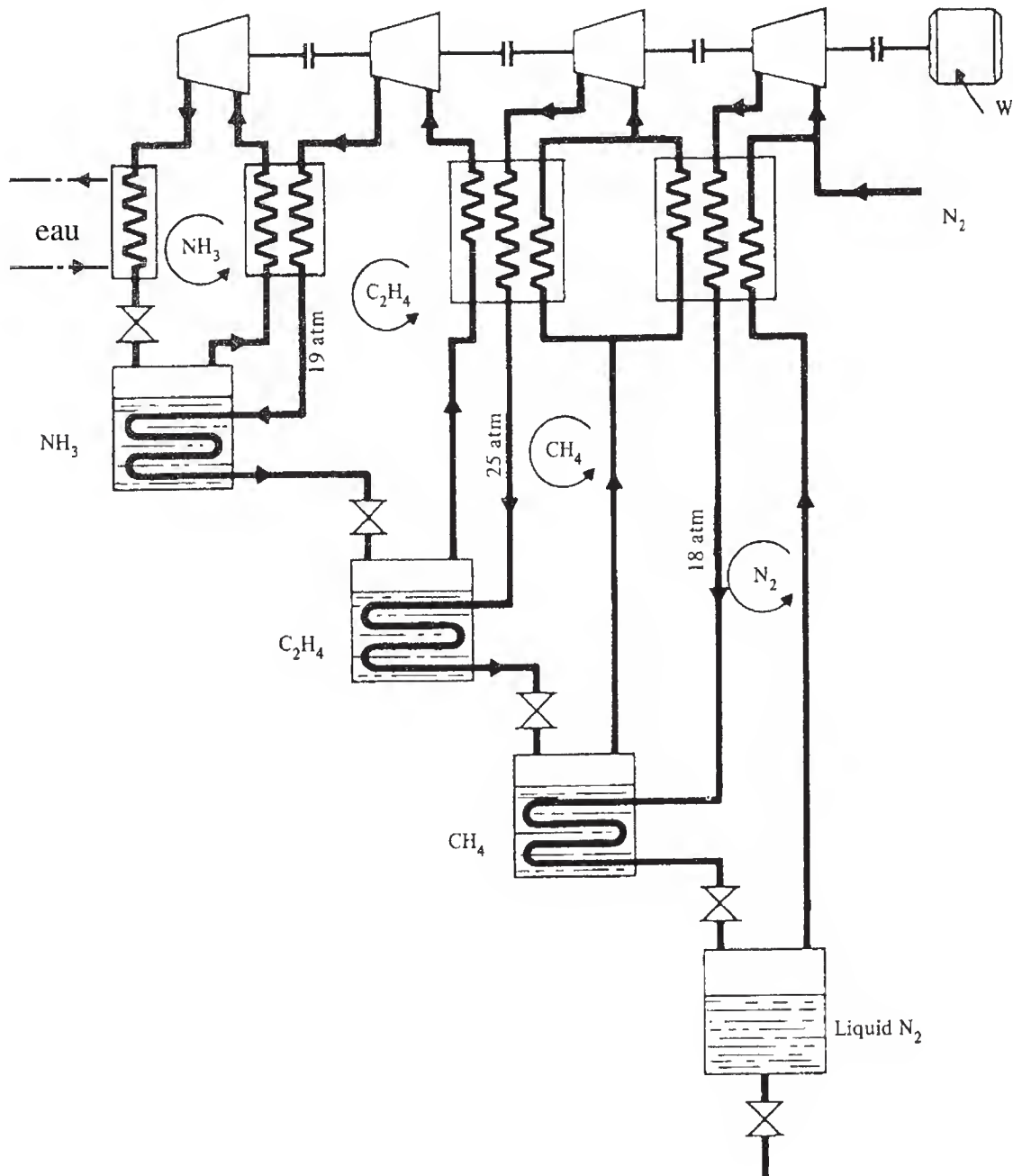


Figure 15.34 Système en cascade pour la liquéfaction de l'azote.

La figure 15.34 fournit la cascade de fluide (avec échangeurs contre-courants) pour la liquéfaction de l'azote ; cette cascade comporte quatre fluides, successivement  $\text{NH}_3$ , éthylène,  $\text{C}_2\text{H}_4$ , méthane,  $\text{CH}_4$ , azote,  $\text{N}_2$ .

La cascade qui part du milieu ambiant (refroidissement par eau) suppose pour les raisons techniques connues des vaporisations atmosphériques :  $\text{NH}_3$ , 240 K ;  $\text{C}_2\text{H}_4$ , 169 K ;  $\text{CH}_4$ , 111 K ;  $\text{N}_2$ , 77 K.

La consommation spécifique de cette cascade est environ 2,5 fois celle du minimum déterminé en a, et le système devient complexe et coûteux.

**Remarque 1 :** la complexité technologique devient telle qu'elle est exclue pour  $\text{H}_2$  et He.

**Remarque 2 :** parmi les systèmes de réfrigération séparée, on a déjà vu (tout particulièrement pour  $\text{N}_2$  : machine Philips) l'usage du cycle de Stirling.

### c) Machines et cycles de Linde

#### ► Détente de Joule-Thomson

Les cycles qui viennent ci-après dont la détente s'effectue isenthalpiquement depuis  $T$  et  $P$  supérieures au point critique vers la région humide imposent un coefficient de détente  $\varepsilon_H > 0$  (attention à la position de ce point par rapport à la courbe d'inversion du gaz).

#### ► Machine et cycle de Linde à un niveau de pression

Le cycle de Linde le plus simple (un niveau de pression) utilise la détente de Joule-Thomson. Le cycle de base est représenté sur la figure (15.35.a) ; il fait apparaître pour l'air une pression haute de 200 atmosphères, pour une aspiration atmosphérique. La configuration technique correspondante est représentée sur la figure (15.35.b).

Il faut remarquer qu'ici la machine est ouverte, et seule la phase gazeuse est cyclée ; le liquide qui est extrait est remplacé par le gaz introduit.

#### Deux indicateurs de performance

Un critère matériel :  $Y = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}_c} = \frac{\text{masse de liquide produite}}{\text{masse de gaz compressée}}$

Un critère énergétique :  $w_v$ , consommation énergétique spécifique.

#### Caractérisation analytique et numérique

En supposant la machine adiabatique, il vient :

- bilan matière :  $\dot{m}_c = \dot{m}_f + \dot{m}_i$
- bilan énergie :  $\dot{m}_c h_c = \dot{m}_f h_f + \dot{m}_i h_i$

Par élimination de  $\dot{m}_i$ , on trouve :

$$Y = \frac{h_i - h_c}{h_i - h_f}$$



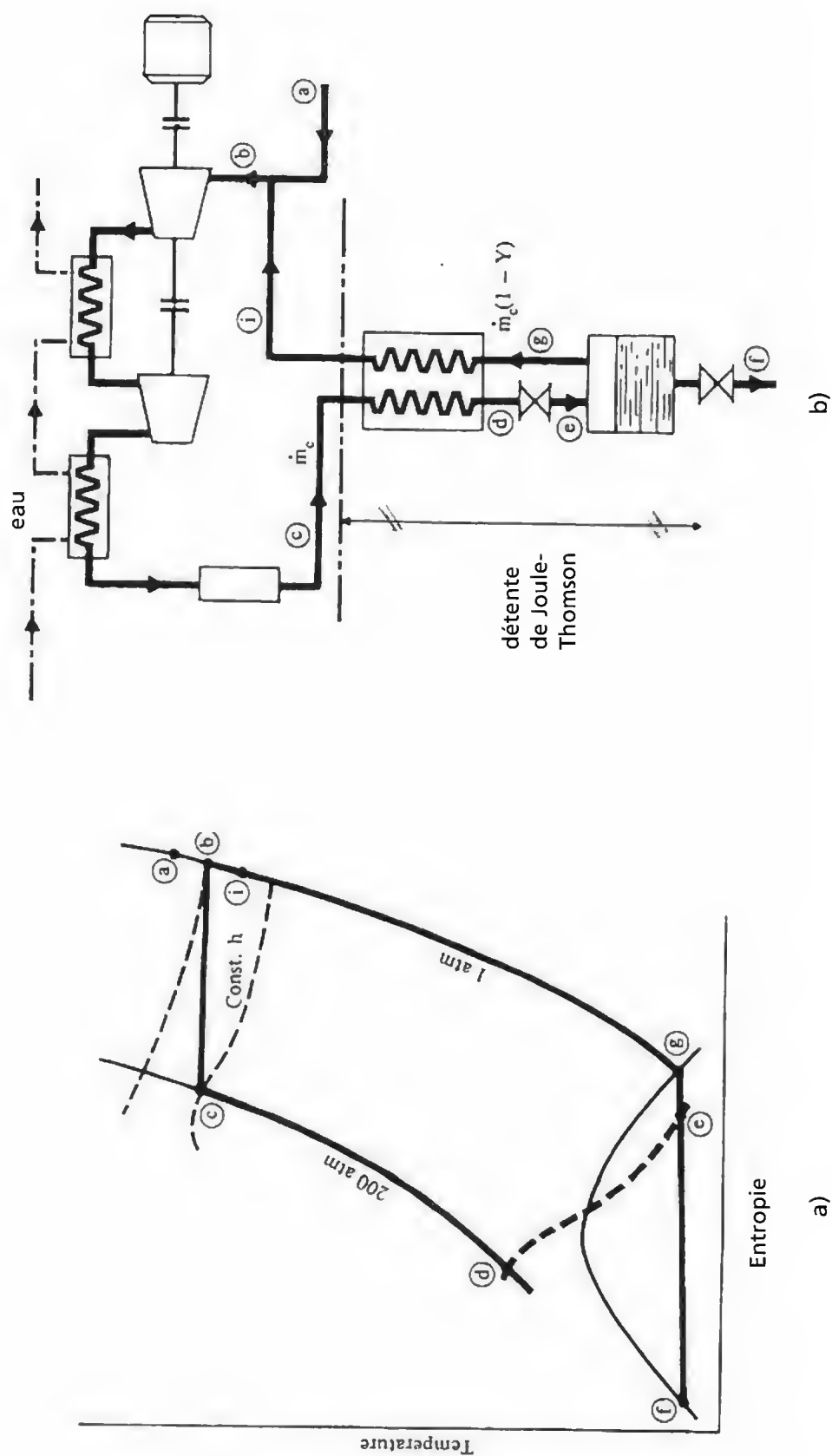


Figure 15.35 Machine et cycle de Linde à une pression.

**Remarque 1 :**  $T_i$  ne peut qu'approcher  $T_c$  (échangeur récupérateur imparfait) ;  $h_i$  doit être supérieur à  $h_c$  ; si  $T_i < T_c$ , cela suppose  $P_i < P_c$  à la pression d'inversion dans le domaine de température.

**Remarque 2 :** le bilan masse et énergie sur l'échangeur récupérateur à contre-

$$\text{courant} \Rightarrow 1 - Y = \frac{h_c - h_d}{h_i - h_g} ; h_d \text{ apparaît.}$$

– bilan d'énergie de la compression isotherme :

$$\Delta W_{\text{comp}} = (h_c - h_b) - T(s_c - s_b)$$

d'où la consommation spécifique.

Exemple : cas de l'air, en supposant  $T_i = T_b = T_a = 300 \text{ K}$

$$\text{Si } h_f \text{ négligeable : } Y = \frac{12\,400 - 11\,400}{12\,400} = 0,081$$

$$\bullet \quad \Delta W_{\text{comp}} = (11\,400 - 12\,400) - 300(65 - 113) = 13\,400 \text{ J/mole} = 463 \text{ J/g}$$

$$\bullet \quad w_y = \frac{\Delta W_{\text{comp}}}{m_f} = 5,7 \text{ kJ/kg d'air liquide}$$

vu que le volume spécifique du liquide à une atmosphère vaut :

$$v_f = 33,14 \text{ cm}^3/\text{mole} \text{ (874 g/dm}^3\text{)},$$

il vient :  $w_v \approx 5\,000 \text{ kJ/dm}^3$ .

**Remarque :**

$$- \quad x_v \approx 0,92, \text{ titre vapeur}$$

$$- \quad h_d = h_e \approx 5\,400 \text{ J/g}$$

Cela correspond à la valeur de  $h_i$  présumée ci-dessus.

• Travail minimum théorique depuis 300 K, 1 atm (référence).

$$\min \Delta W_{\text{comp}} = (12\,400 - 0) - 300(113 - 0) = 2,15 \cdot 10^4 \text{ J/mole}$$

correspond à 0,74 kJ/g liquide ou 647 kJ/dm<sup>3</sup> liquide.

• Efficacité au sens du second principe

$$\eta_{II} = \frac{0,74}{5,70} = 0,13$$

– Améliorations possibles :

- Prérefroidissement en haute pression par machine à froid séparée
- Détente étagée partielle pour une partie du fluide
- Combinaison des deux options.

#### d) Détente de gaz avec régénération mécanique

Ce procédé permet de liquéfier tous les gaz par détente en moteur ou turbine.

### ➤ Détendeur à piston

G. Claude est le premier à avoir mis en œuvre ce procédé continu, en introduisant une détente avec récupération de travail pour une partie du gaz, qui va alors se refroidir, sans pour autant se liquéfier et abaisser d'autant la température du liquide qui arrive à la vanne de détente (voir figure 15.36).

Le procédé de G. Claude est beaucoup plus efficace que le procédé simple de Linde.

### ➤ Détendeur à turbine

Dans le système de Kapitza, le détendeur à piston devient turbine (voir figure 15.37).

On remarque aussi sur cette figure que les échangeurs classiques deviennent des régénérateurs. La conséquence de ces modifications est une plus basse température et un plus faible taux de compression.

Les valeurs actuelles de température en sortie de turbine sont dans l'intervalle  $[-250\text{ °C}, -260\text{ °C}]$  pour les plus performantes, avec des puissances de l'ordre de 200 kW à 72 000 tr/min.

Les turbines sont aussi utilisées dans les installations à GNL (Kanoglu M.). En conclusion, on peut dire que l'analyse entropique ou exergetique est très utile pour les machines cryogéniques, à cause du niveau de température associé.

## e) Séparation des gaz et variantes de cycles

### ➤ Distillation

L'essentiel du développement précédent était relatif à la production d'air liquide dont on a vu qu'il constituait un mélange binaire (voir figure 15.38). Le collecteur de liquide doit donc être remplacé par une colonne à distiller (double colonne) ; l'azote, corps le plus volatile sort pur en tête de la partie basse (haute pression :  $p = 5$  atmosphères ;  $T = 94\text{ K}$ ). la condensation d'azote est assurée par ébullition d'oxygène à  $P = 1$  atmosphère :  $T = 90,2\text{ K}$  dans la partie haute de la colonne (Castle W.F.).

### ➤ Autres modes de séparation

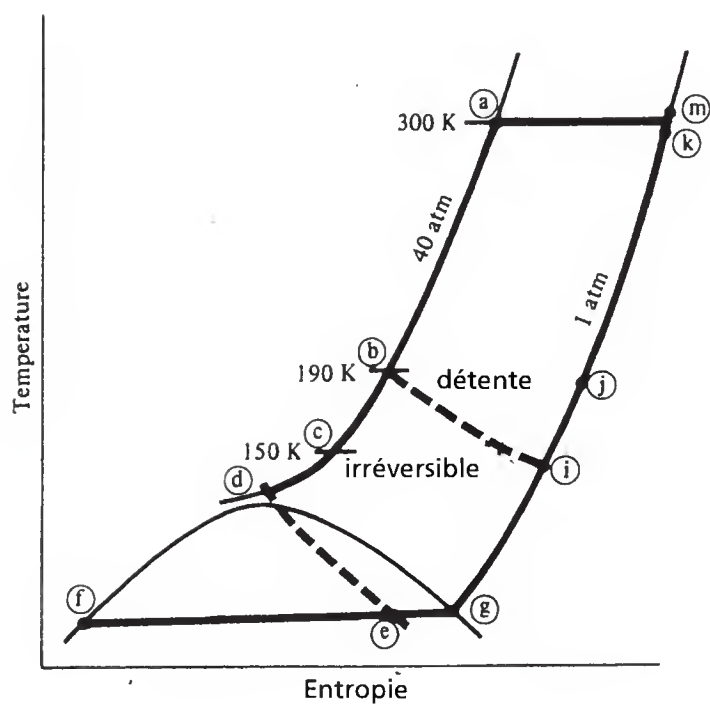
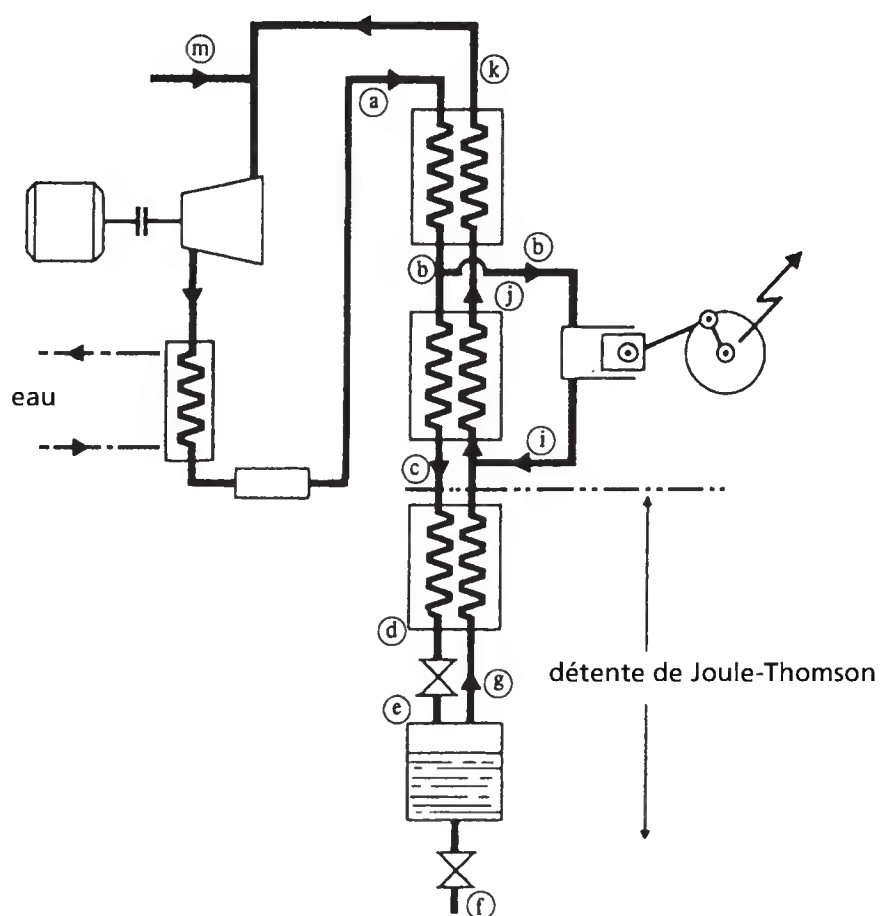
La séparation de gaz (en particulier de l'air) est réalisée en utilisant comme critères principaux : la pureté, la pression, le débit, mais aussi et surtout la consommation énergétique et le coût d'investissement.

Il en résulte une compétition entre le mode de séparation cryogénique précédent ( $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ ) et trois procédés cryogéniques cités ci-après :

- PSA, adsorption par oscillation de pression ( $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ) ;
- VPSA, adsorption par oscillation de pression sous vide ;
- procédés membranaires ( $\text{N}_2$ ).

### ➤ Autres variantes de machines et cycles à gaz

On rappelle pour mémoire le cycle de Joule, le tube à gaz pulsé ; on y ajoute le système de Gifford-McMahon qui ne sera pas détaillé, faute de place, et le cycle de Vuilleumier ; ce dernier se ramène en cycle idéal à une combinaison de deux cycles



**Figure 15.36** Procédé Claude pour liquéfaction de l'air.

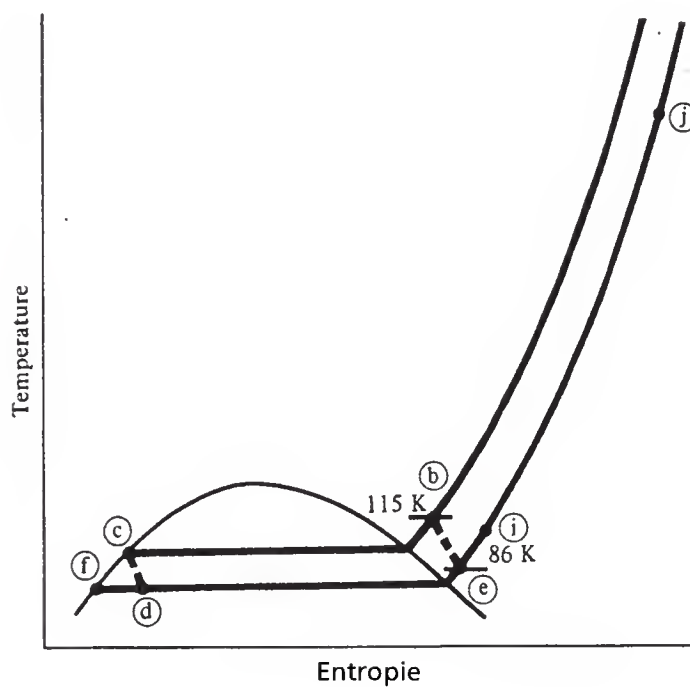
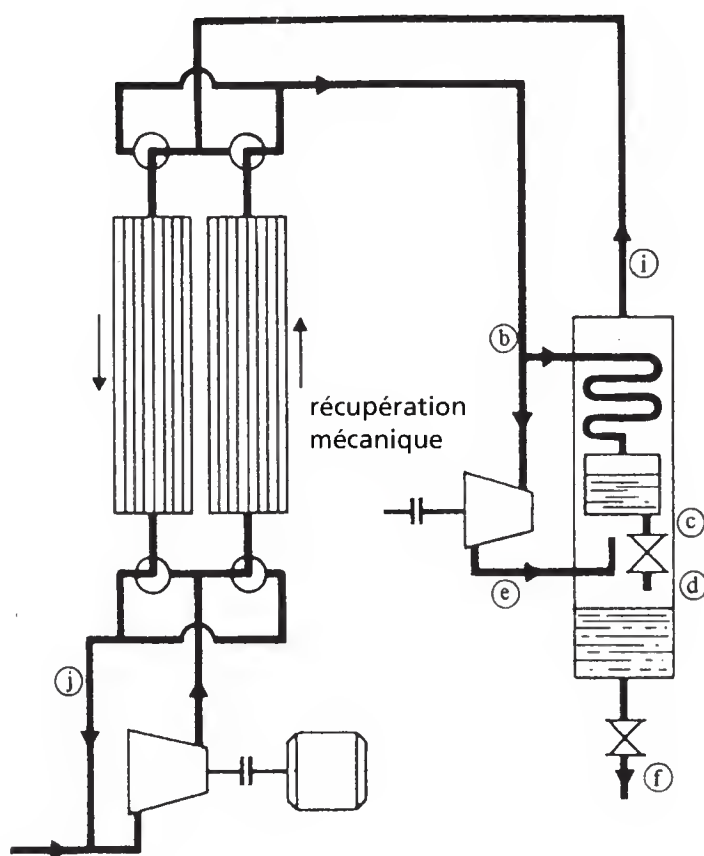
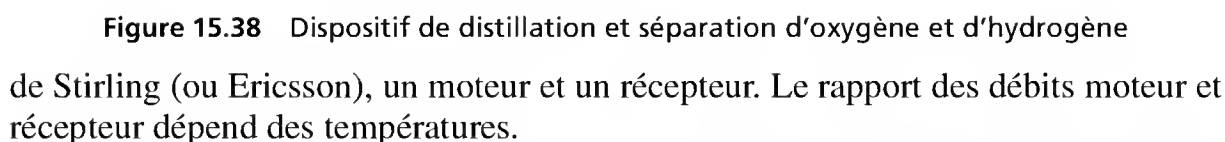


Figure 15.37 Système de Kapitza pour liquéfaction de l'air.



De façon idéale, le COP de la machine de Vuillemier réversible s'exprime identiquement à celui de la machine tritherme :

$$COP_{MAF} = \frac{\overset{o}{q}_L}{\overset{o}{q}_H} = \frac{T_H - T_I}{T_H} \cdot \frac{T_L}{T_I - T_L}$$

Le niveau de température est alors voisin de 2 K. L'usage est principalement en laboratoire, mais aussi dans de très grands systèmes (collisionneur à hadrons du CERN en Suisse ; projet en cours du réacteur à fusion ITER).

L'énergie mécanique nécessaire à la production d'une unité de froid augmente de façon considérable avec la diminution de la température ; pour l'hélium dans les conditions de réversibilité, l'ordre de grandeur est de 75 kW mécanique par kW froid. Si on tient compte des irréversibilités, l'intervalle de puissance mécanique par kw froid devient [500 kW – 1 000 kW].

Les cycles sont alors nécessairement à récupération mécanique. La figure 15.39 montre le schéma standard de l'installation de liquéfaction d'hélium avec refroidissement intermédiaire, avant la détente de Joule-Thomson.

Les trois principaux postes d'irréversibilité à minimiser sont dans les échangeurs, les turbines et le détendeur. On illustre ci-après l'optimisation des échangeurs récupérateurs d'un système cryogénique.

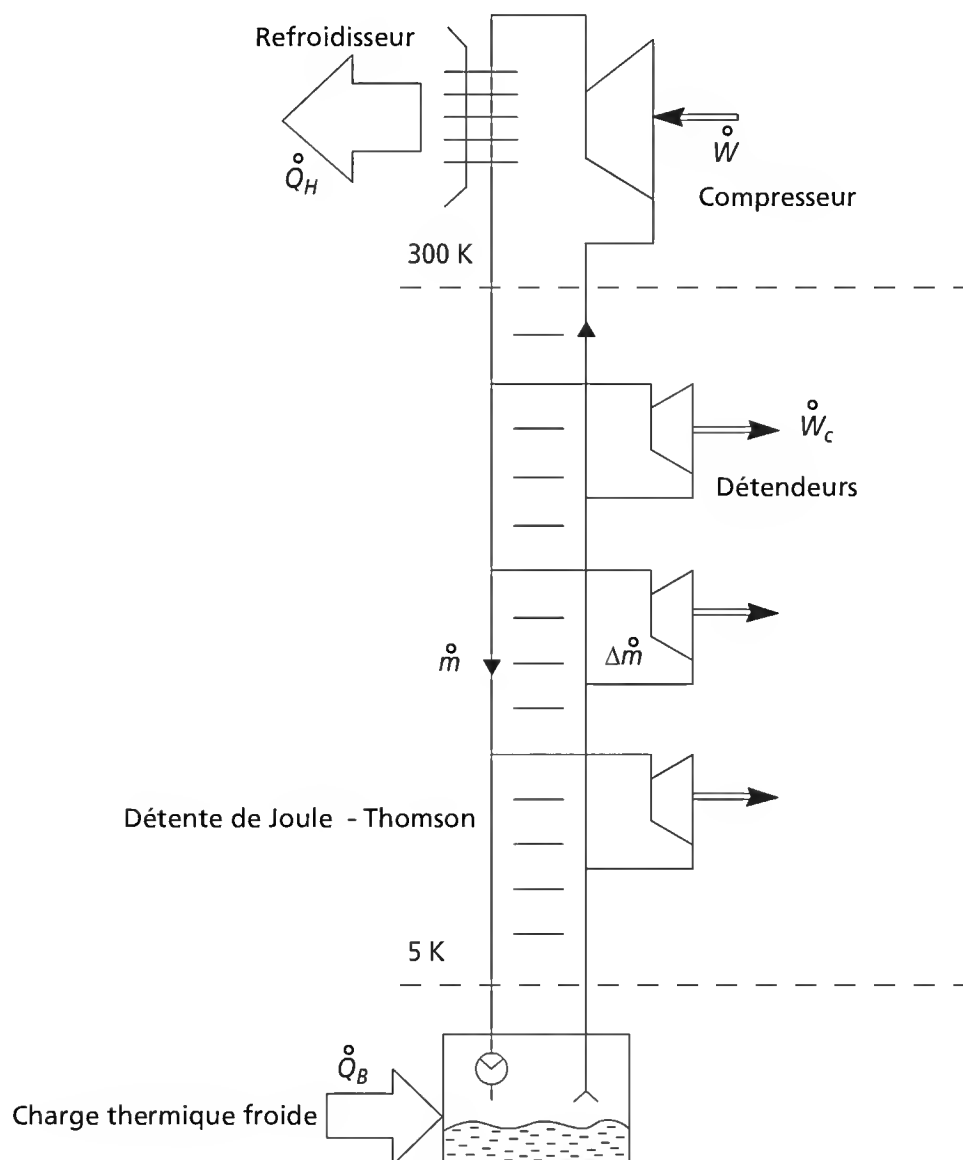


Figure 15.39 Schéma de principe d'une installation de liquéfaction d'hélium.

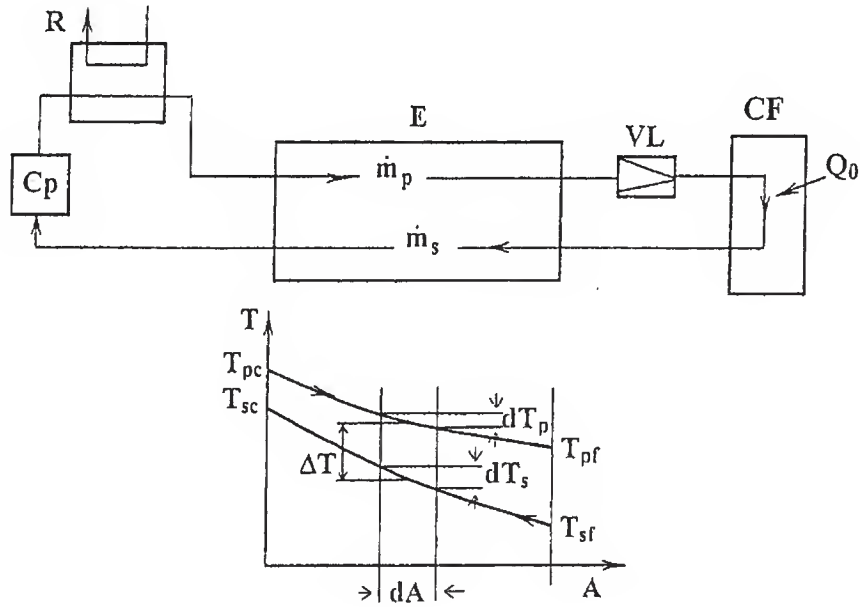
### g) Optimisation de l'échangeur récupérateur d'un cycle de Linde

La figure 15.40 représente la variation des températures dans l'échangeur récupérateur d'une machine cryogénique de type Linde.

Pour une surface d'échange élémentaire  $dA$ , la destruction d'exergie (création d'anergie) due au transfert de chaleur sous différence finie de température est donnée par :

$$\overset{o}{E}_{x_d} = T_o \cdot \overset{o}{S}_i = T_o \overset{o}{q} \left( \frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_p} \right)$$

La création d'entropie dans le fluide primaire  $p$ , due au transfert de chaleur à travers  $dA$  s'écrit :



**Figure 15.40** Variation des températures dans l'échangeur récupérateur d'une machine cryogénique de Linde.

$$d \overset{\circ}{S}_i = \overset{\circ}{m}_p C_{pp} \frac{\Delta T}{T_p - T_s} dT_p$$

La fonction objectif retenue correspond ici au minimum d'exergie détruite (minimum de génération d'entropie) selon :

$$\overset{\circ}{S}_i = \int_{T_{pf}}^{T_{pc}} \frac{\overset{\circ}{m}_p C_{pp} \Delta T}{T_p T_s} dT_p \quad (15.62)$$

$T_{pc}, T_{pf}$ , températures d'entrée chaude, de sortie froide du fluide primaire.

La surface d'échange de chaleur (référence côté fluide primaire) étant une surface finie, et sachant que :  $\overset{\circ}{m}_p C_{pp} dT_p = k(T_p) \Delta T dA_p$ , il vient la contrainte :

$$A_p = \int_{T_{pf}}^{T_{pc}} \frac{\overset{\circ}{m}_p C_{pp}}{k(T_p) \Delta T} dT_p \quad (15.63)$$

L'utilisation du théorème d'Euler appliqué à (15.62) et (15.63) conduit à la condition d'extremum suivante (variable  $T_p$ , fonction  $\Delta T = T_p - T_s$ ), avec l'approximation  $T_p \sim T_s$  ( $\Delta T$ , petit) :

$$\Delta T_{opt} = \lambda^{1/2} \frac{T_p}{k(T_p)^{1/2}} \quad (15.64)$$

$\lambda$ , paramètre de Lagrange, vérifie la condition (15.63), de sorte que si  $k$  représente le coefficient de transfert de chaleur global moyen sur l'intervalle  $[T_{pf}, T_{pc}]$ , il vient :



$$\lambda^{1/2} = \frac{\dot{m} p C_{pp}}{A p k^{1/2}} \ln \frac{T_{pc}}{T_{pf}} \quad (15.65)$$

Par combinaison des relations (15.64) et (15.65), on a :

$$\Delta T_{opt} = \frac{\dot{m} p C_{pp}}{A p (k(T_p))^{1/2}} \ln \frac{T_{pc}}{T_{pf}} T_p$$

Cette relation montre que la différence de température optimale entre les deux courants fluides doit diminuer en allant du côté chaud vers le côté froid ; c'est ce que fait le dispositif de type Claude en réduisant la température du fluide primaire par utilisation d'une détente d'une partie du fluide primaire.

### 15.5.3 Conclusions : quelques applications de la cryogénie

#### a) Production de gaz pur

Le paragraphe précédent a montré comme utilité première de la cryogénie après la production de très basses températures (TBT) la production de gaz purs pour utilisation de leurs propriétés particulières.

À cette utilisation, il faut ajouter le fait que le même procédé permet le traitement des effluents ; la préoccupation environnementale rend cette utilisation de plus en plus importante.

#### b) Des utilisations technologiques de pointes variées

##### ➤ Domaine spatial

Les fluides cryogéniques ( $H_2$ ,  $O_2$ ) sont utilisés dans les moteurs cryogéniques (Ariane V) ; mais le cryorefroidissement à petite échelle est aussi utile en mesure (refroidissement de capteurs) : minimisation des bruits de fond.

##### ➤ Domaine médical

Les TBT sont nécessaires dans les techniques IR (infrarouges), mais aussi en IRM (imagerie à résonance magnétique), ainsi qu'en cryochirurgie.

##### ➤ Domaine énergétique

La fusion contrôlée est très demandeuse de TBT par la nécessité de vide poussé propre (cryopompe), par le confinement magnétique qui impose la supraconduction (voir ci-après).

##### ➤ Vers des applications grand public

La densification des circuits informatiques conduit à des dissipations d'énergie locales incompatibles avec le bon fonctionnement des circuits ; on peut penser que les TBT sont une solution potentielle pour la résolution du problème de refroidissement des circuits.

D'autres applications plus prosaïques se développent dans les industries agroalimentaires, du caoutchouc, ou de la métallurgie (ébarbage).

### c) La supraconduction

Trois variables déterminent l'état supraconducteur : la température, le champ magnétique et le courant électrique.

Il est bien connu que certains métaux laissent passer le courant sans résistance électrique à TBT.

#### ➤ Supraconducteurs de type I

Les matériaux de ce type montrent une transition brutale de l'état normal  $N$ , vers l'état supraconducteur  $SC$  (résistivité électrique nulle), pour une température critique  $T_c$  à champ magnétique ou courant nul. Identiquement à température donnée  $T < T_c$ , la supraconductivité cesse brusquement à une valeur du champ magnétique (du courant électrique) d'autant plus grande que la température est faible ; sinon dans le domaine supraconducteur, le flux magnétique ne pénètre pas le matériaux (induction magnétique nulle : effet Meissner) (voir figure 15.41.a) : supraconducteur diamagnétique.

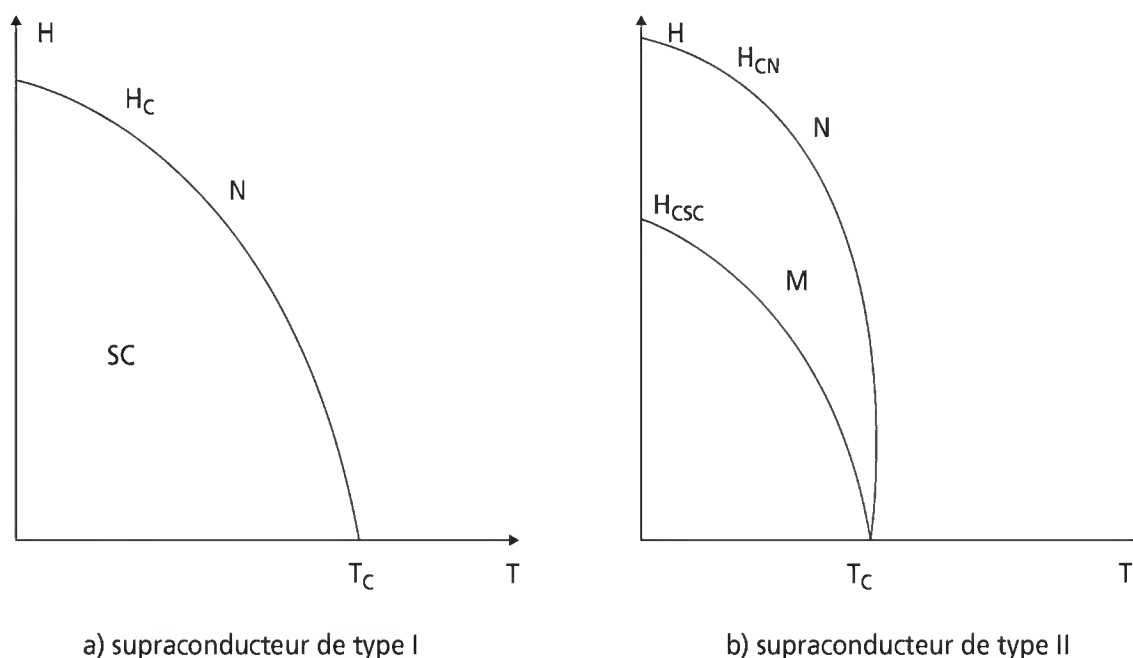


Figure 15.41 Supraconduction de type I et de type II.

#### ➤ Supraconducteurs de type II

La figure 15.41.b montre pour ce type de supraconducteur une zone de transition  $M$ , entre l'état supraconducteur et l'état normal : dans cette zone, il y a mélange des deux états.

L'intérêt des supraconducteurs II est qu'ils admettent (comme le montre le tableau 15.9) une température critique et une induction magnétique critique très supérieures à celles des matériaux de type I ; on note les supraconducteurs haute température (relative) au voisinage de 100 K.

TABLEAU 15.9 TEMPÉRATURE ET INDUCTION CRITIQUE DE SUPRACONDUCTEURS

Élément	Température critique $T_c$ (K)	Induction magnétique critique $B_c = \mu_0 H_c$ (Tesla) (T) à 0 K
Al	1,19	$1,05 \cdot 10^{-2}$
Hg	4,15	$4,12 \cdot 10^{-2}$
Pb	7,18	$8,03 \cdot 10^{-2}$
Sn	3,72	$3,06 \cdot 10^{-2}$
W	0,012	$10^{-4}$

### ➤ Applications existantes et potentielles

Même si les applications des supraconducteurs tardent à se développer (on en parle depuis les années 1990), le tableau 15.10 donne un aperçu de l'existant et des utilisations à venir.

TABLEAU 15.10 APPLICATIONS PRÉSENTES ET FUTURES DES SUPRACONDUCTEURS

Au présent	Au futur
Courants forts	Courants forts
<ul style="list-style-type: none"> <li>– médecine IRM, spectroscopie</li> <li>– aimants recherche, grosses machines (accélérateurs, collisionneurs, fusion contrôlée)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– énergie production (fusion, magnétohydrodynamique) transformation (alternateurs, transformateurs) distribution (lignes....)</li> </ul>
Courants faibles	– transports
<ul style="list-style-type: none"> <li>– magnétométrie (géophysique, médecine)</li> <li>– infrarouge (astronomie)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lévitacion (train haute vitesse)</li> <li>Courants faibles</li> <li>Ordinateurs (lignes internes, logique)</li> </ul>

### d) Les TBT en laboratoire

Dans la course aux basses températures, on fait intervenir nécessairement :

- la réfrigération à dilution qui utilise les deux isotopes de l'hélium  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  (niveau de température : 1 mK) ;
- la désaimantation adiabatique électronique (niveau de température minimum :  $1,5 \mu\text{K}$ ) ;

– la désaimantation adiabatique nucléaire.

Le record mondial actuel est de 450 pK ( $450 \cdot 10^{-12} \cdot K$ ). Cette recherche des TBT n'est pas une fin en soi, car elle permet d'envisager des applications dans les horloges atomiques qui seront plus précises.

(Konig R.) dresse un intéressant bilan des savoir-faire dans ce domaine ; des expériences surprenantes n'ont pas encore livré tous leurs secrets :  $H_2$  superfluide métallique par exemple.

## 15.6 CONCLUSIONS

L'importance du domaine du froid dans notre monde actuel n'est plus à prouver ; la revalorisation de la chaleur est un challenge majeur du monde de demain.

L'ensemble le plus important de documents sur le sujet est disponible auprès de l'Institut international du froid ([www.iifiir.org](http://www.iifiir.org)).

De nombreux programmes informatiques existent aussi dans le domaine, ainsi que des ouvrages spécialisés auprès de [www.librairietechnique.com](http://www.librairietechnique.com).

## BIBLIOGRAPHIE

AGNEW B., AMELI S.M., A finite time analysis of a cascade refrigeration system using alternative refrigerants, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 24, p. 2557-2565, 2004.

Air Liquide, *Encyclopédie des gaz de l'Air Liquide*, Elsevier, 1976.

BROWNE M.W., BANSAL P.K., Challenge in modelling vapour compression liquid chillers, *Ashrae Trans.*, Vol.104, p. 474-486, 1998.

CASTLE W.F., Séparation et liquéfaction d'air : développements récents et perspectives au début du nouveau millénaire, *Int. Journal of Refrigeration*, Vol. 25, p. 158-172, 2002 (en anglais).

COUPAYE E. *et al.*, Comment les avions sont climatisés ? *Revue Générale du Froid*, n° 997, p. 62-67, octobre 1999.

DE LIETO VOLLARO A *et al.*, Condizioni di funzionamento ottimale di una macchina frigorifera a compressione, *Cond. Dell. Aria*, Vol. 42, p. 777-784, 1998.

DINCOLA G. *et al.*, Blends of carbon dioxide and HFC's as working fluids for the low temperatures circuit in cascade refrigerating systems, *Int. Journal of Refrigeration*, Vol. 28, p. 130-140, 2005.

DUMINIL M., L'accumulation de froid à basse température par les eutectiques, *Revue Générale de Froid*, 3 parties (fiches Th 4,5,6), juillet-août, septembre, octobre 2002.

DUMINIL M., L'huile et les systèmes frigorifiques à compression, *Revue Générale du Froid*, Fiche mémofroid, trois parties, juin 2003, avril et mai 2004.

FEIDT M., Production de froid et revalorisation de la chaleur : machines cryogéniques, *Techniques de l'Ingénieur*, BE 8057, (19 pages), BE 8098 (3 pages), octobre 2005.

FEIDT M., Production de froid et revalorisation de la chaleur : principes généraux, *Techniques de l'Ingénieur*, article BE8095, 19 pages, 1998.

- FEIDT M., Thermodynamics and optimization of reverse cycle machines in *Thermodynamic Optimization of Complex Energy Systems*, A. Bejan and E. Mamut Eds, Kluwer Academic Press, p. 385-401, 1999.
- FEIDT M., *Thermodynamique et optimisation énergétique de systèmes et procédés*, Paris, TEC et DOC, 2<sup>e</sup> édition, chapitre 6, 1996.
- FEIDT M., Thermodynamics applied to reverse cycle machines, a review, *Int. J. Refrigeration*, 33, p. 1327-1342, 2010.
- FEIDT M., Evolution of thermodynamic modelling for three and four heat reservoirs reverse cycle machines: a review and new trends, *Int. J. Refrigeration*, 36, p. 8-23, 2013.
- FELDMAN C., Des outils pour prendre en compte le confort humain, *Revue Générale du Froid*, n° 997, p. 43-49, octobre 1999.
- FORBES PEARSON S., Frigorigènes : passé, présent, futur, *Institut International du Froid*, article de synthèse, bulletin n° 3, Paris, 2004.
- GAC A., *Optimisation de la conception et de la gestion des entrepôts frigorifiques*, PYC Livres Édition, 2000.
- GIVONI B., *L'homme, l'architecture et le climat*, Paris, Éditions du Moniteur, 1978.
- GORDON J.M. *et al.*, How varying condenser coolant flow rate affects chiller performance : thermodynamic modelling and experimental confirmation, *Appl. Therm. Eng.*, p. 1149-1159, 2000.
- GROSU L. *et al.*, Thermodynamique en temps fini des machines à production de froid et de chaleur à deux réservoirs : comparaison avec l'approche thermoéconomique (1<sup>re</sup> partie) étude des irréversibilités dans les soupapes du compresseur (2<sup>e</sup> partie), *Termotechnica*, n° 1, p. 1-25, 2002, n° 2, p. 22-26, 2002.
- GROSU L., *Contribution à l'optimisation thermodynamique et économique des machines à cycle inverse à 2 et 3 réservoirs de chaleur*, Doctorat de l'INPL, octobre 2000.
- HAYANI MOUNIR S. *et al.*, Thermo-economic study of a system for pollutant concentration with mechanical vapor compression, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 25, n° 2-3, p. 473-484, février 2005.
- JACQUOT C. *et al.*, Transient convective heat and mass transfer in adiabatic heat exchangers: application to cryogenic heat exchangers, *Int. symposium transient convective heat and mass transfer in single and two phases flows*, editors J. Padet *et al.*, Begell House Inc., NY, p. 323-332, 2003.
- KANOGLU M. Cryogenic turbine efficiencies, *Exergy Int. J.*, Vol. 3, p. 202-208, 2001.
- KHAN J.R, ZUBAIR S.M., Design and performance evaluation of reciprocating refrigerator systems, *Int. J. of Refrig.*, Vol. 22, p. 235-243, 1999.
- KITANOVSKI A., EGOLF P., Thermodynamics of magnetic refrigeration, *Int. J. of Refrigeration*, Vol. 29, p. 3-21, 2006.
- KONIG R., Aux limites du froid : comment obtenir et maintenir de très basses températures très éloignées de l'ambiance naturelle, *Int. J. of Refrigeration*, Vol. 23, p. 577-587, 2000.
- LE BAIL A. *et al.*, Congélation et décongélation de produits alimentaires sous haute pression, *Int. Journal of Refrigeration*, Vol. 25, p. 504-513, 2002 (en anglais).
- LEDUCQ D., GUILPART J., Le contrôle commande dans les ateliers frigorifiques, *Revue Générale du Froid*, n° 1009, p. 33-37, décembre 2000.

- LOTTIN O., Optimisation de la surchauffe dans un évaporateur d'un cycle à compression en présence d'huile, *Int. Journal of Refrigeration*, Vol. 27, p. 1003-1006, 2004 (en anglais).
- LUO L., *Étude thermodynamique et thermique de machine à cycle inverse à adsorption*, thèse INPL, Nancy, novembre 1991.
- MACAUDIÈRE S., Le R404A : le dernier né d'une nouvelle série de fluides frigorigènes, *Revue Générale de Froid*, p. 39-44, mars 1994.
- MARVILLET C., Échangeurs : impact des mélanges zéotropes sur leur dimensionnement, *Revue Pratique du Froid*, n° 824, p. 52-62, 1995.
- PETRESCU S. *et al.*, Les cycles des machines à froid et des pompes à chaleur de Stirling avec vitesse finie, *Entropie*, n° 232, p. 51-56, 2001.
- ROYON L., Considérations générales sur l'écoulement des liquisols, *Revue Générale de Thermique*, n° 1029, p. 39-44, mai 2002.
- SOKOLOV M. *et al.*, Cycles frigorifiques améliorés à éjecteur et mus par de la chaleur dégradée, *Revue Internationale du Froid*, Vol. 13, p. 351-363, 1990 et Vol. 14, p. 24-31, 1991.
- SUBLON J., FEIDT M., *Étude prospective sur les machines à froid*, Rapport final GAT 2<sup>E</sup>, AC Énergie CNRS, juin 2005.
- SUHANAN, *Étude et réalisation d'un cryoréfrigérateur à cycle Joule-Thomson utilisant les compresseurs thermiques par adsorption-désorption*, Thèse Université Henri Poincaré, Nancy, 1994.
- VIDAL S., La production de neige de culture pour pistes, *Revue Générale du Froid*, n° 1025, p. 31-35, 2002.
- YAN Z., CHEN J., The effect of field dependent heat capacity on the characteristics of the ferromagnetic Ericsson refrigeration cycle, *J. Appl. Phys.*, p. 1-5, 1992.
- YOUBI IDRISSE M., Diagramme de Mollier modifié par la présence d'huile, *Revue Générale du Froid*, n° 1034, p. 39-44, juin 2003.
- YU F.W., CHAN K.T., Optimum fan staging for air cooled chillers, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 25, p. 2204-2218, 2005.

## Chapitre 16

# Combustion et moteurs à combustion

### 16.1 COMBUSTION ET COMBUSTIBLES

#### 16.1.1 Généralités

##### *a) Combustion vive, combustion lente*

Une combustion est une réaction thermochimique entre un comburant et un combustible. Cette réaction d'oxydation se produit sous forme de combustion lente (processus naturel d'oxydation), de combustion vive (combustion au sens commun).

Les réactifs (comburant-combustible) se présentent sous des formes variées selon l'état physique et de mélange ; le comburant classique est l'air par son composé oxygène.

Si la réaction déclenchée localement est capable de se propager dans la masse entière du système, celle-ci est qualifiée d'explosion.

##### *b) Flammes*

L'établissement de la combustion vive constitue le phénomène d'inflammation ; celui-ci peut être spontané ou commandé.

La combustion donne lieu à des flammes qui peuvent se propager de façon laminaire ou turbulente. S'il n'y a pas de mélange préalable (homogénéité), on observe des flammes de diffusion, les plus courantes dans les applications techniques et industrielles.

Exemples de mélange préalable : bec Bunsen, certains moteurs à combustion interne (MCI).

Les flammes rendent compte de mécanismes de réactions, par la présence de molécules et radicaux excités (chimie luminescence, chimie ionisation).

Les combustions font intervenir des réactions en chaîne (souvent complexes) par l'intermédiaire d'électrons non appariés dans le radical ou d'atome libres.

**Remarque :** ces chaînes peuvent être matérielles ou énergétiques.

**Exemple :** Espèces actives dans la combustion de  $H_2$  :  $\dot{H}, \ddot{O}, \dot{O}H, H\dot{O}_2$ .

### c) Température et composition des produits de réaction

La réaction chimique peut être incomplète (utilisation en synthèse de produit) ou complète, cas le plus fréquent sans excès de combustible. Pour les réactions complètes, la température se situe dans la gamme 1 000 °C-5 000 °C : il en résulte des équilibres pour les espèces présentes (avec des constantes d'équilibre fonction de la température (voir chapitre 6)).

**Exemple :** pour une réaction stoechiométrique entre  $H_2$  et  $O_2$  selon  $H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O$ , la température des produits de réaction vaut 2 810 °C, et les espèces présentes sont  $H_2O(57\%)$  ;  $O_2(5\%)$  ;  $H_2(16\%)$  ;  $OH(10\%)$  ;  $H(8\%)$  ;  $O(4\%)$ .

## 16.1.2 Thermochimie de la combustion

### a) Les combustibles solides

Les principaux combustibles solides sont le bois, la tourbe, les lignites, la houille (charbon), l'antracite (charbon) et plus récemment des déchets industriels, les ordures ménagères et des pailles.

Ces combustibles solides sont composés essentiellement de cellulose  $(C_6H_{10}O_5)_n$  et de lignines plus des traces de matières minérales et stériles (les cendres).

Bien que n'ayant pas de formule chimique définie, on les caractérise par une composition chimique équivalente qui est obtenue par analyse :  $C_c H_h O_o N_n S_s$  pour le combustible pur et sec.

**Exemple :** pour le bois, en négligeant azote et cendre, on a  $CH_{1,5}O_{0,65}$  à l'état sec.

L'analyse permet la détermination des teneurs en humidité, matières volatiles, carbone fixe, cendres.

Le bois sec est caractérisé par un PCI de 18 MJ/kg.



### b) Les combustibles liquides

Pour la plupart, ce sont des hydrocarbures extraits du pétrole, par traitement de ce qu'on appelle le brut. Ils comportent quatre grandes familles :

- les paraffiniques (dont les alcanes :  $C_n H_{2n+2}$ ) ;
- les oléfiniques (dont les alcènes :  $C_n H_{2n}$ ) ;
- les naphténiques ( $C_n H_{2n}$  : dont le cyclopentane) ;
- les aromatiques ( $C_n H_{2n-6}$  : dont le benzène).

Par distillations complétées d'autres traitements (fractionnement ; reformage), on obtient :

- des gaz ;
- des essences légères ou lourdes ;
- du kérosène (pour les moteurs d'aviation) ;
- du gazole (pour les moteurs diesels et le chauffage domestique) ;
- des fuels légers (pour les gros moteurs diesels et le chauffage) ;
- des mélanges lourds (huiles de graissage, paraffine, asphalte).

**Remarque :** par mélange, on obtient des fuels lourds.

#### ► Caractéristiques des combustibles liquides

Les principales caractéristiques d'un combustible liquide sont la volatilité (vaporisation), le point d'éclair : température la plus basse à laquelle le liquide émet des vapeurs inflammables au contact d'un corps chaud, le point de congélation, la viscosité.

Ces deux dernières données sont importantes pour le transfert du fluide. Les combustibles liquides ont un PCI de l'ordre de 40 à 44 MJ/kg (plus de deux fois celui du bois).

### c) Les combustibles gazeux

Ces gaz sont principalement du méthane  $CH_4$ , avec des traces d'hydrocarbures légers, de  $N_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2S$  et vapeur d'eau.

Leur pouvoir calorifique inférieur est voisin de 37 MJ/m<sup>3</sup>.

#### ► Les gaz de pétrole GP

Ceux-ci sont obtenus par traitement ; les deux principaux sont le propane  $C_3H_8$  et le butane  $C_4H_{10}$ .

Leur PCI est du même ordre de grandeur que celui du GN (gaz naturel).

#### ► Autres gaz

Ces gaz peuvent être des gaz de four à coke, de haut fourneau (gaz pauvre 3,5-50 MJ/Nm<sup>3</sup>), des gaz de gazogène (combustion incomplète d'un combustible solide ; du biogaz, obtenu par fermentation ; des gaz riches (de distillation de la houille) 12,5-16,5 MJ/Nm<sup>3</sup>).

#### d) Les biocombustibles et $H_2$

Pour lutter contre les émissions de gaz à effet de serre et réduire la dépendance énergétique, les biocombustibles (biocarburants) sont une perspective d'avenir de plus en plus étudiée.

Les filières envisagées sont multiples ; on rapporte ci-après des principales solutions envisagées : les biohuiles végétales (biogazole), les bioalcools et dérivés, les biogaz et l'hydrogène, les huiles végétales (esters méthyliques).

Il s'agit ici essentiellement d'huile à base de colza ou de tournesol. Les principales propriétés physiques de l'huile de colza sont rapportées dans le tableau 16.1, comparativement à celles du gazole.

TABLEAU 16.1

	Huile de colza	Gazole
Densité à 20 °C en kg/l	0,916	0,85
Viscosité mm <sup>2</sup> /sec 20 °C	77	2,5-5,5
Point de trouble °C	- 11	1 (selon la saison)
Point d'écoulement °C	- 21	- 9 à - 18 (selon la saison)
Indice de cétane	32-36	48-50
PCI volumique à 20 °C kJ/l Soit en % du gazole	34 300 97,0 %	35 350 100 %
PCI Massique kJ/kg	37 440	42 083
Teneur en soufre (source AEV) g/l Soit en % du gazole	0,02 7,7 %	0,26 100 %

Il apparaît alors sur ce comparatif une moindre pollution (imbrûlés), une légère surconsommation ; l'utilisation de ce biocarburant peut se faire sans restriction dans les moteurs à injection indirecte. En mélange, il apparaît des limitations qui conduisent si on veut un usage sans restriction soit à des modifications du moteur (injecteur, préchauffage), soit à une conception spécifique du moteur.

#### ► Les bioalcools et dérivés

Ceux-ci sont le méthanol et l'éthanol obtenus par fermentation ou fabrication.

##### *Le biométhanol*

Les principales propriétés physiques du méthanol (et de l'éthanol) sont fournies dans le tableau 16.2.

TABLEAU 16.2 PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DU MÉTHANOL ET DE L'ÉTHANOL

Propriétés physiques du méthanol : – Molécule : $\text{CH}_3\text{OH}$ – Liquide incolore avec une légère odeur d'alcool – Masse molaire : $32 \text{ g.mol}^{-1}$ – Température d'auto-inflammation : $470^\circ\text{C}$ – PCI massique : $19,6 \text{ MJ.kg}^{-1}$ – Température de fusion/d'ébullition : $-97,8^\circ\text{C}/64,5^\circ\text{C}$ – $P_v(20^\circ\text{C})$ : $0,128 \text{ bar}$ – Indice de cétane : 5	Propriétés physiques de l'éthanol : – Molécule : $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ – Masse molaire : $46,1 \text{ g.mol}^{-1}$ – Température d'auto-inflammation : entre $366$ et $423^\circ\text{C}$ – PCI massique : $26,7 \text{ MJ.kg}^{-1}$ – PCI volumique : $21,1 \text{ MJ.kg}^{-1}$ – Rapport stoechiométrique air/carburant : 9 – Liquide incolore avec une légère odeur d'alcool – Température de fusion/d'ébullition : $-114^\circ\text{C}/78,2^\circ\text{C}$ – $P_v(38^\circ\text{C})$ : $0,159 \text{ bar}$ – Indice d'octane recherché : 108,6 – Indice d'octane moteur : 89,7
--	---

Le biométhanol peut être utilisé tant dans les moteurs à essence que dans les moteurs diesel, mais il reste à la fois corrosif et toxique.

### Le bioéthanol

Il est principalement issu de la betterave et de la canne à sucre ; actuellement, son prix de revient serait comparable au prix du pétrole brut ( $0,4$ - $0,6$  euro/litre en avril 2006).

Ce carburant peut être utilisé comme :

- additif sans aucune modification des moteurs, jusque  $10$  à  $15\%$  en concentration ;
- sous réserve de compatibilité des matériaux, jusque  $25\%$  ;
- dans des moteurs spéciaux sous forme anhydre, jusque  $85\%$  ;
- avec de légères modifications sous forme d'hydrates ( $100\%$ ).

Le bioéthanol conduit à une légère diminution des émissions et des performances.

### ► Les biogaz et $\text{H}_2$

#### Les biogaz

Ils sont obtenus par fermentation en digesteur et nécessitent une purification (l'usage immédiat en pile à combustible PEMFC n'est pas possible, par exemple).

Le  $\text{Nm}^3$  de gaz équivalent, en PCI, à environ  $1 \text{ l}$  d'essence, le biogaz conduit généralement à une adaptation du moteur : la bicarburation.

#### L'hydrogène

L'hydrogène est présenté comme le combustible propre de demain ; en effet, sa réaction de combustion ne fournit en produit de réaction que de l'eau.

Les principaux problèmes à résoudre sont pour ce combustible liés à sa production : électrolyse, décomposition thermochimique de l'eau et son stockage : stockage cryogénique, sous haute pression, sous formes d'hydrures.

Ces thèmes sont l'objet de recherches en cours.

Les deux applications les plus avancées concernent le domaine des piles à combustible PACo, dont les piles PEMFC (*Polymer Electrolyte Membrane Fuel Cell*) à basse température et la combustion vive en moteurs (moteur classique automobile : un prototype BMW existe ; moteur cryogénique en astronautique).

La comparaison hydrogène, méthane en termes de PCI reste contrastée selon la spécificité massique ou volumique :

$$H_2 \text{ PCI}_{\text{massique}} : 142 \text{ MJ/kg} \text{ PCI}_{\text{volumique}} : 12 \text{ MJ/NM}^3$$

$$CH_4 \text{ PCI}_{\text{massique}} : 55 \text{ MJ/kg} \text{ PCI}_{\text{volumique}} : 37 \text{ MJ/NM}^3$$

### ► Comparaison des carburants

Actuellement, l'hydrogène reste coûteux ; c'est un combustible en devenir.

Pour les autres biocarburants, la comparaison en termes d'émissions aux carburants classiques montre que pour l'effet de serre le gazole émet 3 390 gCO<sub>2</sub>/kg comparé à la plage 600-700 gCO<sub>2</sub>/kg pour les huiles végétales et que l'essence émet de l'ordre de 3 650 gCO<sub>2</sub>/kg comparé à une moyenne de 2 000 g/kg pour l'éthanol et ses dérivés.

Le rapport de l'énergie restituée sur l'énergie non renouvelable mobilisée est d'environ 4 pour les huiles végétales, 1,5 pour le bioéthanol.

Quoi qu'il en soit, la surface cultivable nécessaire à l'autosuffisance des besoins actuels pour la France est dépassée et irréalisable : il semble qu'il faudra « faire feu de tout bois » ; les projets actuels visent à une participation des biocarburants à hauteur d'environ 7 % en 2010.

## 16.1.3 Thermochimie de la combustion

Le paragraphe sur les combustibles a permis de montrer que tout combustible classique peut se représenter schématiquement par la formule chimique fictive suivante,  $C_xH_yO_zNuS_s$  ; ce combustible est supposé, dans ce qui suit, associé au comburant air sec, un mélange d'oxygène et de gaz neutres (essentiellement azote : 1 mole d'oxygène pour 3,77 moles de N<sub>2</sub>).

La masse molaire fictive du combustible est alors :

$$M = 12x + y + 16z + 14u + 32s$$

**Remarque :** il est alors possible de relier la composition molaire à la composition massique du combustible (% ou titres massiques respectifs X,

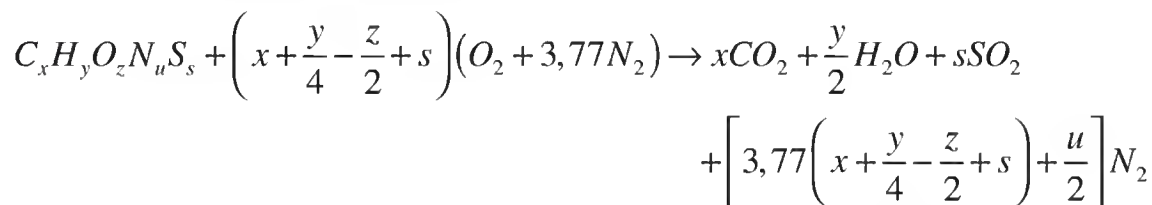
Y, Z, U, S) ; exemple :  $x = \frac{MX}{12}$ .

## a) Combustion théorique

La combustion théorique correspond à la combustion idéale ou complète d'un mélange stoechiométrique.

## ➤ Conservation de la matière

Elle résulte de l'équation chimique :



On voit sur cette équation que le volume ne se conserve pas dans la réaction, et que par ailleurs pour les combustions la chaleur de réaction porte les produits de réaction à haute température (réactions exothermiques).

## ➤ Pouvoir comburivore

Celui-ci représente le volume d'air  $V_a$  (ou air stoechiométrique) nécessaire à la combustion ; il peut s'exprimer en  $Nm^3$  d'air par kg de combustible liquide ou solide ou par  $Nm^3$  de gaz.

**Remarque 1 :** on peut aussi définir un pouvoir comburivore en référence massique.

À la notion de pouvoir comburivore  $V_a$  correspond celle de pouvoir fumigène  $V_f$ , pour les fumées produites.

## ➤ Pouvoirs calorifiques

C'est pour un combustible donné la quantité de chaleur dégagée par la combustion complète à  $P = 1\,013$  mbar et  $t = 0$  °C de l'unité de masse (1 kg), ou de l'unité de volume de combustible (combustion isobare).

## ➤ Pouvoirs calorifiques supérieur, inférieur

La différence entre le PCS pouvoir calorifique supérieur, et le PCI pouvoir calorifique inférieur réside dans la forme de l'eau qui est liquide dans le premier cas, vapeur dans le second.

La différence énergétique réside dans la chaleur latente de vaporisation de l'eau à la température donnée (44 kJ/mole à 0 °C) :

$$PCS = PCI + 44.N$$

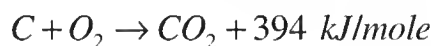
$N$ , nombre de moles d'eau produites par la combustion.

**Remarque 1 :** il peut y avoir lieu de corriger aussi de l'humidité présente dans le combustible.

**Remarque 2 :** selon les tables, les conditions peuvent varier :



**Exemple :**  $P = P_{atm}$ ,  $T = 298,16 \text{ K}$  (et non  $273,16 \text{ K}$ )



**Remarque 3 :** on peut aussi définir un pouvoir exergétique pour un combustible.

Au pouvoir calorifique isobare précédent dont la détermination expérimentale se fait par calorimètre de Junkers, correspond un pouvoir calorifique isochore mesuré en bombe calorimétrique de Mahler.

**Remarque :** on a vu antérieurement comment déterminer théoriquement les PCI.

### b) Combustions réelles

#### ➤ Définitions des combustions conventionnelles

Ces combustions sont faites avec de l'air comburant. Elles sont :

- oxydantes en cas de combustion complète sur une quantité d'air supérieure au pouvoir comburivore ;
- semi-oxydantes en cas de combustion incomplète sur une quantité d'air supérieure au pouvoir comburivore ;
- stoechiométrique incomplète sur une quantité d'air égale au pouvoir comburivore ;
- réductrices en cas de combustion complète sur une quantité d'air inférieure au pouvoir comburivore ;
- semiréductrices en cas de combustion incomplète sur une quantité d'air inférieure au pouvoir comburivore.

#### ➤ Grandeurs caractéristiques des combustions réelles

##### *Taux d'aération ou facteur d'air*

Soit  $V_A$  le volume d'air réel utilisé dans la combustion réelle ;  $n$  le facteur d'air est défini par :

$$n = \frac{V_A}{V_a} = 1 + \frac{e}{100}$$

$e$ , représente l'excès d'air (exprimé en pourcentage).

**Remarque :**  $n = 1$  : combustion neutre ;  $n > 1$  : combustion oxydante ;  $n < 1$  : combustion réductrice (défaut d'air).

Cette notion est très utilisée pour les chaudières.

##### *Richesse d'un mélange*

Les motoristes utilisent couramment cette notion.

La richesse  $R$  d'un mélange est le rapport entre la masse de carburant (combustible) associée à une certaine masse de comburant, et la masse de combustible qu'il faut associer à cette même masse de comburant pour obtenir un mélange stoechiométrique ou neutre.

$$R = \frac{m_{\text{combustible vrai}}}{m_{\text{combustible stoechiométrique}}} = \frac{1}{n}$$

**Remarque :**  $R = \frac{1}{1 + e/100}$  ;  $e = 100 \frac{1 - R}{R}$ .

Un mélange sera dit riche si  $R > 1$ , pauvre si  $R < 1$ .

Un bon réglage de combustion tant dans les moteurs qu'en chaudière consiste à rechercher une richesse ou un excès d'air optimal (au sens d'un critère donné).

Le tableau 16.3 rend compte des valeurs caractéristiques de  $e$ ,  $n$ ,  $R$  pour les combustions réelles.

TABLEAU 16.3 VALEURS CARACTÉRISTIQUES DE  $e$ ,  $n$ ,  $R$ .

Nature de la combustion	$e$ %	$n$	$R$	Observation
Théorique	0	1	1	C. complète
Oxydante	$> 0$	$> 1$	$< 1$	C. complète
Semi-oxydante	$> 0$	$> 1$	$< 1$	C. incomplète
Stoechiométrique	0	1	1	C. incomplète
Réductrice	$< 0$	$< 1$	$> 1$	C. aussi complète que possible
Semi-réductrice	$< 0$	$< 1$	$> 1$	C. incomplète

### ► Combustions oxydantes et combustions réductrices

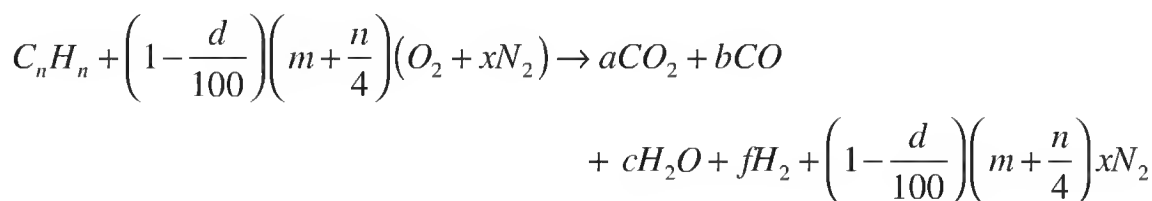
Les combustions oxydantes sont pratique courante dans les fours et les chaudières, avec une valeur de  $e$  voisine de 10 % ( $R = 0,90$ ).

Il en est de même dans le domaine des turbines à combustion où la richesse  $R$  est au voisinage de 0,25 ( $e = 300$  %) : l'excès d'air est très grand dans les turbo-réacteurs.

Les combustions réductrices : dans le domaine des moteurs à allumage commandé, le  $MAX \dot{W}$  est obtenu en mélange riche ( $R$  voisin de 1,10), mais les contraintes d'environnement amènent à revoir le réglage du côté des mélanges pauvres : les produits finaux de combustion sont en effet fonction de la richesse, des conditions de température et de pression, et du contact entre les produits de réaction (pré-mélangés ou non). La combustion réductrice produit du CO, H<sub>2</sub>, des hydrocarbures intermédiaires et des suies (carbone amorphe). Elle est de ce fait utilisée dans des fours métallurgiques et en synthèse chimique.

Méthode des équilibres thermodynamiques : la résolution la plus complète de la détermination des espèces dans les produits de réaction nécessite d'ajouter aux équations générales de conservation des espèces (bilans matière), les équations d'équilibre des espèces chimiques à  $P, T$  pour fermer le problème.

**Exemple :** combustion ménagée d'un hydrocarbure  $C_m H_n$  avec défaut de comburant  $d(O_2 + xN_2)$



bilan C :  $a + b = m$

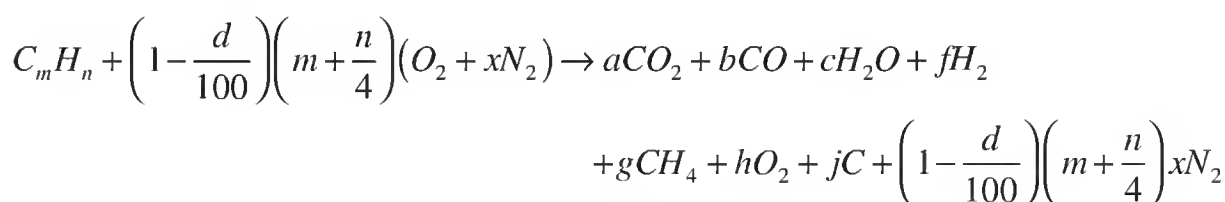
bilan H :  $(2c + f) = n$

bilan O :  $2a + b + c = 2 \left(1 - \frac{d}{100}\right) \left(m + \frac{n}{4}\right)$

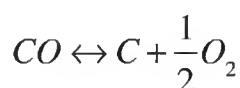
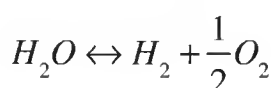
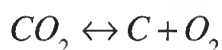
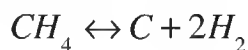
3 équations, 4 inconnues.

**Remarque :** le  $CO_2$  étant facile à doser, une mesure fournirait  $a$  et résout le problème ; mais nous avons supposé la formation exclusive de  $CO_2, CO, H_2O, H_2$ .

Dans les espèces intermédiaires,  $CH_4$  a une constante d'équilibre forte ; la réaction s'écrit donc :



avec les réactions d'oxydation partielle suivantes :





Ces réactions sont des réactions d'équilibre telles que (loi d'action de masse) les constantes d'équilibre valent :

$$K_1 = \frac{P_{H_2}^2}{P_{CH_4}} ; K_2 = \frac{P_{O_2}}{P_{CO_2}} ; K_3 = \frac{P_{O_2}^{1/2} P_{H_2}}{P_{H_2O}} ; K_4 = \frac{P_{O_2}^{1/2}}{P_{CO}}$$

avec :  $P_i = \frac{n_i P}{N}$ , il vient :

$$K_1 = \frac{f^2 P}{g N} ; K_2 = \frac{h}{a} ; K_3 = \frac{f \sqrt{h} \sqrt{P}}{c \sqrt{N}} ; K_4 = \frac{\sqrt{h}}{b} \sqrt{\frac{N}{P}}$$

Les constantes  $K_i$  étant fournies par des tables ou des corrélations algébriques, on aboutit alors à un système de sept équations à sept inconnues solubles.

**Remarque :** des méthodes simplifiées existent aussi ; dans ce cas, la méthode du gaz à l'eau permettrait de résoudre le problème initial, à partir de la réaction (unique) d'équilibre endothermique :  $CO_2 + H_2 \leftrightarrow CO + H_2O$ , avec

$$K = \frac{P_{CO} P_{H_2O}}{P_{CO_2} P_{H_2}} = f(T).$$

Des programmes libres existent pour ces calculs (Agrawal D.).

### ► Rendement de combustion

Définition du rendement de combustion :

$$\eta_{comb} = \frac{\dot{q}_{utile}}{\dot{q}_{théorique \text{ de combustion}}} = \frac{\dot{q}_{théorique} - \dot{q}_{pertes}}{\dot{q}_{théorique}}$$

La première expression ci-dessus correspond à une méthode globale de détermination du rendement.

La deuxième expression utilise ce qu'on appelle la méthode des pertes séparées ; elle impose de connaître les imbrûlés ( $CO, H_2, C_p H_q$ ), mais aussi les pertes thermiques (radiative, convective, conductive) et donc les niveaux de température des fumées (paragraphe suivant).

La connaissance des imbrûlés peut se faire par analyse des fumées. Les mesures peuvent être chimiques (absorption : appareil ORSAT ; elles sont assez longues, mais absolues et précises) ou le plus souvent électriques ou optiques (mesures relatives nécessitant étalonnage). On peut coupler ces mesures à l'usage d'abaques spécifiques (dont le diagramme d'OSTWALD), qui ne sera pas développé ici.

### c) Température maximale et dissociation

#### ➤ Température maximale théorique de combustion

Cette température est obtenue en supposant une enceinte adiabatique (pas de pertes thermiques) ; elle suppose par ailleurs les combustible et comburant ramenés dans les conditions de référence ( $P_{atm}$ , 0 °C ou 25 °C). Elle correspond à la température des produits de combustion pour la combustion théorique.

Si la température maximale reste inférieure à 1 000 K, l'application de la conservation de la matière et de l'énergie suffit à la détermination de cette température.

Si la température maximale dépasse 1 800 K, l'application de la loi d'action de masse (équilibre chimique) permet de déterminer la température maximale en présence de dissociation, mais sans pertes thermiques (radiatives, convectives).

Les températures maximales moyennes sont dans la gamme 2 000-2 400 K.

Les calculs sans dissociation ni rayonnement sont souvent utilisés en première approche pour les fours et foyers de chaudière.

**Remarque :** l'utilisation de la notion d'équilibre chimique s'applique bien aux combustions suffisamment lentes (combustions déflagrantes), mais pas aux combustions détonantes.

#### ➤ Température adiabatique de combustion

Cette température suppose qu'il n'y a pas de déperdition de chaleur des produits de combustion vers l'extérieur ; mais elle tient compte de l'état initial des réactifs et des phénomènes éventuels de dissociation.

La détermination de la température adiabatique des produits de réaction (fumées)  $T_{fad}$  se fait à l'aide du bilan d'énergie.

En supposant une combustion à l'air, il vient :

$$\overset{\circ}{q}_c + \overset{\circ}{q}_A + \overset{\circ}{q}_R = \overset{\circ}{q}_f + \overset{\circ}{q}_{dis} \quad (16.1)$$

avec  $\overset{\circ}{q}_c$ , flux de chaleur sensible du combustible par rapport à la référence.

$\overset{\circ}{q}_A$ , flux de chaleur sensible de l'air de combustion par rapport à la référence.

$\overset{\circ}{q}_R$ , flux de chaleur de la réaction chimique

$\overset{\circ}{q}_f$ , flux de chaleur sensible des fumées

$\overset{\circ}{q}_{dis}$ , flux de chaleur associé aux dissociations.

**Remarque 1 :** pour une combustion non adiabatique, il y a lieu en régime dynamique stationnaire de rajouter le terme  $\overset{\circ}{q}_p$  flux de pertes thermiques.

**Remarque 2 :** même en l'absence de dissociation, il y a lieu de remarquer que les chaleurs spécifiques des produits fondamentaux de combustion

$(CO_2, H_2O, N_2)$  varient de façon très significative avec le niveau de température atteint (voir figure 16.1).

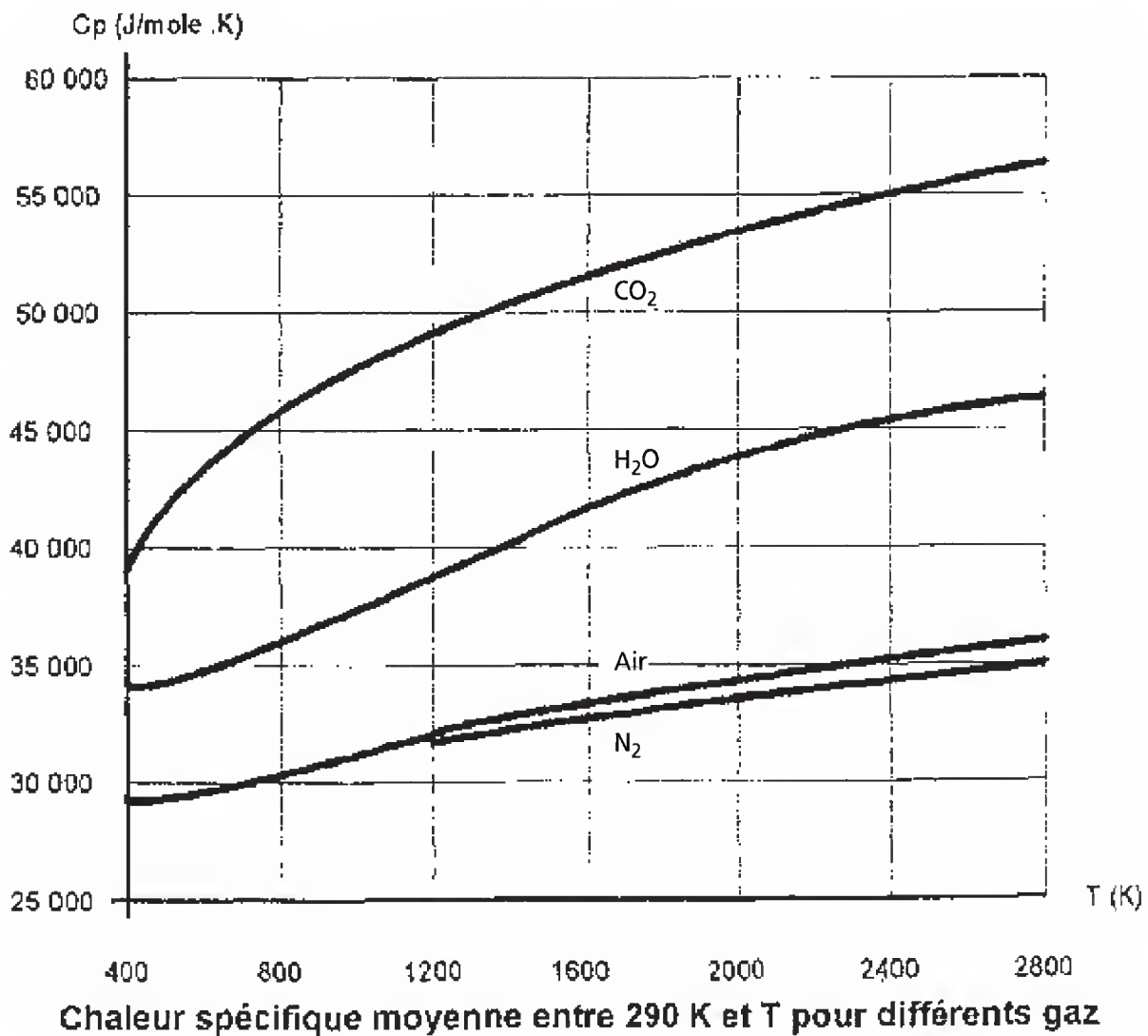


Figure 16.1 Chaleur spécifique moyenne des produits fondamentaux de combustion en fonction de T.

La relation (16.1) peut aussi s'écrire en l'absence de dissociation sous la forme :

$$T_{fad} = T_o + \frac{\dot{m}_c PCI + \dot{m}_A \overline{C_{PA}} (T_A - T_o)}{\dot{m}_f \overline{C_{Pf}}} \quad (16.2)$$

avec :

$\dot{m}_c, \dot{m}_A, \dot{m}_f$  débits massiques respectifs de combustible, d'air, de fumées

$T_o$ , température initiale du mélange combustible + comburant

$T_A$ , température de préchauffage du comburant (air) (opération courante en chaudière)

$\bar{C}_{pf}, \bar{C}_{pA}$ , chaleurs spécifiques moyennes des fumées, de l'air sur leurs intervalles de températures respectifs.

**Remarque 1 :** la variation des  $C_p$  avec la température, de même que la dissociation, introduit la nécessité d'une procédure itérative.

**Remarque 2 :** dans les calculs industriels, des méthodes simplifiées existent, par exemple la méthode des chaleurs d'échauffement (voir exemple ci-après).

### Exemple

Détermination de la température de combustion d'un gaz de haut fourneau (sidérurgie) de composition en volume :

$$CO_2 = 0,062 ; CO = 0,0325 ; H_2 = 0,026 ; N_2 = 0,587$$

On considérera successivement :

- une combustion théorique ( $e = 0$ ) avec gaz et air à la température ambiante de 20 °C ;
- une combustion avec gaz et air préchauffés à 500 °C.

La méthode des chaleurs d'échauffement est due à Le Chatellier ; le tableau 16.4 donne les valeurs d'échauffement en fonction des températures finales (en °C) pour quatre espèces :  $H_2O, CO_2, CH_4$  et  $GP$ .  $GP$  représente en fait  $O_2, N_2, H_2, CO$  dont les chaleurs d'échauffement sont sensiblement identiques.

La chaleur d'échauffement est la quantité de chaleur à fournir au corps considéré pour le porter de  $t_i$  à  $t_f$  à  $P = \text{cte}$  (1 atm) : c'est une valeur intégrale.

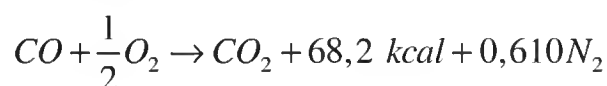
$$q_{iti}^{tf} = \int_{ti}^{tf} C_{p_i}(t) dt$$

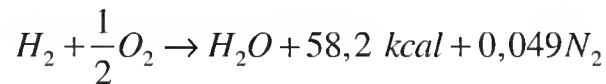
L'équation (16.1) réécrite en référence molaire se transforme dans ce cas sous la forme :

$$q_{co}^{tc} + q_{Ao}^{tA} + q_R = q_{fo}^{tfad} \quad (16.3)$$

Combustion théorique ( $e = 0$ ).

Avec  $t_c = t_A = 20^\circ C$ , il vient :  $q_{co}^{tc} \approx q_{Ao}^{tA} \approx 0$  dans le volume de référence (1 mole de combustible), les équations de combustion sont :





On en déduit la chaleur de combustion par mole de combustible  $(0,325CO; 0,026H_2)$  :

$$q_R = 23,68 \text{ kcal/mole de gaz combustible}$$

Constituants des fumées :

$$CO_2 : 0,0325 + 0,062 = 0,387 ; H_2O : 0,026 ; N_2 : 0,587 + 0,610 + 0,049 = 1,246$$

Sachant que la chaleur d'échauffement de  $N_2$  est prise en référence pour l'estimation de  $t_f$ , et que celle de  $H_2$  est voisine de 1,5 fois celle de  $N_2$ , celle de  $CO_2$  voisine de deux fois celle de  $N_2$ , on trouve pour les fumées une équivalence à :  $0,39 \times 2 + 0,03 \times 1,5 + 1,25 \sim 2,07$  moles de  $N_2$ , soit une chaleur d'échauffement voisine de  $23,68 : 2,07 = 11,4$  kcal/mole de  $N_2$ , pour une température  $t_{fad} = 1\,500^\circ C$  (voir tableau 16.4).

L'itération à partir de cette valeur de départ permet d'affiner le résultat conformément au tableau 16.5.

Au final, on trouve par interpolation numérique ou graphique une température  $t_{fad} = 1\,530^\circ C$ .

Combustion avec gaz préchauffés :

$t_c = t_A = 500^\circ C$  : la chaleur d'échauffement préalable des gaz n'est pas négligeable.

On recherche la caractéristique des gaz combustible + comburant ; il vient :

0,062 mole de  $CO_2$  par mole de gaz

0,587 mole de  $N_2$

0,026 mole de  $H_2$

0,325 mole de  $CO_2$

$$4,76 \frac{32,5 + 26}{200} = 0,835 \text{ mole d'air de combustion}$$

Soit au total 1,773 moles de gaz GP préchauffés conformément à :

$$q_{co}^{500} + q_{Ao}^{500} = 1,773 \times 36 + 0,062 \times 5,2 = 6,70 \text{ kcal/mole de gaz}$$

TABLEAU 16.4

°C	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800
GP	0,3	0,7	1,0	1,4	1,7	2,1	2,5	2,8	3,2	3,6	3,9	4,3	4,7	5,1	5,5	5,8
H <sub>2</sub> O	0,4	0,8	1,3	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7	4,2	4,8	5,3	5,9	6,5	7,1	7,7	8,3
CO <sub>2</sub>	0,4	0,9	1,3	1,8	2,4	2,9	3,4	4,0	4,6	5,2	5,8	6,4	7,1	7,8	8,5	9,2
CH <sub>4</sub>	0,5	1,0	1,6	2,2	2,8	3,5	4,1	4,9	5,7	6,4	7,2	8,0	8,9	9,8	10,8	11,7
°C	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250	1300	1350	1400	1450	1500	1550	1600
GP	6,2	6,6	7,0	7,4	7,8	8,2	8,7	9,1	9,5	9,9	10,3	10,7	11,2	11,6	12,0	12,5
H <sub>2</sub> O	9,0	9,6	10,3	11,0	11,7	12,4	13,2	13,9	14,7	15,4	16,2	17,0	17,9	18,6	19,5	20,3
CO <sub>2</sub>	9,9	10,7	11,4	12,2	13,0	13,9	15,1	15,5	16,4	17,3	18,2	19,2	20,1	21,1	22,1	23,1
CH <sub>4</sub>	12,7	13,7	14,8	15,8	16,9	18,0	19,2	20,4	21,60	22,8	24,10	25,4	26,8	28,2	29,6	31,0
°C	1650	1700	1750	1800	1850	1900	1950	2000	2050	2100	2150	2200	2250	2300	2350	2400
GP	12,9	13,3	13,8	14,2	14,7	15,1	15,6	16,0	16,5	17,0	17,4	17,9	18,4	18,9	19,4	19,8
H <sub>2</sub> O	21,2	22,1	23,0	23,9	24,9	25,9	26,8	27,8	28,8	29,8	30,8	31,9	32,9	33,9	35,0	36,1
CO <sub>2</sub>	24,10	25,2	26,2	27,3	28,4	29,5	30,7	31,9	33,0	34,2	35,4	36,6	37,9	39,2	40,5	41,8
CH <sub>4</sub>	32,5	34,0	35,5	36,9	38,6	40,2	41,9	43,5	45,3	47,0	48,7	50,5	52,9	54,2	56,1	58,0

**Tableau 16.5** ITÉRATION DE DÉTERMINATION DE  $t_{fad}$  (COMBUSTION STœCHIO MÉTRIQUE).

Constituant	Chaleur d'échauffement kcal/mole		Nombre de moles	Chaleur d'échauffement kcal	
	1 500 °C	1 550 °C		1 500 °C	1 550 °C
GP (N <sub>2</sub> )	11,6	12	1,246	14,45	14,95
CO <sub>2</sub>	21,1	22,1	0,387	8,16	8,55
H <sub>2</sub> O	18,6	19,5	0,026	0,49	0,51
				23,10	24,01
				23,68	

Connaissant  $q_{fo}^t = 23,68 + 6,70 = 30,38$  kcal/mole de gaz, on fait l'essai de 1<sup>re</sup> itération à  $t_f = 1\,900$  °C. Les résultats et la suite du calcul sont consignés dans le tableau (16.6).

**TABLEAU 16.6** ITÉRATIONS DE DÉTERMINATION DE  $t_{fad}$  (COMBUSTION AVEC PRÉCHAUFFAGE).

Constituant	Chaleur d'échauffement kcal/mole		Nombre de moles	Chaleur d'échauffement kcal	
	1 900 °C	1 850 °C		1 900 °C	1 850 °C
GP (N <sub>2</sub> )	15,1	14,7	1,246	18,81	18,31
CO <sub>2</sub>	29,5	28,4	0,387	11,42	10,99
H <sub>2</sub> O	25,9	24,9	0,026	0,67	0,65
				30,90	29,96
				30,38	

Une interpolation arithmétique fournit alors la solution :

$$t_{fad} = 1872 \text{ °C}$$

Le préchauffage de 500 °C permet donc une élévation de la température de combustion de 342 °C.

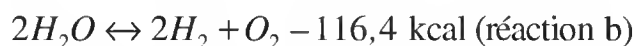
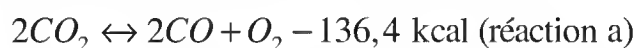
**Remarque :** on voit qu'à ce niveau de température la dissociation est atteinte.

Il est aisé à partir de cet exemple d'envisager l'informatisation de la procédure.

#### ➤ Température de combustion avec dissociation

Comme il a été dit, la dissociation devient sensible à partir d'une température d'environ 1 500 °C.

La méthode du gaz à l'eau qui met en jeu deux réactions de dissociations réversibles endothermiques montre bien qu'il y a abaissement de la température de combustion (ordre de grandeurs 100 °C pour 2 000 °C) :



Cette méthode est utile pour les foyers industriels ; pour les chalumeaux, apparaissent de plus des dissociations atomiques.

Dans les moteurs à combustion interne, la combustion est plus incomplète que dissociative ; l'incidence est de quelques % pour les moteurs à essence, avec des niveaux de température de combustion de 2 500 °C. Elle est totalement négligeable pour les moteurs diesels et à gaz industriels de faible PCI.

La figure 16.2 illustre l'incidence de la dissociation sur le PCI effectif au-delà de 1 500 °C, pour un combustible donné.

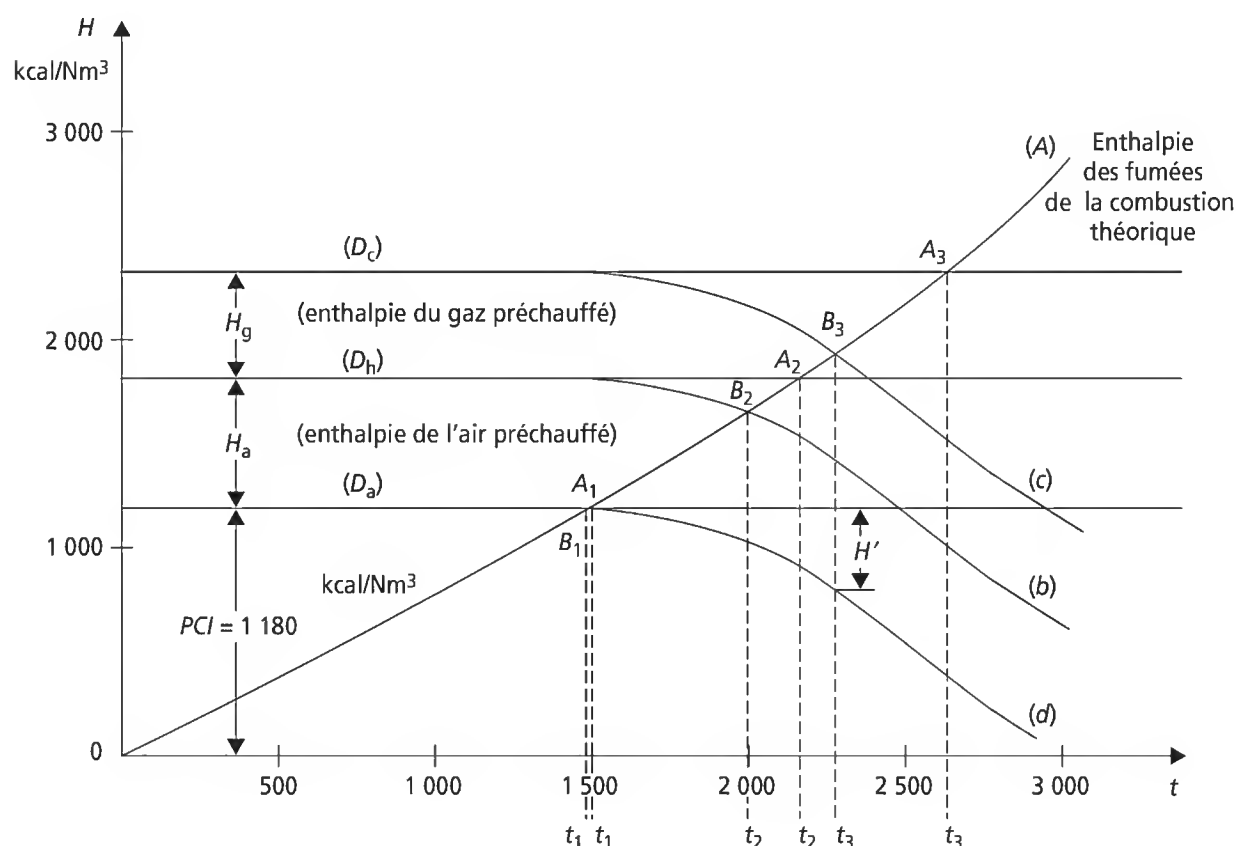


Figure 16.2

La détermination graphique de la température adiabatique des fumées se fait à l'intersection de la courbe de PCI effectif avec la courbe représentative de l'enthalpie des fumées.



*Quelques données sur la dissociation*

Dissociation de  $CO_2$  : la réaction a de dissociation de  $CO_2$  s'effectue dans des conditions de pression totale pour la réaction telles que :  $P = P_{CO_2} + P_{CO} + P_{O_2}$ . Si  $\alpha$  est le degré de dissociation, 1 mole de  $CO_2$  correspond à  $\alpha CO$ ,  $\frac{\alpha}{2} O_2$ ,  $(1-\alpha)CO_2$ , soit un nombre total de moles  $\frac{2+\alpha}{2}$ .

On en déduit la constante d'équilibre  $Kp$  sous la forme :

$$Kp = \frac{P_{CO}^2 P_{O_2}}{P_{CO_2}^2} = \frac{P\alpha^3}{(2+\alpha)(1-\alpha)^2}$$

où :

$$K = \frac{1}{RT} \frac{P\alpha^3}{(2+\alpha)(1-\alpha)^2} \text{ vu que } Kp = K(RT)^{2+1-2}$$

Dissociation de  $H_2O$  :

Le même raisonnement s'applique à la réaction b. Il se confirme que le coefficient de dissociation est fonction de  $P$  et  $T$  ; ces résultats sont illustrés sur les courbes respectives de la figure 16.3 pour les deux réactions précédentes.

**Remarque :** la présence de l'inerte azote dans l'air augmente la dissociation par la diminution des pressions partielles des gaz initiaux.

*d) Propagation de la combustion*

La propagation de la combustion suppose en préalable une inflammation.

**► Inflammation d'un mélange combustible-comburant**

Cette inflammation peut être spontanée : auto-inflammation (exemple dans le moteur diesel), ou commandée (souvent par bougie d'allumage : point chaud ; plus prosaïquement une allumette) : exemple moteur à allumage commandé.

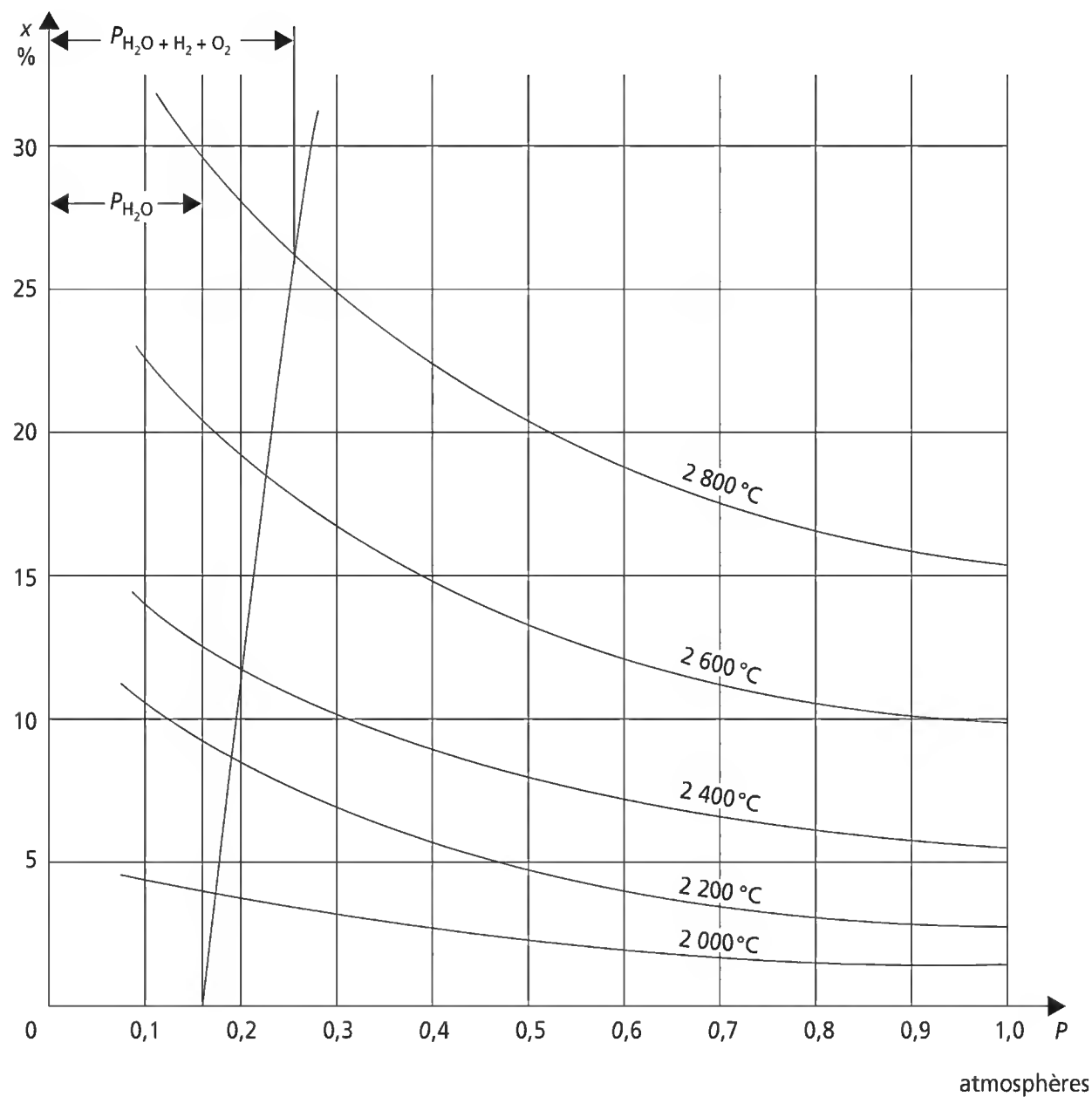
**Remarque :** l'auto-inflammation peut être localisée (ignition) ou non.

Il apparaît aussi que l'auto-inflammation d'un mélange dépend des conditions de pression, température et concentration du mélange.

*Limites d'inflammabilité*

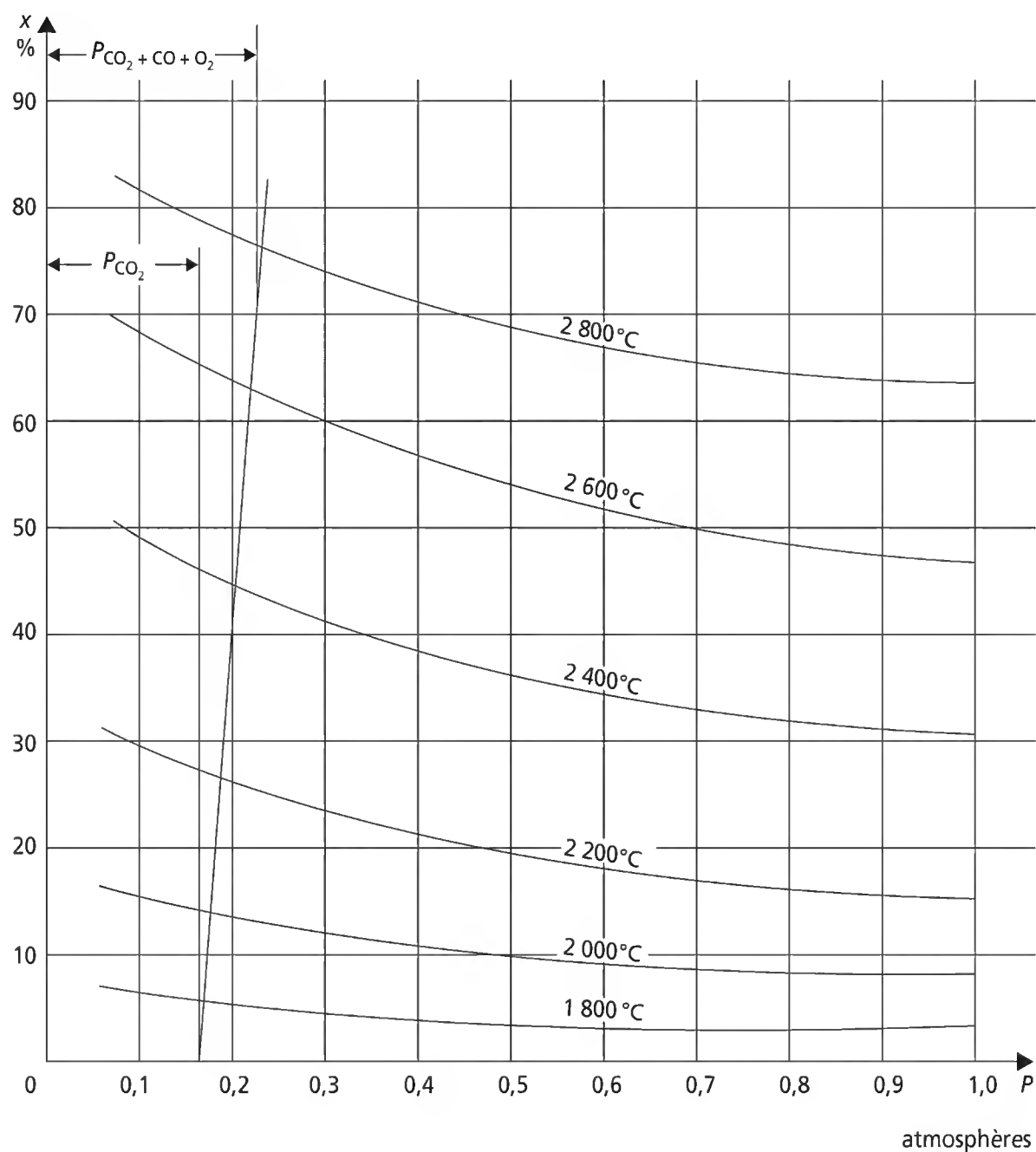
Pour un mélange air-gaz, on conçoit qu'entre l'air pur (0 % de combustible) et le gaz pur (100 % de combustible), il existe des seuils inférieurs  $Li$  et supérieur  $Ls$  de mélange en dehors desquels la combustion n'est pas possible (stable) :  $L$  étant le pourcentage de gaz combustible dans le mélange.

Si  $L < Li$ , il y a manque de combustible, si  $L > Ls$ , il y a manque d'oxygène (comburant).



*Coefficient de dissociation de la vapeur d'eau  
en fonction de la température et de la pression*

**Figure 16.3** Coefficient de dissociation de l'eau et du  $CO_2$  en fonction de  $P$ ,  $T$ .



Coefficient de dissociation de  $CO_2$   
en fonction de la température et de la pression

Figure 16.3 (suite)

Le tableau 16.7 rapporte pour les gaz combustibles les plus utilisés les limites d'inflammabilité dans les conditions d'ambiance.

**TABEAU 16.7** INFLAMMABILITÉ DE GAZ COMBUSTIBLES.

Gaz	Limite d'inflammabilité		Température d'inflammabilité	Vitesse de déflagration
Hydrogène H <sub>2</sub>	4	75	572	280
Oxyde de CO carbone	12,5	74	609	50
Méthane CH <sub>4</sub>	5	14	535	26
Éthane C <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	3	12,5	480	34
Propane C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	2,2	9,5	470	32
Butane C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	1,8	8,5	415	33
Pentane C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	1,5	7,8	310	38,5
Éthylène C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	3	32	490	65
Propylène C <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	2	10,5	460	39
Acétylène C <sub>2</sub> H <sub>2</sub>	2,5	80	305	260
Benzène C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	1,4	7,1	570	55

L'élévation de la température du mélange écarte les deux seuils d'inflammabilité, de même que l'élévation de la pression. Les gaz inertes et la vapeur d'eau par contre diminuent ce même domaine.

**Remarque :** combinaison de gaz combustibles sans inertes ; il vient :

$$\frac{1}{L_i(s)} = \sum_k \frac{x_k}{L_{ki}(s)}$$

Avec  $x_k$ , titre molaire du composant  $k$ .

### Délai d'inflammation

Contrairement à l'explosion, l'ignition (ponctuelle) suppose un délai d'inflammation (déflagration).

À titre d'exemple, pour un hydrocarbure lourd au voisinage de la température ambiante, ce délai est de quelques minutes ; à la température de 600 °C, il sera de quelques secondes.

Si la pression augmente, le délai d'inflammation diminue.

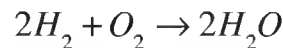
### ► Progression de la combustion

La progression de la combustion se réalise essentiellement par deux mécanismes de base : l'échauffement par transfert de chaleur (les trois modes sont intéressés), la diffusion dans la masse de particules « actives ».

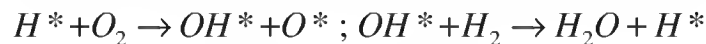
Ce point relève de la cinétique chimique ; il ne sera qu'évoqué ici, le lecteur est renvoyé vers un ouvrage de référence pour plus de détail (Destriau M.).

### *Influence de la cinétique chimique*

Pour illustrer l'influence des radicaux libres, on prend l'exemple de l'oxydation de l'hydrogène :



Cette réaction globale s'accompagne de réactions intermédiaires en chaîne :



et d'une chaîne ramifiée :  $O^* + H_2 \rightarrow OH^* + H^*$

Chacune de ces réactions est régie par ses propres constantes de temps.

### *Propagation de la combustion sous forme d'une onde plane de vitesse constante*

La figure 16.4 représente dans un tube d'axe  $z$  le mouvement relatif de l'amont (gaz frais) vers l'aval (gaz brûlé) à travers la zone de combustion (référentiel).

Pour un tube de section constante, il vient :

Conservation de la matière :  $\rho_{am} w_{am} = \rho_{av} w_{av}$

Conservation de la quantité de mouvement :  $P_{am} - P_{av} = \rho_{am} w_{am} (w_{av} - w_{am})$

On en déduit aisément l'expression de la vitesse de flamme par rapport aux gaz brûlés :

$$w_{am} = v_{am} \sqrt{\frac{P_{am} - P_{av}}{v_{av} - v_{am}}}$$

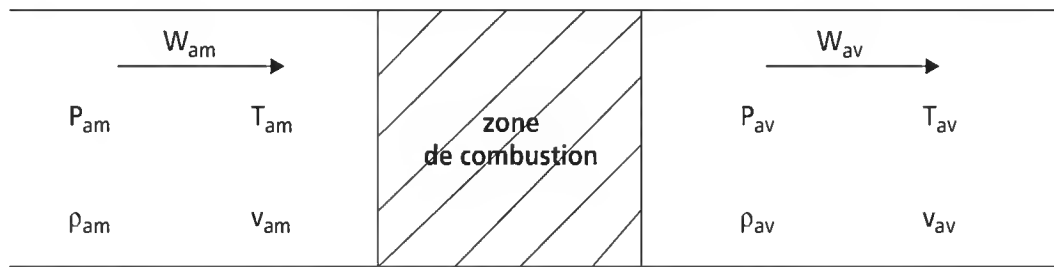
D'où la condition d'existence de la flamme : si  $P_{av} > P_{am}$ , il faut que  $v_{av} < v_{am}$  (contraction) associée à la surpression, si  $P_{av} < P_{am}$ , il faut que  $v_{av} > v_{am}$  (dilatation) associée à la dépression.

En conclusion, le diagramme montre que la combustion en régime dynamique stationnaire d'un mélange combustible homogène peut s'effectuer à deux « vitesses » différentes correspondant à deux mécanismes différents.

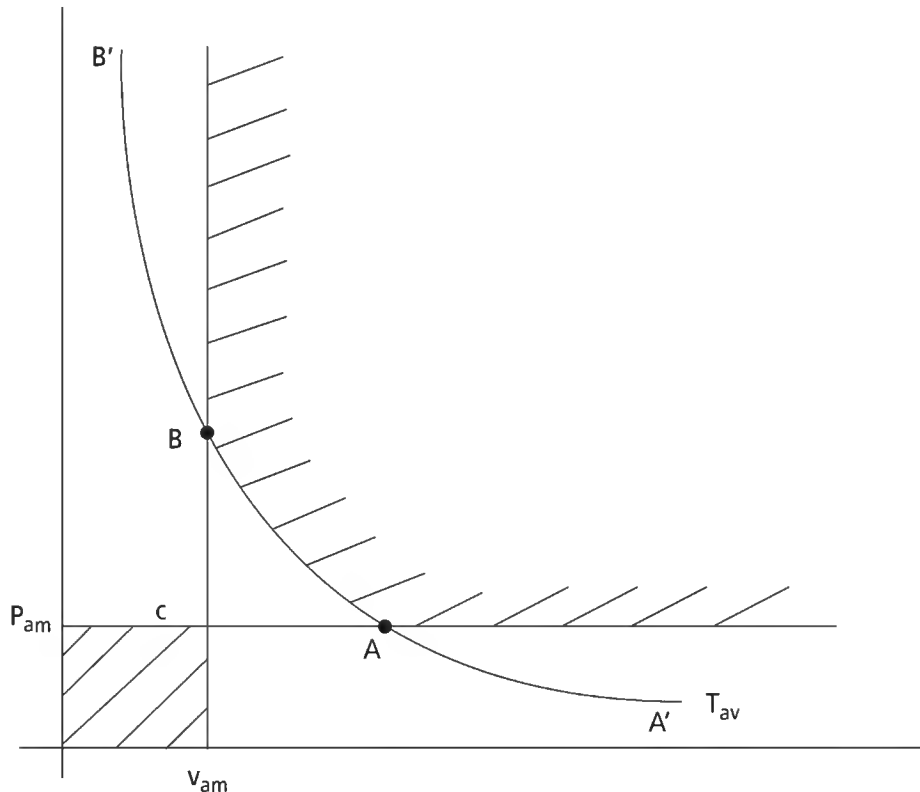
La déflagration (zone AA') où l'inflammation des couches non brûlées se fait par conduction thermique essentiellement et diffusion de radicaux libres (l'ignition se transmet de couche en couche). La vitesse est alors faible (de l'ordre du m/s) ; elle est subsonique ; cette vitesse dite de déflagration est une caractéristique spécifique du combustible gazeux (voir tableau 16.7). C'est une fonction de richesse en combustible ; elle est aussi croissante de la température : une corrélation courante pour la vitesse du front de flamme est la suivante :

$$\frac{w(T)}{w(T_0)} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^n$$

avec  $n = 1,74$  en régime laminaire ;  $n = 1,65$  en régime turbulent.



a) tube de section constante



b) diagramme de Crussard

**Figure 16.4** Combustion sous forme d'une onde plane de vitesse constante.

La détonation (zone BB') : dans ce cas, l'inflammation des couches non brûlées sous l'effet de l'accroissement de température est liée à la surpression propageant la détonation (l'onde de choc provoque une compression adiabatique).

Les vitesses de propagation sont grandes (de l'ordre du km/s) et supérieures (ou voisines) de la vitesse du son.

**Remarque :** les ondes de pression et les ondes de combustion peuvent être plus ou moins dissociées.

### Les flammes

L'hypothèse d'un front de flamme sous forme plane est un cas d'école théorique (figure 16.4). Néanmoins, dans des conditions d'écoulement pas trop chaotiques, les formes de flamme restent simples. Exemples : flammes de bougies, de brûleur.

En présence de turbulences fortes, le problème est beaucoup plus complexe, et donne lieu à d'importantes recherches actuelles (domaine des moteurs).

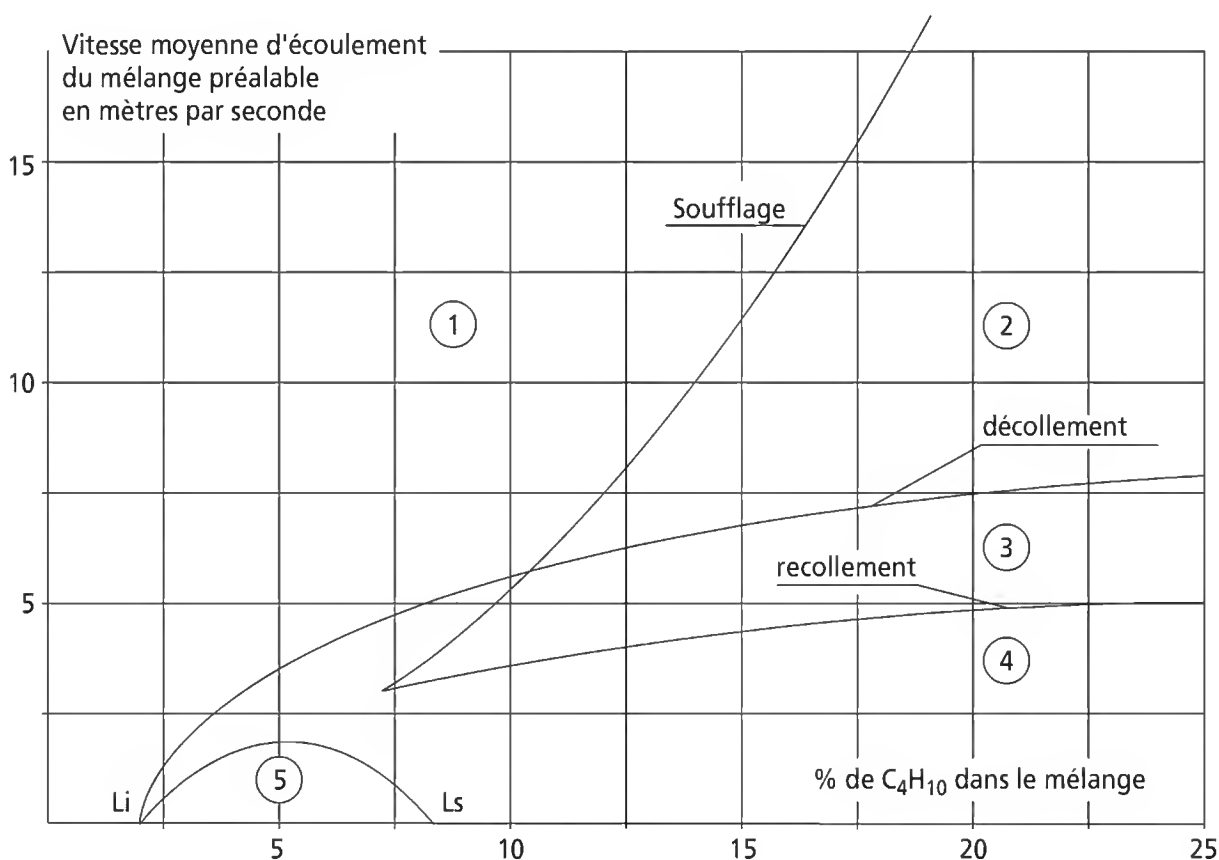
La flamme de diffusion (celle d'une bougie) est obtenue sans mélange préalable. Le taux d'aération primaire est une fonction croissante du diamètre des orifices de sortie et du débit de gaz. Les phénomènes de points jaunes traduisent une combustion incomplète.

Les flammes aérées ou de prémélange sont très énergétiques : la température maximale est obtenue au voisinage du sommet du cône bleu (dard) ; le cône bleu rend compte de la combustion primaire. Le panache autour du cône est le lieu de la combustion secondaire.

Selon la vitesse d'écoulement du mélange combustible, les flammes peuvent être soufflées ou au contraire rentrer dans le brûleur.

La figure 16.5 illustre pour la combustion du butane dans l'air les diverses zones de stabilité des flammes.

Le lecteur qui voudrait approfondir les notions précédentes se référera à (Borghi M.)



- une zone 1 dans laquelle les flammes sont soufflées ;
- une zone 2 où les flammes sont aériennes ;
- une zone 3 où les flammes sont, soit stables, soit aériennes ;
- une zone 4 où les flammes sont stables ;
- une zone 5 où les flammes rentrent dans le brûleur.

Figure 16.5 Stabilité des flammes

c) *Autres formes de combustion*➤  $CO_2$  et effet de serre

Les combustions classiques précédentes libèrent toutes du dioxyde de carbone qui est le principal gaz à effet de serre : les combustibles fossiles participent environ pour moitié à l'augmentation de la concentration de  $CO_2$  atmosphérique. Le tableau 16.8 rapporte des émissions des principaux combustibles fossiles rapportées aux MJ sur PCI.

TABLEAU 16.8 ÉMISSION DE  $CO_2$  DES PRINCIPAUX COMBUSTIBLES FOSSILES.

Combustible	Émission de $CO_2$ kg $CO_2$ /MJ sur PCI
GN gaz naturel	0,055-0,058
GP gaz de pétrole (butane-propane)	0,062-0,065
Combustibles liquides	0,070-0,080
Combustibles solides (charbons)	0,083-0,110

Le coût estimé de la tonne de  $CO_2$  est à ce jour (2006) voisin de 25 euros par tonne pour les signataires du protocole de Kyoto.

D'où la première approche pour réduire les émissions de  $CO_2$  qui consiste en un cycle de capture-transport et stockage du  $CO_2$ .

➤ Capture-Transport-Stockage du  $CO_2$ 

La capture du  $CO_2$  peut se faire par divers procédés (lavage, adsorption, liquéfaction). Le transport peut se faire de façon continue (pipeline) ou par les moyens de transport classique (bateau). Le stockage peut se faire en aquifère (en présence d'un plafond imperméable), dans des mines de charbon désaffectées, dans des gisements pétroliers ou de gaz ; dans ce cas l'exploitation du gisement peut être améliorée.

## ➤ Combustions améliorées

Une voie complémentaire consiste à améliorer la combustion en elle-même ; diverses solutions existent qui visent non seulement à la maîtrise du  $CO_2$ , mais aussi d'autres effluents ( $NO_x$ , imbrûlés).

Parmi ces solutions, on citera trois voies classiques : la combustion en oxygène, la postcombustion et la combustion étagée. Ce type de combustion est envisagé dans les chaudières et fours industriels ; sachant que les oxydes d'azote se produisent préférentiellement en mélange pauvre en combustible (sous forme de  $NO$  et  $NO_2$  en TAC, ou  $N_2O$  en lit fluidisé à température élevée).



La combustion est réalisée en deux étapes : la première avec peu d'oxygène, puis la deuxième pour maintenir la température. La recirculation peut aussi être utilisée.

L'instabilité de la combustion en mélange pauvre (cas précédent), et les inconvénients de la combustion haute température ( $NO_x$ , imbrûlés) peuvent être contournés par la combustion catalytique au contact d'un support poreux métallique ou céramique recouvert de catalyseur ; la combustion sans flamme s'effectue à des températures comprises entre 500 et 1 000 °C, pratiquement sans  $NO_x$ , et avec une meilleure homogénéité de chauffe. Les applications sont tant dans les milieux industriels qu'en turbines à combustion (TAC).

**Remarque :** la conversion catalytique peut même s'effectuer quasiment aux conditions d'ambiance (conversion chimio-électrique) dans les piles à combustible de certains types (PEMFC).

La combustion humide (CVH) est un procédé qui utilise l'eau comme additif, parvenant dans la zone de combustion au côté du combustible et du comburant.

Cette eau additionnelle peut être introduite séparément, en phase liquide ou vapeur ou mélangée à l'air comburant, l'eau étant alors le plus souvent en phase vapeur.

Les avantages de ce type de combustion sont :

- l'opportunité de nouveaux cycles thermodynamiques, tout particulièrement pour les turbines à combustion (voir paragraphe 16.4) ;
- les modifications des conditions de combustion : la diminution de la température permettant une réduction des  $NO_x$  ;
- une teneur en vapeur d'eau des fumées accrue : la température de rosée plus élevée laisse entrevoir une récupération de chaleur latente mieux valorisée.

Toutefois, ces avantages ont un prix technologique en termes de composants supplémentaires (échangeurs) et (ou) de matériaux utilisables. La référence en termes de combustion humide est (Guillet R.).

En conclusion et quoi qu'il en soit, on se dirige vers des combustions propres (contraintes environnementales).

## 16.2 CHAUDIÈRES ET FOURS

Les chaudières et les fours sont sans doute les appareils les plus anciennement utilisés par l'homme sous forme de foyers d'abord ouverts, puis fermés. On considère ci-après brièvement les techniques et technologies de ces appareils.

### 16.2.1 Les fours

Ils sont utilisés pour des traitements thermiques en métallurgie : recuit, revenu, en chimie : plasturgie, réacteur, séchage, polymérisation, céramique, verre, en agro-

alimentaire : cuisson, séchage. Ils peuvent être électriques, à gaz, à fuel, plus rarement à combustible solide.

Dans le cas de combustibles fluides (gaz, fuel), ils mettent en œuvre des brûleurs : ceux-ci permettent une bonne maîtrise de la combustion par commande (allures de chauffe).

Les gaz brûlés sont extraits du four à travers une cheminée ; celle-ci doit être soigneusement dimensionnée pour assurer un bon tirage de l'installation.

**Exemple :** La figure 16.6 représente la coupe d'un four de réchauffage sans oxydation (combustion réductrice, défaut d'air) destiné à des tubes.

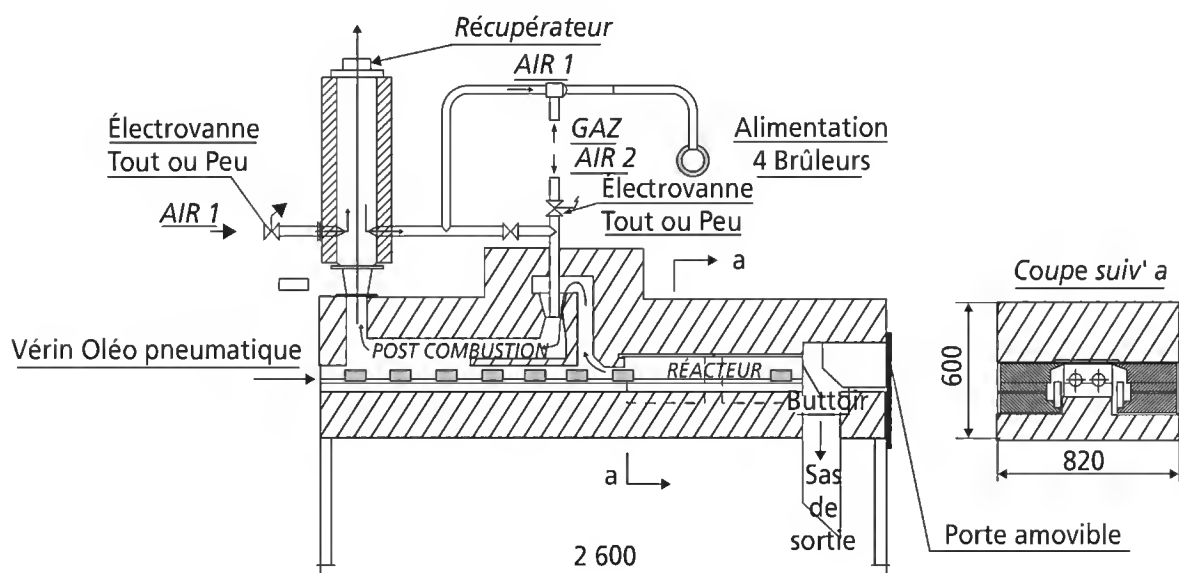


Figure 16.6 Four de réchauffage (coupe).

La figure 16.6 rend compte du fonctionnement d'un four en régime dynamique stationnaire ; le bilan du four s'établit sous la forme :

$$\dot{q}_{\text{brûleur}} = \dot{q}_{u(\text{charge})} + \dot{q}_p + \dot{q}_f \quad (16.4)$$

$\dot{q}_u$ , flux utile reçu par la charge

$\dot{q}_p$ , flux de pertes thermiques à travers les parois

$\dot{q}_f$ , flux de chaleur perdu par les fumées.

Couramment, entre le four et la cheminée est placé un échangeur récupérateur de préchauffage de l'air ; le flux  $\dot{q}_{fr}$  est donc restitué en entrée de four (voir figure 16.7).

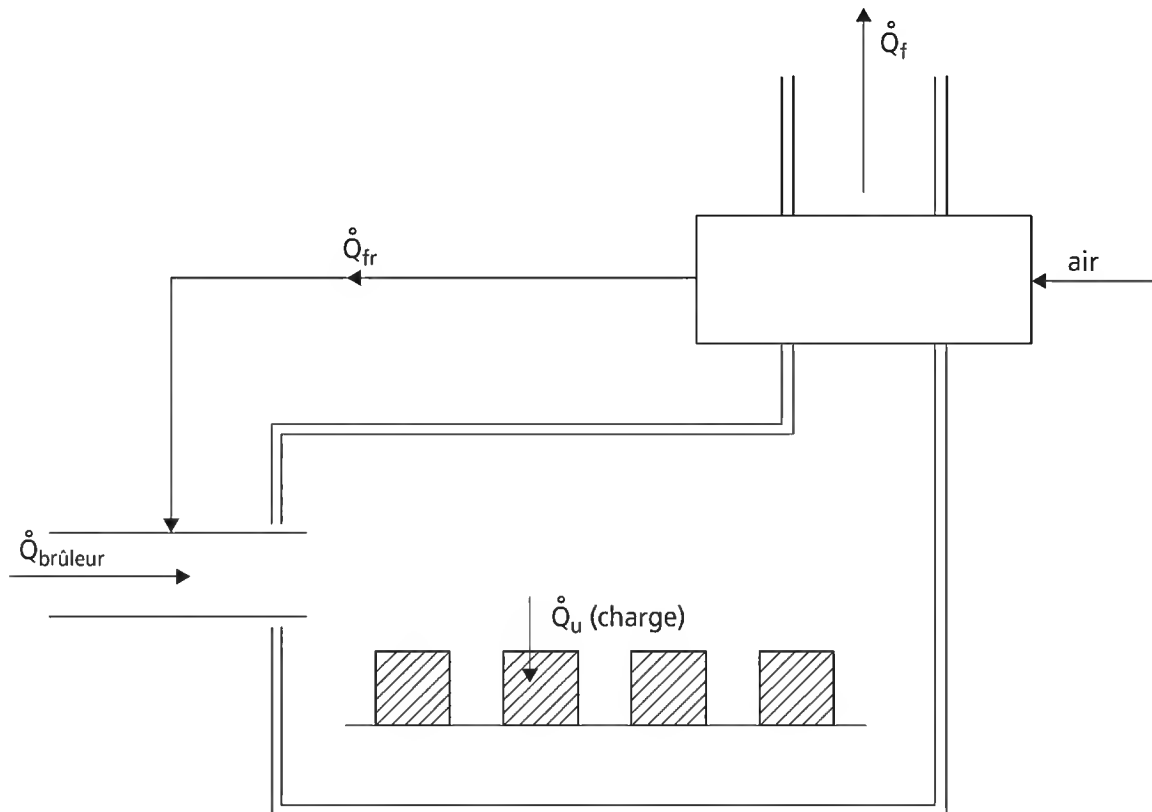


Figure 16.7 Bilan d'énergie d'un four.

## 16.2.2 Les chaudières

### a) Technologie générale

Les chaudières sont très utilisées, tant chez les particuliers que dans l'habitat tertiaire et collectif (chauffage), mais aussi dans le domaine industriel et de l'énergie.

Selon le combustible, la chaudière nécessitera un brûleur ou plusieurs (combustibles fluides). Les chaudières de petite puissance produisent le plus souvent de l'eau chaude sanitaire et (ou) le chauffage.

Les chaudières industrielles produisent de la vapeur saturée ou surchauffée. Les circuits qui y sont liés font alors apparaître un bouilleur, où est produite la vapeur saturée ; des échangeurs surchauffeurs supplémentaires conduisent à la vapeur surchauffée de qualité désirée.

Comme pour les fours, le préchauffage de l'air peut donner lieu à récupération de chaleur sensible sur les fumées (échangeur récupérateur, ou économiseur).

Dans le cas de systèmes à condensation, les températures des fumées sont abaissées à basse température : le choix des matériaux n'est pas neutre, vu les risques de condensation acide.

Pour les foyers, les températures limites sont aussi fonction des matériaux utilisés (réfractaires).

Enfin, on rappelle qu'autour de la chaudière apparaissent des accessoires pour le traitement de  $SO_2$  (nombreuses possibilités), des  $NO_x$  (amont ou aval), des poussières (par exemple dépoussiéreur électrostatique).

### *b) Un exemple particulier : les incinérateurs*

#### ➤ Les déchets

Les incinérateurs sont des dispositifs destinés au traitement des déchets ménagers et/ou industriels ; l'approche qui en est faite aujourd'hui a pris une dimension industrielle et vise de surcroît à la mise en œuvre de procédés de traitement respectueux de l'environnement.

Toutefois, l'incinération simple peut être polluante tant par les fumées, que par les cendres (principalement du mâchefer).

Les déchets à traiter sont les ordures ménagères, les déchets industriels banals ou spéciaux, les déchets hospitaliers, les déchets agricoles.

Les déchets industriels spéciaux et hospitaliers sont soumis à des réglementations strictes.

Les autres déchets donnent lieu à tri sélectif, ce qui permet de renforcer leur PCI, qui sinon reste faible (3 à 8 MJ/kg ; 4 à 5 fois moins qu'un charbon).

#### ➤ L'incinération d'ordures ménagères

La partie principale d'un ensemble d'incinération d'ordures ménagères reste l'ensemble four-chaudière (voir figure 16.8).

Autour de l'ensemble four-chaudière précédent vient un ensemble d'accessoires : à l'amont le tri, le stockage et l'alimentation du four ; à l'aval la production de force éventuelle, puis le traitement des effluents solides, liquides, gazeux.

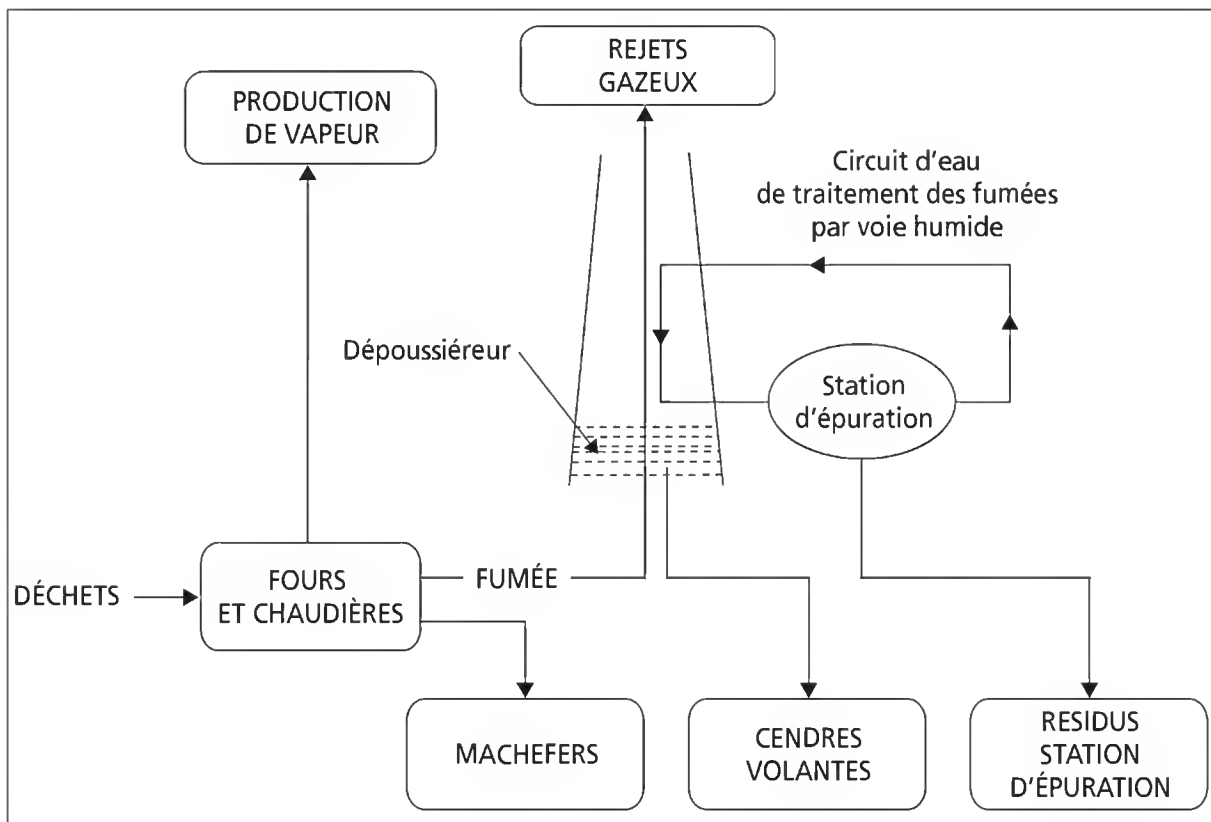
Les principales technologies disponibles sont les fours tournants, les fours vibrants, les fours à grille mobile, les fours à lits fluidisés (denses, rotatifs, ou circulants) pour lesquels à lieu une expérience pilote sur Nancy.

**Remarque 1 :** le traitement des ordures ménagères ou des déchets agricoles fournit des produits agressifs et encrassants ; cela constitue un des problèmes clés de ces installations.

**Remarque 2 :** les déchets industriels sont soumis à des traitements identiques, sauf précautions d'entrée et post-combustion pour élimination totale ; parmi ces déchets, on citera les COV, composés organiques volatils (avec appoint de GN pour le traitement), les déchets chlorés (avec récupération du chlore).

#### ➤ Traitement des effluents d'incinération

Les effluents sont de deux sortes : les solides : surtout des oxydes métalliques (mâchefers et cendres volantes), les gaz plutôt acides (présence de HCl, HF,  $SO_2$ ,  $CO_2$ ).



**Figure 16.8** Schéma de principe d'un ensemble d'incinération d'ordures ménagères.

Les effluents solides très compacts peuvent être, selon leur nature, mis en décharge ultime.

Les effluents gazeux sont généralement neutralisés avec filtration :

- neutralisation en phase humide après filtration (tour de lavage avec appoint de lait de chaux) : bonne captation des halogènes, mais rejets liquides et métaux lourds ;
- neutralisation avant filtration par des procédés dits secs, semi-secs ou semi-humides : l'injection de lait de chaux se fait dans les fumées. Il en résulte aussi des sels de calcium, la condensation des métaux lourds, la captation des particules solides.

L'avantage ici est l'absence de liquide, mais l'inconvénient est une consommation importante de chaux. Des procédés mixtes tendent à se développer.

- D'autres procédés thermiques

La pyrolyse est une décomposition des déchets sous l'effet de la chaleur.

La thermolyse est une pyrolyse sous vide : pression de l'ordre de 0,1 bar pour des températures de 500 °C.

On a vu ainsi dans ce paragraphe que la science et la technologie de la combustion étaient en évolution sensible, sous l'impulsion de la chimie de l'atmosphère et des impératifs environnementaux et sanitaires.

## 16.3 MOTEURS À COMBUSTION INTERNE ALTERNATIFS

### 16.3.1 Historique des moteurs à combustion

Les moteurs à combustion sont nés en même temps que la machine à vapeur (inventée au XVII<sup>e</sup> siècle par Denis Papin). Il apparaît de ce fait que les premiers moteurs à combustion étaient des moteurs à combustion externe (MCE) : voir paragraphe 16.4 pour partie et chapitre 17.

Un siècle et demi plus tard, sont apparus les moteurs à combustion interne (MCI), dont on connaît le développement.

#### a) Définition d'un moteur à combustion interne

Un moteur à combustion interne MCI est un dispositif qui convertit à l'intérieur d'une chambre de l'énergie chimique disponible sur un combustible en énergie mécanique, en passant par l'intermédiaire de l'énergie thermique.

L'énergie mécanique est le plus souvent disponible sur un arbre en rotation (énergie cinétique de rotation par l'intermédiaire d'un mécanisme cinématique (bielle-manivelle), mais l'énergie mécanique peut aussi être délivrée sous forme linéaire (machine à flux, tout particulièrement en aéronautique).

#### b) Petite histoire des moteurs à combustion interne

Un des premiers moteurs à combustion interne a été le moteur de Lenoir (1860) ; il a rapidement été suivi par le moteur de Beau De Rochas, ou de Otto dans les années 1870. On trouve là l'ancêtre du moteur à 4 temps et à allumage commandé, qui était jusque très récemment encore le moteur dominant sur le marché automobile en France. Il faut noter que ces premiers moteurs avaient des rendements faibles (10 %) pour des vitesses de rotation elles-mêmes faibles (100 tr/min en moyenne).

Dans les années 1880, sont apparus les moteurs à 2 temps ; ces moteurs sont encore très utilisés dans des niches (dont le domaine des 2 roues).

En 1892 est apparu le moteur de Diesel, qui est un moteur à auto-allumage (ou allumage par compression) ; ce moteur prend de plus en plus d'importance de nos jours : il devient dominant sur le marché mondial.

L'histoire des moteurs à combustion interne n'est sans doute pas achevée, car des innovations sont possibles ; ainsi, en 1957, est apparu un moteur rotatif Wenkel, qui a vu des réalisations significatives, sans toutefois réussir à s'imposer.

Dans la suite de ce paragraphe, l'exposé va être centré sur le moteur à 4 temps à allumage commandé et à auto-allumage.

### 16.3.2 Les cycles des moteurs à allumage commandé

#### a) Du principe aux diagrammes

##### ➤ Les 4 temps

Les moteurs à essence ou à gazole sont des moteurs à 4 temps qui se produisent sur 2 tours de vilebrequin ; pour les moteurs à 2 temps, un tour de vilebrequin suffit.



Les 4 temps des moteurs à essence ou à gazole sont représentés schématiquement sur la figure 16.9.

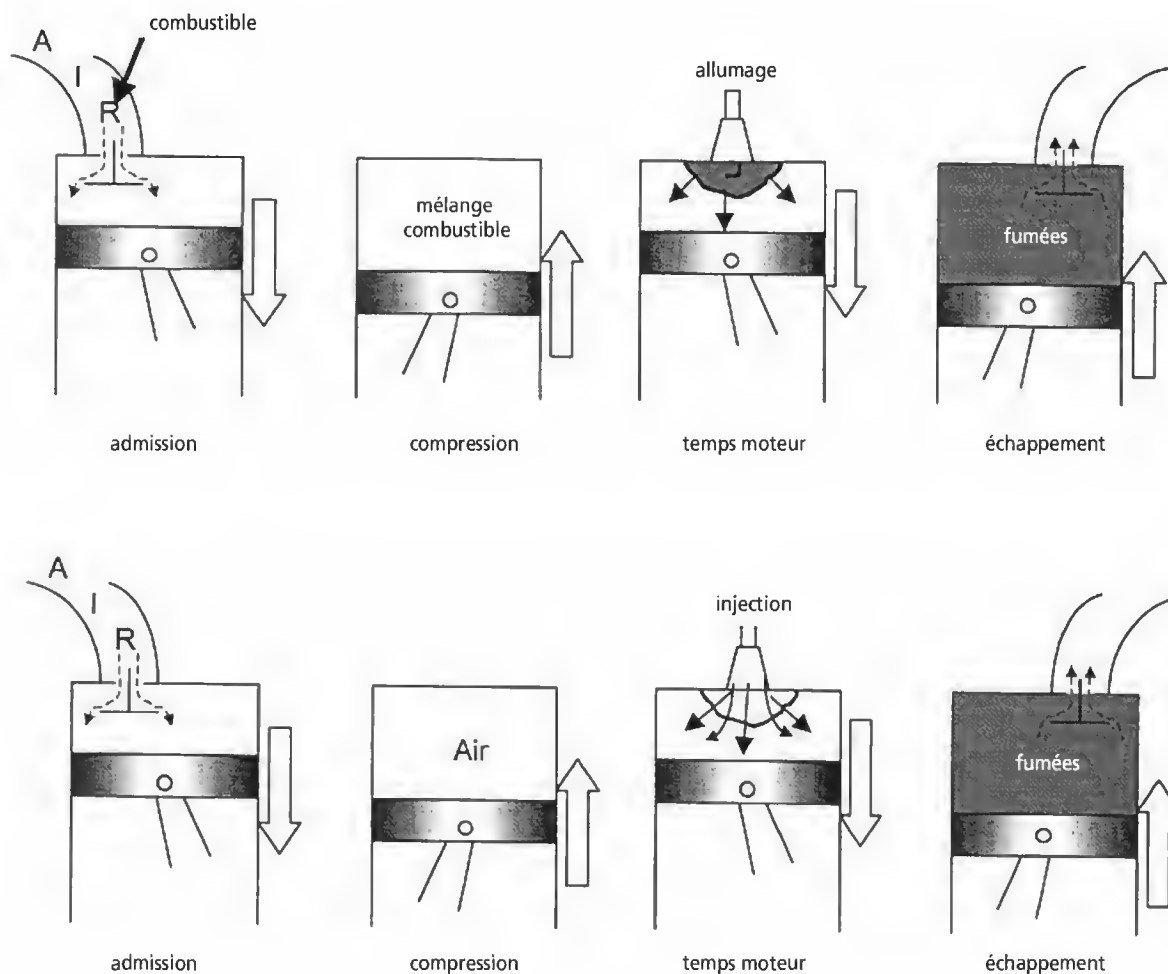


Figure 16.9 Schéma de fonctionnement d'un moteur à 4 temps.

Il apparaît ainsi :

- un temps de remplissage du cylindre (soupape d'admission ouverte) T1 ;
- un temps de compression (toutes soupapes fermées) T2 ;
- le temps moteur : le piston délivre sa puissance sur l'arbre lors de sa translation du PMH, point mort haut, vers le PMB, point mort bas, T3 ;
- un temps d'évacuation des gaz brûlés (soupape d'échappement ouverte), T4.

**Remarque :** le nombre et la taille des soupapes varient selon les moteurs et ce en vue d'assurer un remplissage optimal du cylindre ; pour les moteurs à même nombre de soupapes à l'admission et au refoulement (typiquement 4 soupapes par cylindre), le siège de soupape est plus grand à l'admission qu'à l'échappement ( $P_{\text{admission}} < P_{\text{refoulement}}$ ). Pour les moteurs 4 cylindres à 12 soupapes, on a 2 soupapes d'admission pour une d'échappement.

La différence entre le moteur à allumage commandé et le moteur à auto-allumage apparaît à l'occasion du temps moteur  $T_3$ . Pour le moteur à allumage commandé, c'est l'étincelle à la bougie d'allumage qui marque l'ignition du mélange combustible, dans le cylindre (AA, instant d'auto-allumage).

Dans le moteur diesel, le début de la combustion est lié à l'injection de combustible dans le comburant comprimé et chaud.

#### ► Optimisation de la distribution

Le fonctionnement de ces moteurs peut être représenté idéalement sous forme d'un diagramme en escargot. La figure 16.10 représente ce diagramme pour un moteur à allumage commandé ; le lecteur transposera aisément ce diagramme pour un moteur diesel.

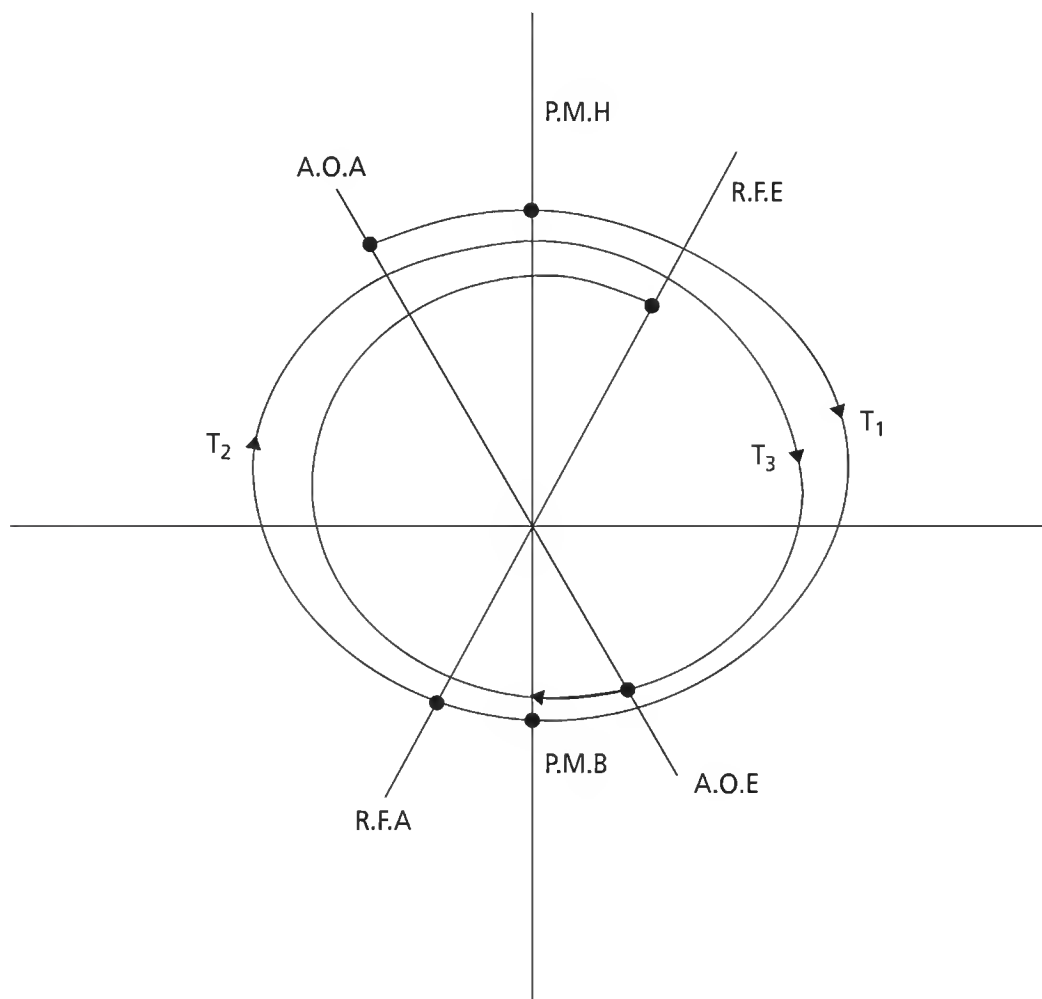


Figure 16.10 Diagramme en escargot d'un moteur à allumage commandé.

Sur ce diagramme, apparaissent des écarts à l'idéalité qui conduisent aux réglages optimaux pour un moteur.

AOA : il s'agit de l'avance à l'ouverture de la soupape d'admission (AOA). Cette avance anticipe sur le mécanisme d'ouverture non instantanée de la soupape (délai



d'ouverture entre la position fermée, puis la pleine ouverture). Actuellement, l'ouverture est assurée mécaniquement par l'intermédiaire d'un arbre à cames ; à l'avenir, les soupapes devraient pouvoir être commandées électromagnétiquement, ce qui permettra des ajustements plus fins des lois de commande en fonction de la charge et du régime de rotation du moteur.

**RFA** : le retard à la fermeture à l'admission RFA du mélange est lié symétriquement à la fermeture non instantanée de la soupape, mais aussi à l'inertie mécanique (vitesse) des gaz admis.

**AOE** : l'avance à l'ouverture de la soupape d'échappement procède du même principe que ci-dessus.

**RFE** : le retard à la fermeture de la soupape d'échappement. On notera à cette occasion une zone de croisement des soupapes pendant laquelle la soupape d'échappement n'est pas encore fermée, alors que la soupape d'admission s'ouvre ; il s'agit là d'un compromis entre les effets cinétiques et un bypassage éventuel de gaz frais.

**AA** : l'avance à l'allumage est une fonction de la vitesse de rotation du moteur (croissante avec  $N$ ), qui traduit le délai d'inflammation et diverses constantes de temps du circuit d'allumage pour obtenir la pleine combustion à l'instant désiré.

**Remarque** : l'avance à allumage, de même que la loi d'injection pour le moteur diesel, sont fortement liées à la cinétique de combustion.

### b) Du principe au cycle théorique équivalent

Les moteurs à combustion interne ne fonctionnent pas en cycle fermé comme on vient de le voir au paragraphe précédent. De ce fait, on travaille sur un cycle à gaz fermé équivalent.

#### ► L'approximation du gaz parfait

La majorité des traités de thermostatique proposent de considérer des cycles à air standards ; le gaz étant parfait ( $PV = nrT$ ),  $C_p$ ,  $C_v$ ,  $\gamma$  sont constants. Les frottements sont négligés, de même que les dissociations, ionisations.

On rappelle que pour les cycles standards à air (comburant) à ( $15^\circ\text{C}$  ;  $101\,325\text{ Pa}$ )  $C_p = 1\text{ kJ/kg.K}$  et  $\gamma = 1,40$ . Cette approximation permettra une comparaison des cycles dans des conditions de réversibilité et d'équilibre.

#### ► Les cycles théoriques équivalents

Ces cycles peuvent être représentés selon deux approches.

En diagramme de Clapeyron ( $PV$ ) : l'aire est directement proportionnelle au travail mécanique.

En diagramme entropique ( $T, s$ ) : on accède directement aux quantités de chaleur échangées.

La figure 16.11 représente les cycles de Carnot, Lenoir, Beau De Rochas, Diesel, Mixte, Atkinson en diagramme de Clapeyron, pour la même pression de base  $P_{\min} = P_{\text{atmosphérique}}$  et la même pression maximale  $P_{\text{MAX}}$ .

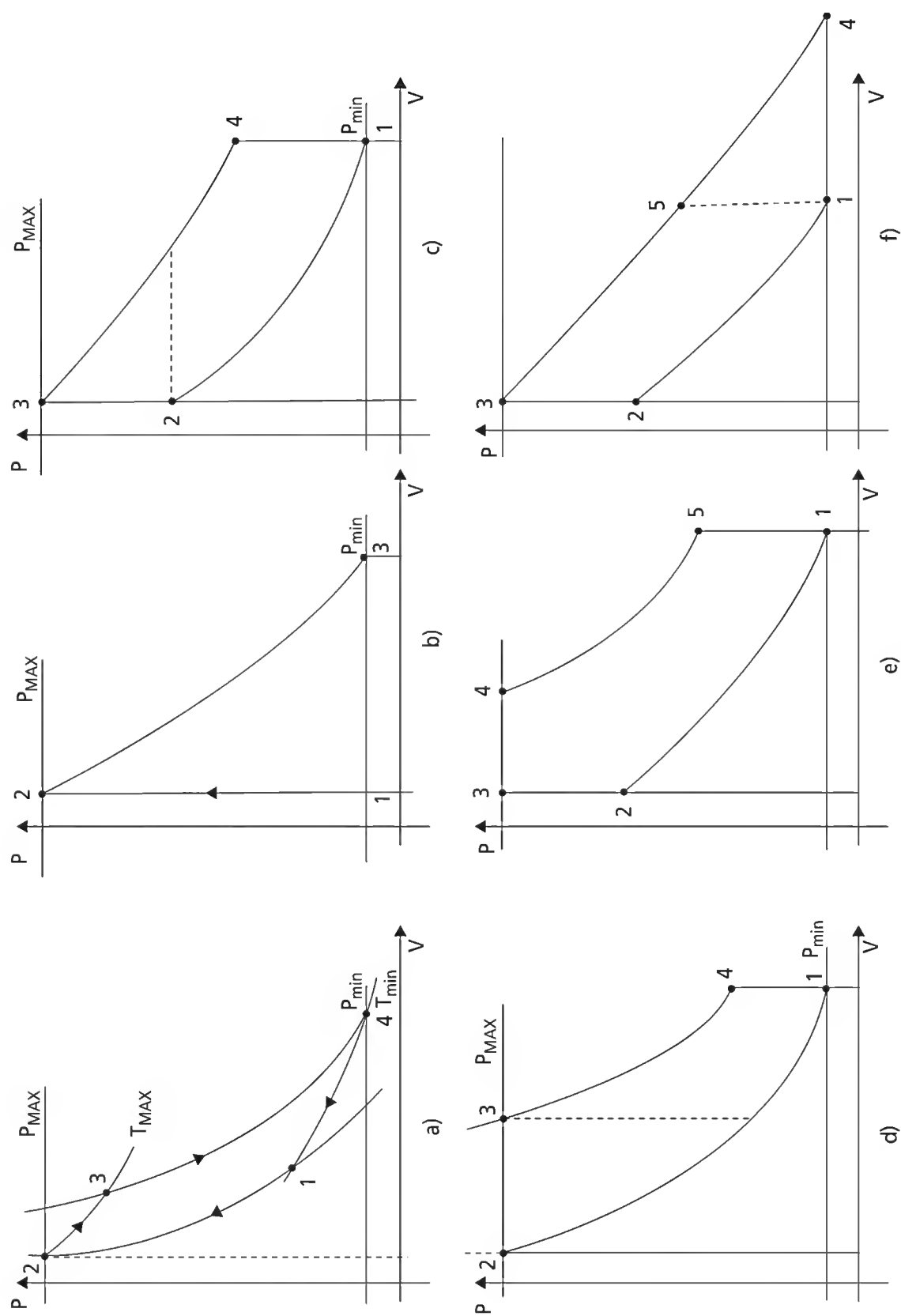


Figure 16.11 Cycles théoriques a) de Carnot, b) de Lenoir, c) de Beau De Rochas, d) de Diesel, e) mixte, f) d'Atkinson dans le diagramme de Clapeyron.

*Le cycle de Carnot*

Dans le cadre de l'approximation des gaz parfaits, la relation de Laplace permet d'obtenir diverses expressions du rendement de cycle dont :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \left( \frac{P_4}{P_3} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{\gamma-1} = 1 - \left( \frac{v_3}{v_4} \right)^{\gamma-1}$$

Ce rendement peut aussi s'exprimer uniquement en fonction des températures du cycle :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1 (T_4 / T_1 - 1)}{T_2 (T_3 / T_2 - 1)} \quad (16.5)$$

**Remarque :** cette dernière expression est utile pour comparaison des divers cycles.

*Le cycle de Beau De Rochas (OTTO)*

La considération de la figure 16.11.c permet de voir que pour ce cycle l'apport de chaleur se fait entre 2 et 3 (combustion isochore), de même que le rejet de chaleur vers l'ambiance entre 4 et 1.

Il en résulte que, pour le rendement de cycle dans les conditions idéales, on trouve la même expression formelle en température que pour le cycle de Carnot : relation (16.5).

En remarquant que la compression isentropique se fait entre les mêmes volumes que la détente isentropique, on a :

$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2} \left( \text{ou } \frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \right)$$

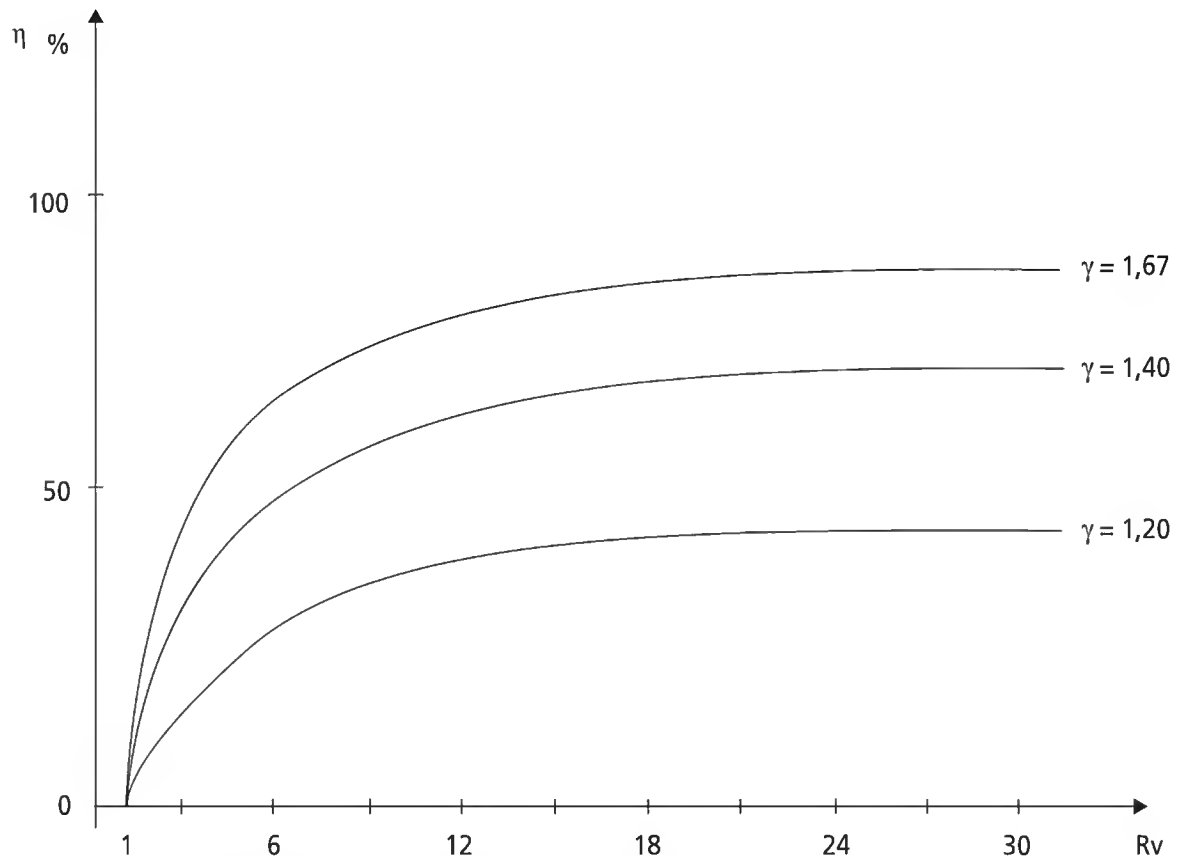
$$\eta_{\text{OTTO}} \text{ se réduit à : } \eta_{\text{OTTO}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left( 1 / R_v \right)^{\gamma-1} \quad (16.6)$$

avec  $R_v = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{\text{MAX}}}{V_{\text{min}}}$ , rapport volumétrique fini du moteur.

**Remarque :** l'admission et l'échappement qui se font en pratique à masse constante ont été représentés ici isochores, malgré la réaction de combustion.

La figure 16.12 représente l'évolution de ce rendement de cycle en fonction du rapport volumétrique pour diverses valeurs de  $\gamma$  ; le résultat s'applique aussi au cycle de Carnot et de Joule.

Les courbes montrent une variation prononcée pour  $R_v$  inférieur à 8 ; au-delà de  $R_v = 12$ , les gains restent très modiques.



**Figure 16.12** Rendement de cycle de Beau De Rochas idéal en fonction du rapport volumétrique.

L'expression (16.6) montre que le rendement du cycle de Otto, à même pression maximum que le cycle de Carnot, reste inférieur au rendement de ce dernier ( $T_{2OTTO} < T_{2Carnot}$ ).

### Le cycle de Diesel

Pour ce cycle, l'apport de chaleur se fait de façon isobare. On peut comparer directement sur la figure c ou la figure d les cycles de Beau De Rochas et de Diesel ; à même volumétrie ( $V_{min}; V_{MAX}$  : figure c), à même pression maximale (figure d).

L'expression du rendement du cycle Diesel en résulte :

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1} \quad (16.7)$$

La combustion isobare entre 2 et 3 conduit à :  $\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2}$ , avec  $V_4 = V_1$ . La combinaison de ces remarques avec les expressions des lois de Laplace en  $(T, V)$  pour les compression et détente isentropiques conduit à :

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \left( \frac{V_3/V_4}{V_2/V_1} \right)^{\gamma-1} = \left( \frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma}$$

(16.7) peut s'écrire :

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{1}{\gamma(R_v)^{\gamma-1}} \cdot \frac{\left( \frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma} - 1}{\frac{V_3}{V_2} - 1} \quad (16.8)$$

**Remarque :** le rapport  $\left( \frac{V_3}{V_2} \right)$  caractérise le temps d'injection du combustible.

Il est difficile de conclure la comparaison des cycles de Otto et de Beau De Rochas sur les relations (16.7 ; 16.8) et (16.5 ; 16.6).

L'examen du diagramme  $(T, S)$  de ces cycles (figure 16.13) va permettre d'éclaircir cette comparaison.

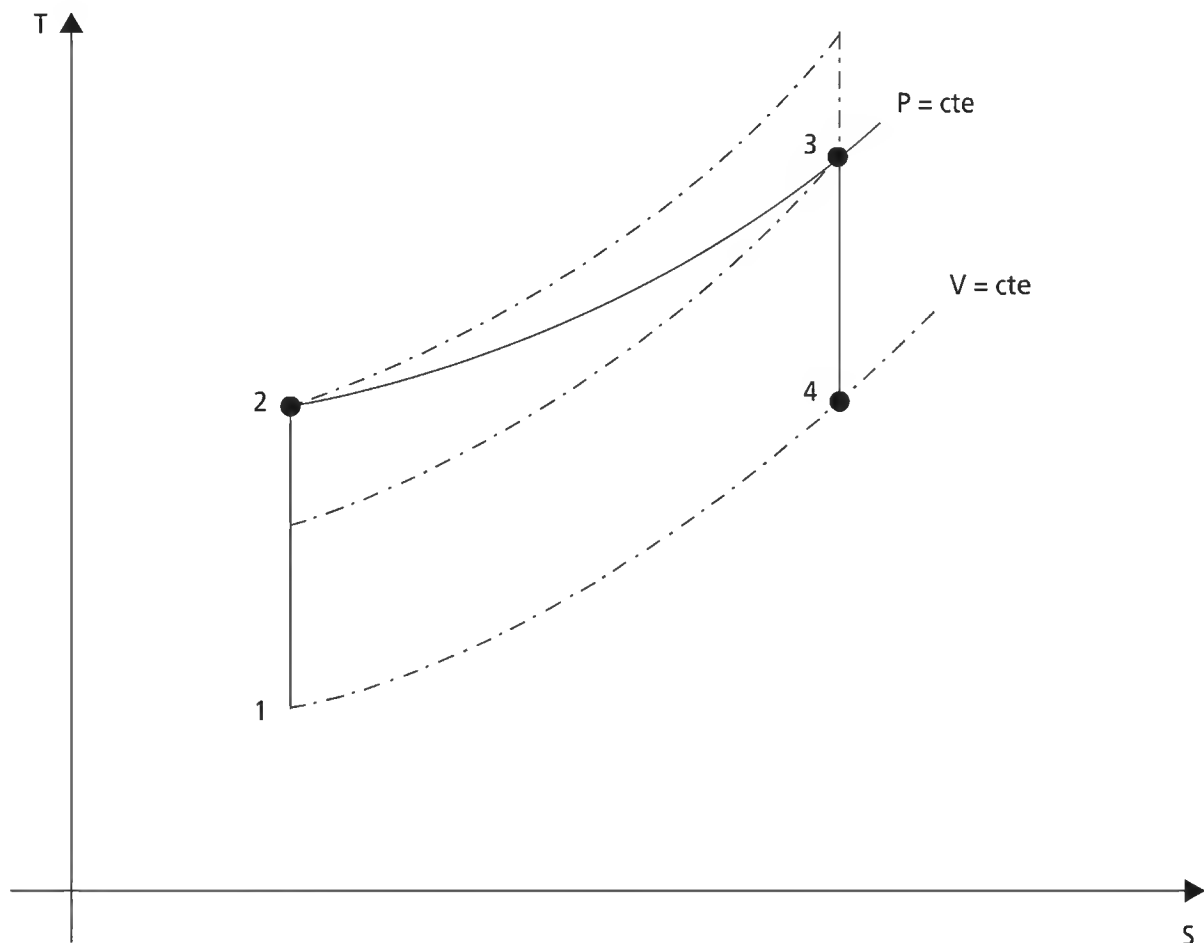


Figure 16.13 Comparaison en diagramme  $(T, S)$  des cycles de Diesel et de Beau De Rochas.

À même rapport volumétrique, le travail de cycle (aire du cycle) est supérieur en Beau De Rochas, pour un même rejet thermique ( $\eta_{\text{Beau De Rochas}} > \eta_{\text{Diesel}}$ ) ; mais la température maximale de cycle est supérieure aussi en Beau De Rochas.

À même température maximale de cycle (contrainte de matériau) le cycle Diesel fournit un travail supérieur, pour toujours le même rejet thermique  $\eta_{\text{Diesel}} > (\eta_{\text{Beau De Rochas}})$ .

**Remarque :** il est essentiel de remarquer ici que les conclusions de la comparaison dépendent fondamentalement des conditions imposées.

Pour conclure, on notera que selon le critère de travail de cycle (diagramme  $P, V$ ) à même volumétrie, l'avantage est au cycle de Beau De Rochas (mais la pression maximale est très élevée) et à même pression maximale (contrainte mécanique), l'avantage est au cycle de Diesel.

### Le cycle mixte

Dans ce cas, la combustion est supposée se faire partiellement à volume constant, puis à pression constante (figure 16.11.e).

On appelle parfois ce cycle cycle dual ou encore limité en pression.

**Remarque :** l'appellation cycle dual prête à confusion avec le cycle dit dual-fuel ; elle sera évitée.

L'expression du rendement de cycle correspondante est aisée à déterminer :

$$\eta_{\text{mixte}} = 1 - \frac{1}{R_v^{\gamma-1}} \left\{ \frac{\frac{P_3}{P_2} \left( \frac{V_4}{V_3} \right)^\gamma - 1}{\left[ \frac{P_3}{P_2} - 1 \right] + \gamma \left( \frac{P_3}{P_2} \right) \left[ \frac{V_4}{V_3} - 1 \right]} \right\} \quad (16.9)$$

On voit apparaître sur cette expression un paramètre  $\left( \frac{P_3}{P_2} \right)$  qui rend compte du temps de combustion à volume constant.

On remarque par ailleurs que si ce paramètre  $\left( \frac{P_3}{P_2} \right)$  vaut 1, on retrouve le rendement du cycle de Diesel ; si  $\frac{V_4}{V_3}$  vaut 1, on retrouve de façon similaire le rendement de cycle de Beau De Rochas.

### Cycle de Atkinson

La principale limitation du cycle Beau de Rochas ou de Diesel apparaît dans la géométrie : rapport de détente identique au rapport de compression. La figure (16.12.f) repré-

sente un cycle d'Atkinson sur base de cycle de Beau De Rochas : on prolonge la détente isentropique au-delà du point 5, jusqu'à la pression basse atmosphérique.

En principe, cette récupération peut se faire en turbine (turbodétendeur) : l'énergie supplémentaire récupérée est proportionnelle à l'aire (541).

Pour les mêmes températures extrêmes que le cycle de Beau De Rochas, on trouve l'expression du rendement du cycle de Atkinson associé sous la forme :

$$\eta_{\text{Atkinson}} = 1 - \frac{\gamma}{R_v^{\gamma-1}} \left[ \frac{\left( \frac{P_3}{P_2} \right)^{1/\gamma} - 1}{\frac{P_3}{P_2} - 1} \right] \quad (16.10)$$

### c) Du principe à la pratique des moteurs

#### ➤ Du diagramme de Clapeyron au diagramme de Watt

Il s'agit cette fois d'expérimentation et de résultats obtenus sur moteur ; la pression régnant dans un cylindre peut être enregistrée à l'aide d'un capteur de pression ( $P = f(t)$ ). Plus généralement, on cherche à relier cette pression au volume de la chambre ; cela peut se faire connaissant la cinématique du moteur, en repérant la position angulaire du vilebrequin (capteur angulaire) : on en déduit le diagramme pratique  $P = f(V)$ .

**Remarque 1 :** il peut être visualisé directement sur oscilloscope par la méthode de Lissajous.

**Remarque 2 :** la connaissance de  $P = f(t)$  ou  $\frac{dP}{dt} = f(t)$  permet une caractérisation de la combustion d'un point de vue global.

Le cycle pratique obtenu se présente sous la forme de la figure 16.14 : elle représente le diagramme de Watt d'un cylindre.

Ce diagramme fait apparaître clairement une contre boucle, qu'il s'agit de minimiser et qui correspond aux pertes mécaniques à l'échappement, et à l'admission ; ces pertes sont liées au fait que vidage et remplissage du cylindre nécessitent des gradients de pression (pertes de charge) comme dans un compresseur.

De la même façon, le volume minimum  $V_{\min}$ , s'il est nécessaire, induit une perte de travail par compression et détente d'un gaz qui ne sera pas cyclé ; elle induit aussi des irréversibilités de mélangeage.

On remarquera en revanche que tout cycle pratique peut être représenté en première approximation par un cycle mixte, qui l'approche assez bien.

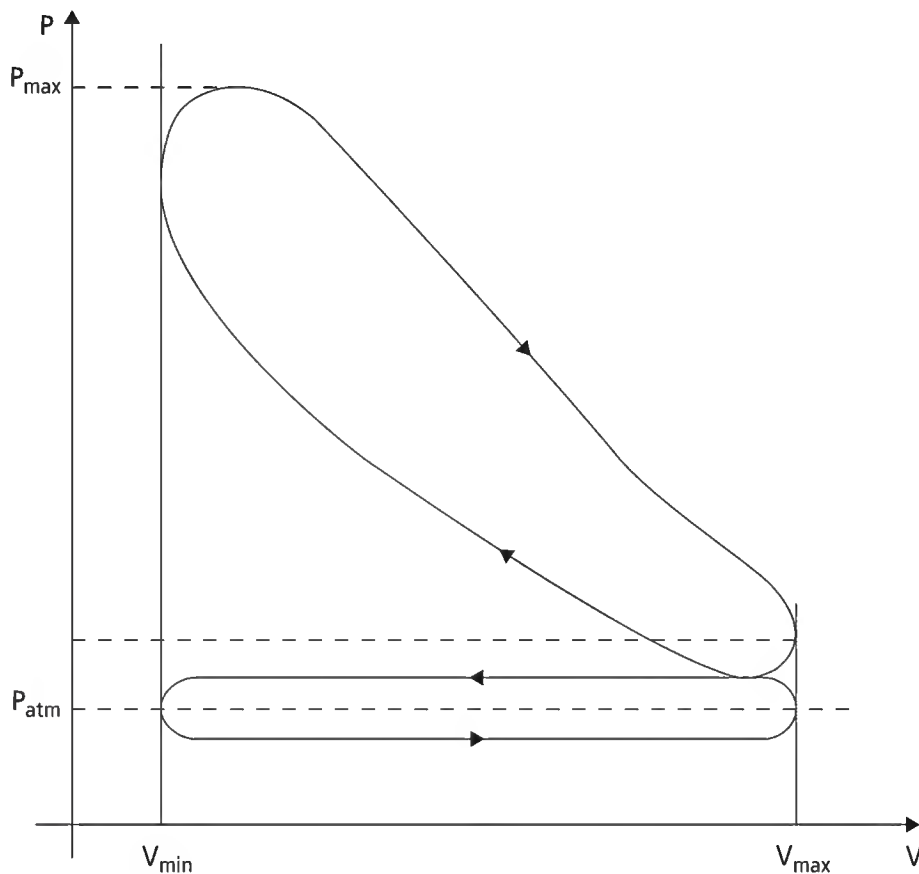


Figure 16.14 Diagramme de Watt

### ► Performances d'un moteur

#### *Courbes caractéristiques*

La caractérisation des performances réelles d'un moteur fait l'objet de normes (AFNOR, SAE, DIN) ; les courbes caractéristiques d'un moteur obtenues au banc d'essai font apparaître le couple moteur  $C$ , la puissance motrice  $\dot{w}$ , la consommation spécifique  $C_s$  (souvent exprimée en g/kwh) qui est inversement proportionnelle

au rendement du moteur au sens du premier principe :  $C_s = \frac{1}{\eta_i}$ .

La figure 16.15 représente les trois courbes précédentes en fonction de la variable naturelle vitesse de rotation, paramétrées pour une loi de levées de soupapes et un réglage moteur (papillon d'admission ( $\alpha$ ), richesse ou excès d'air).

Il apparaît sur ces courbes trois types d'optimum :

$$MAXC, MAX \dot{w}, \min C_s$$



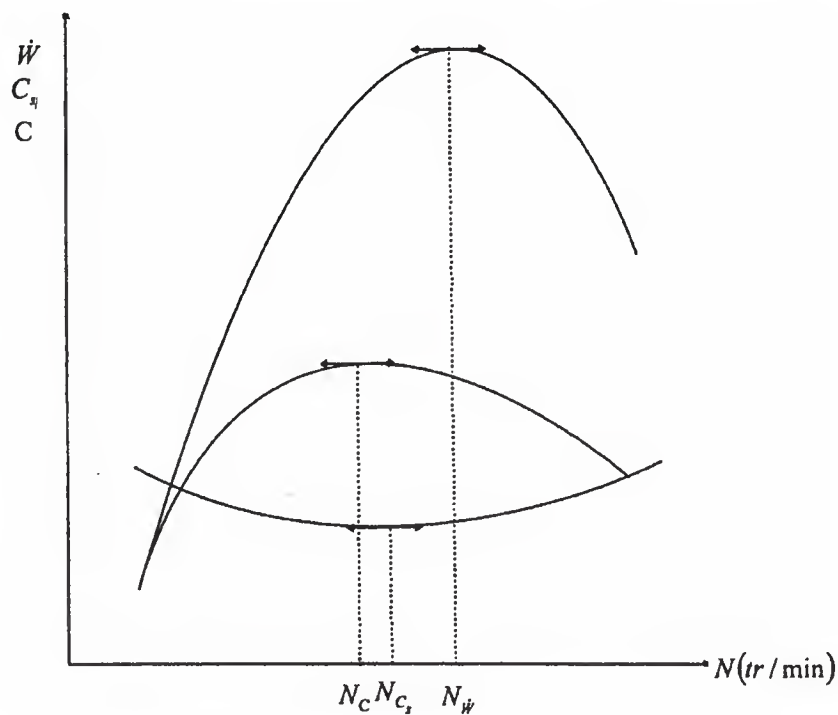


Figure 16.15 Courbes caractéristiques d'un moteur.

Ces optimums se produisent pour des vitesses de rotation différentes :

$$N(\text{MAX} C), N(\text{MAX } \overset{\circ}{w}), N(\text{min } C_s)$$

La plage d'utilisation optimale du moteur est donnée par  $\left[ N(\text{MAX} C), N(\text{MAX } \overset{\circ}{w}) \right]$ .

Une autre présentation importante des performances, mais moins immédiate est celle qui fait intervenir le coefficient d'excès d'air (ou la richesse) (figure 16.16) : il apparaît sur cette figure les caractéristiques des effluents du moteur (critère de qualité environnementale) qui deviennent très importantes aujourd'hui, vu les normes européennes en ce domaine, et leur évolution rapide ; on voit tout particulièrement apparaître un maximum de production de  $\text{CO}_2$  et de  $\text{NO}_x$  au voisinage d'une richesse de 1 ou d'un mélange légèrement pauvre : un compromis est donc à rechercher entre performance énergétique et environnementale. Celui-ci n'est pas encore clairement établi, d'autant que le fonctionnement au démarrage à froid diffère fondamentalement du régime dynamique stationnaire.

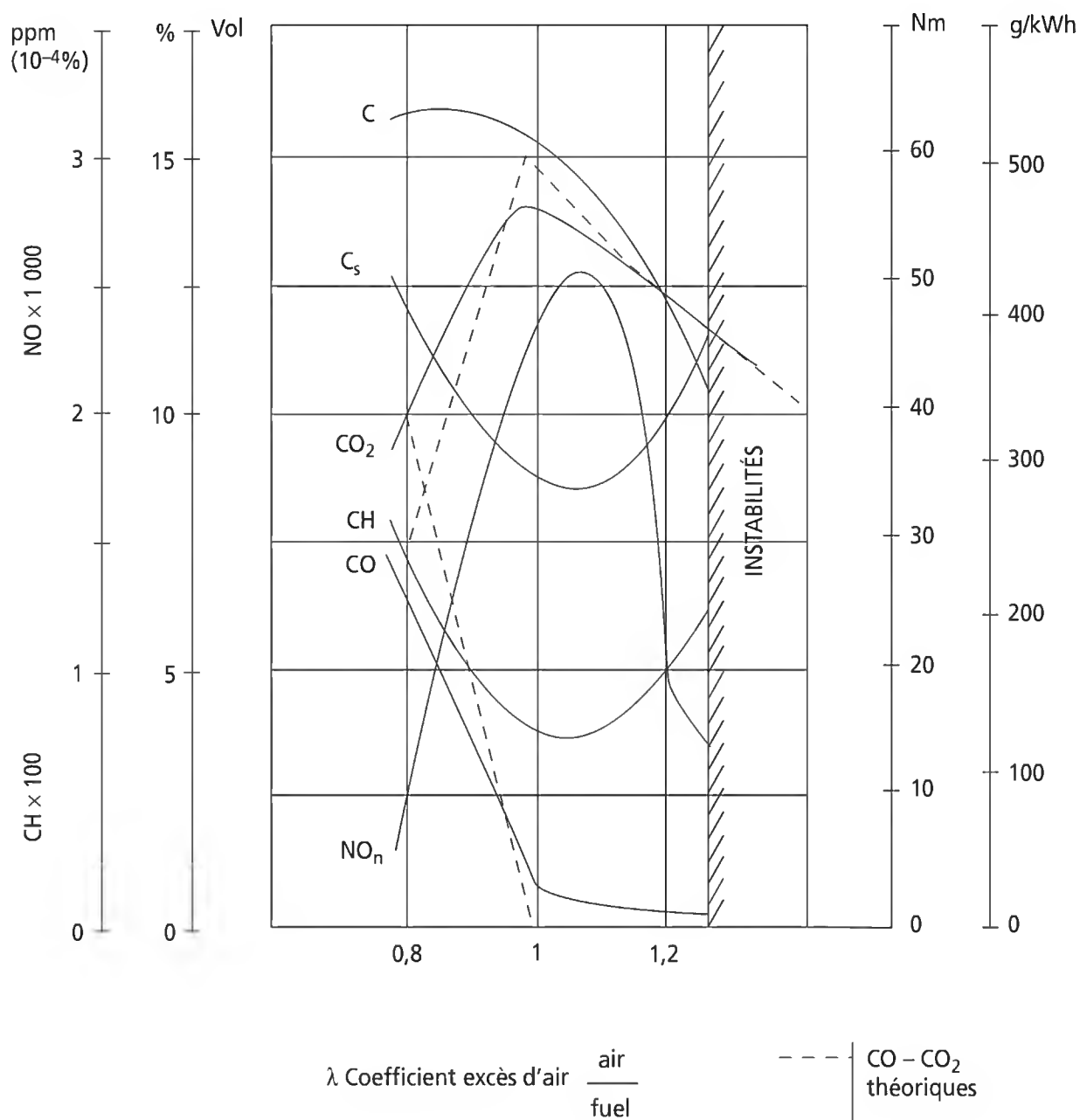


Figure 16.16 Composition moyenne des gaz d'échappement dans les moteurs à essence

### Analyse succincte de la chaîne de conversion des énergies dans un MCI

Idéalement, on part de l'énergie chimique disponible sur la combustion  $\dot{w}_{\text{chimique}}^o$  ; celle-ci est convertie en chaleur  $\dot{q}_c$ .

Si la combustion n'est ni stoechiométrique, ni parfaite, ni adiabatique, il en résulte un rendement de réaction chimique  $\eta_R$  (imbrûlés si  $R > 1$ , mais aussi polluants : CO,

$NO_x$ , suies), complété d'un rendement d'adiabacité (refroidissement des parois et de l'huile de lubrification  $\eta_{ad}$  ; cette première conversion peut être globalisée sous la forme du rendement de la combustion (conversion thermochimique)  $\eta_{comb}$  telle que :

$$\eta_{comb} = \eta_R \cdot \eta_{ad} = \frac{\overset{o}{q}_{\text{fumées}}}{\overset{o}{W}_{\text{chimique}}}$$

L'énergie disponible sur les fumées va alors être mécanisable, conformément au cycle théorique : le rendement  $\eta_{cycle}$  rend compte de la conversion thermomécanique idéale (paragraphe b).

Le cycle réel diffère du cycle théorique, par le diagramme de Watt, de sorte que la puissance indiquée  $\overset{o}{W}_i$  est inférieure à  $\overset{o}{W}_{cycle}$  : il y correspond le rendement indiqué  $\eta_i$  :

$$\eta_i = \frac{\overset{o}{W}_i}{\overset{o}{W}_{cycle}} \quad (16.11)$$

Il est courant pour les motoristes de relier cette puissance obtenue au banc à la pression moyenne indiquée  $\bar{P}_i$  telle que :

$$\bar{P}_i = \frac{2 \cdot \overset{o}{W}_i}{A \cdot L \cdot N}$$

A, section de cylindre :  $A = \frac{\pi D^2}{4}$  ; D alésage

L, course du piston (AL, cylindrée du cylindre).

Puissance au frein ou à l'arbre : le couple moteur  $C_m$  est équilibré par le couple résistant  $C_R$ , au point d'équilibre dynamique commandé par les réglages moteur et la charge ; la puissance mécanique disponible sur l'arbre  $\overset{o}{W}_m$  en résulte :

$$\overset{o}{W}_m = \vec{C} \cdot \vec{\omega} \quad (16.12)$$

La relation entre (16.11) et (16.12) rend compte des pertes par frottements mécaniques (essentiellement solides) tels que :

$$\overset{o}{W}_m = \overset{o}{W}_i - \overset{o}{W}_f$$

On rend compte le plus souvent des pertes mécaniques par la pression de frottement  $P_f$ , définie de façon analogue à la pression indiquée ; il existe de nombreuses corrélations spécifiques proposées dans la littérature. On se contentera de dire que  $\overset{o}{W}_f$  se présente toujours sous une forme quadratique par rapport à la vitesse de rotation, mais qui doit être adaptée à chaque moteur, vu la complexité des phénomènes mis en jeu.

Il en résulte le rendement mécanique du moteur  $\eta_m$  :

$$\eta_m = \frac{\overset{o}{W}_m}{\overset{o}{W}_i} \quad (16.13)$$

**Remarque :** on peut alors introduire une pression moyenne mécanique :

$$\bar{P}_m = \bar{P}_i - P_f.$$

Puissance effective du moteur : un moteur ne peut pas fonctionner sans un minimum d'accessoires ; ceux-ci prélèvent de la puissance (mécanique, électrique).

En fin de course, il ne reste disponible que la puissance effective  $\overset{o}{W}_e$  telle que :

$$\overset{o}{W}_e = \eta_{ac} \cdot \overset{o}{W}_m \quad (16.14)$$

$\eta_{ac}$ , rendement lié aux accessoires.

**Remarque :** la chaîne de conversion précédente ne caractérise que le moteur et non un véhicule ; pour un véhicule, il faudrait pour le moins rajouter le rendement de transmission, puis le rendement à la roue, et tenir compte des éventuels accessoires véhicules.

### ► Comparaison de moteurs

Le paragraphe précédent permet la caractérisation d'un moteur, mais la diversité des moteurs (alésage du cm au mètre) et des configurations, ainsi que des critères possibles de comparaison (puissances, couple,  $\bar{P}$ ,  $C_s$ , ...) fait que souvent on ramène chez les motoristes les caractéristiques extensives à la volumétrie (cylindrée du moteur : encombrement) : couple au litre de cylindrée, puissance au litre de cylindrée.

Le tableau 16.9 fait apparaître une comparaison d'un ensemble de moteurs de 2 litres de cylindrée à 4 soupapes par cylindre.

On voit sur ce tableau une analyse multicritère. Une façon de traiter le problème est d'introduire un facteur qui tient compte de tous les critères souhaités. Par exemple, le facteur  $K$  correspond à un moteur fournissant :

- un couple maximum au litre élevé ;
- une puissance maximale au litre élevée ;
- une plage  $\left( N \left( \overset{o}{MAX W} \right) - N (MAXC) \right)$  large :

$$K = \frac{MAXC}{AL} \cdot \frac{1}{N(MAXC)} \cdot \frac{MAX \left( \overset{o}{W} \right)}{AL} \left[ NMAX \left( \overset{o}{W} \right) - N(MAXC) \right]$$

### 16.3.3 Combustion en MCI : particuliers

#### a) Retour sur la combustion dans les MCI

##### ► Moteur à allumage commandé

L'hypothèse de combustion isochore instantanée du cycle de Beau De Rochas ne rend pas compte du temps fini nécessaire pour sa réalisation en moteur. Le passage d'un diagramme  $(P, V)$ , à un diagramme  $P, t$  (ou pression, angle de vilebrequin  $\theta$ ) permet de visualiser le délai d'inflammation, ainsi que la propagation de la combustion durant le  $\Delta\theta$  du vilebrequin autour du PMH (piston quasi stationnaire).

**Exemple :** le maximum de rendement d'un moteur se produit si le maximum de pression intervient 10 à 12 degrés après le PMH. En admettant que la durée de combustion s'étale sur les 12 degrés après le PMH, il vient pour le temps de propagation :

$$\Delta t = \frac{12}{360} \cdot \frac{60}{N}$$

Soit  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3} s$  à 1 000 tr/min ( $4 \cdot 10^{-4} s$  à 5 000 tr/min). Le délai d'inflammation (avant PMH) qui correspond au chauffage local par étincelle, pour initier la libération d'énergie, sera du même ordre de grandeur. Cela apparaît sur la figure 16.17 sous la forme du domaine I (temps de formation du noyau de propagation du front de flamme : processus chimique fonction de  $P, T, R$ , de la cinétique et des gaz résiduels), le domaine II correspond au temps de propagation du front de flamme.

#### Anomalies de combustion en allumage commandé

Les principales anomalies sont le cliquetis pour les moteurs à allumage commandé. Ce mécanisme apparaît surtout en fin de détonation sous forme de variations brutales de pression néfastes ; des ondes de pression parasites peuvent se former aux points chauds, aux faibles températures d'autoallumage (adjonction d'anti-détonant : indice d'octane d'une essence), aux fortes charges, aux fortes températures d'entrée de surface de cylindre, aux fortes compressions, en présence de particules (l'influence de la richesse et de diluant dont l'humidité est notable).

Au phénomène de cliquetis peut s'ajouter le réallumage et le cognement (dû aux dépôts : trempage en paroi).

TABLEAU 16.9 COMPARAISON DE MOTEURS DE 2 LITRES DE CYLINDRÉES À 4 SOUPAPES PAR CYLINDRE.

Type moteur	Cylindrée	Alésage A (mm)	Course C (mm)	Rapport A/C	Rapport Volumét. Compres.	Couple Maxi (mkg)	Régime De Cmax (tr/min)	Couple Au litre (mkg/l)	Puiss. Maxi (ch)	Régime De Pmax (tr/min)	Puiss. Au litre (ch/l)	PME	K	K'	K''
1 L4	1,991	80	66	1,21	10,5	19,4	4 700	9,74	150	5 900	75,34	12,01	187	734	15
2 L4	1,998	86	86	1,00	10,4	17,3	3 000	8,66	148	6 400	74,07	10,67	727	641	21,4
3 L4	1,995	84	90	0,93	10,5	17,6	5 000	8,82	145	6 250	72,68	10,88	160	641	12,8
4 L4	1,998	86	86	1,00	10,3	19,4	4 500	9,71	150	6 000	75,08	11,97	243	729	16,2
5 L4	1,997	85	88	0,97	9,6	18,6	5 000	9,31	133	5 400	66,60	11,48	50	620	12,4
6 L4	1,997	85	88	0,97	9	16,6	4 000	8,31	131	6 000	65,60	10,25	273	545	13,6
7 L4	1,995	84	90	0,93	9,9	18,5	4 000	9,27	147	6 000	73,68	11,43	342	683	17,1
8 L4	1,991	83	92	0,90	9	17,3	4 500	8,69	115	5 500	57,76	10,71	112	502	11,2
9 V6	1,995	78	69,6	1,12	9,5	17,5	5 000	8,77	144	6 000	72,18	10,81	127	633	12,7
10 L4	1,997	85	88	0,97	9	16,3	4 500	8,16	108	5 500	54,08	10,06	98	441	9,8
11 L4	1,994	84,5	89	0,95	10	18,1	4 500	9,08	140	6 000	70,21	11,19	212	637	14,2
12 L4	1,998	86	86	1,00	10	18,5	4 800	9,26	150	6 400	75,08	11,41	232	695	14,5
13 L4	1,998	86	86	1,00	10,5	20	4 800	10,01	150	6 000	75,08	12,34	188	752	15,7
14 L4	1,998	86	86	1,00	10,4	19	3 500	9,51	155	6 500	77,58	11,72	632	738	21,1
15 L4	1,994	84,5	89	0,95	10	18,9	2 500	9,48	136	6 000	68,20	11,68	905	646	25,9
16 L4	1,985	90	78	1,15	10,1	17,6	3 000	8,87	128	6 000	64,48	10,93	572	572	19,1
17 L4	1,998	86	86	1,00	9,8	18,7	4 600	9,36	133	5 800	66,57	11,54	163	623	13,5
18 L4	1,998	86	86	1,00	10	19	4 800	9,51	158	6 400	79,08	11,72	251	752	15,7
19 L4	1,984	81	77	1,05	10,3	17,9	3 800	9,02	143	6 500	72,08	11,12	462	650	17,1

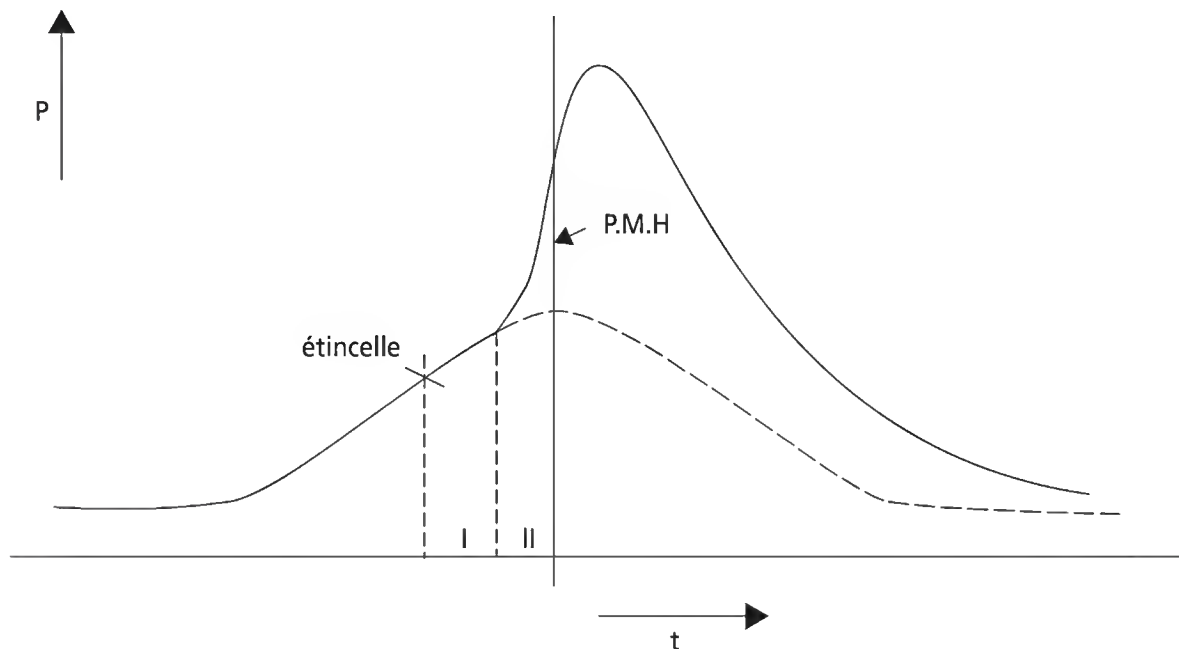


Figure 16.17 Diagramme pression-temps d'un moteur à allumage commandé.

### ► Moteur à auto-allumage

Pour le moteur à auto-allumage, le diagramme  $T = f(t)$  met en évidence une température d'inflammation fonction du combustible, mais aussi de la pression (figure 16.18).

Il apparaît alors à nouveau un délai d'inflammation, zone I (figure 16.18) qui suit le début d'injection, puis une phase II de combustion du prémélange (combustion rapide non contrôlée), une phase III associée à la combustion de diffusion, puis une phase IV associée à la queue de combustion.

### Loi de Wiebe

Cette dernière approche permet une description globale de la cinétique de combustion ; elle est souvent adoptée dans les modélisations thermodynamiques synthétiques.

La puissance instantanée du carburant dépend de la masse de carburant injectée  $m_{\text{comb}}$  au cours du cycle, du pouvoir calorifique de ce carburant PCI et de la fraction instantanée de la masse brûlée  $x_b$  :

$$\dot{q} = m_{\text{comb}} \cdot \text{PCI} \frac{dx_b}{dt}$$

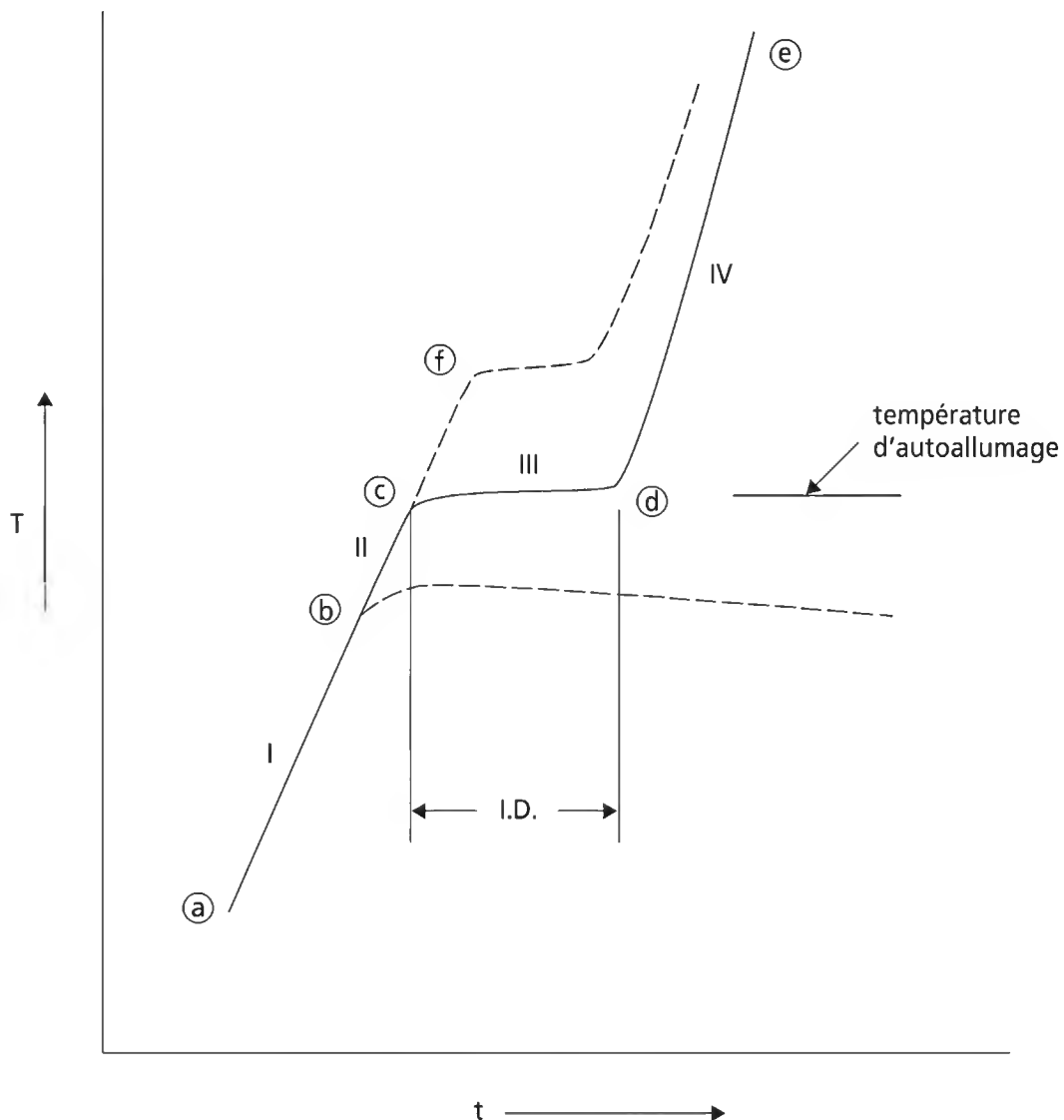


Figure 16.18 Évolutions de la combustion à auto-allumage.

$x_b$  varie entre 0 et 1 et correspond à la notion cinétique de facteur d'avancement de la réaction ( $\frac{dx_b}{dt}$  vitesse de réaction). Wiebe a proposé sur cette base une loi semi-empirique de type exponentielle ; cette corrélation s'écrit en fonction de l'angle de vilebrequin :

$$x_b = 1 - \exp \left[ -6,91 \left( \frac{\theta}{\Delta\theta_d} \right)^{m+1} \right]$$

en considérant le début de la combustion à angle de référence de vilebrequin nul ;  $\Delta\theta_d$ , durée de la combustion en angle de vilebrequin.  $m$  est un facteur de forme identifié expérimentalement.



D'où :

$$\frac{dx_b}{d\theta} = \frac{6,91(m+1)}{\Delta\theta d} \left( \frac{\theta}{\Delta\theta d} \right)^m \exp \left[ -6,91 \left( \frac{\theta}{\Delta\theta d} \right)^{m+1} \right] \quad (16.15)$$

**Remarque 1 :** la relation au temps est immédiate par  $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{\pi N}{30}$ .

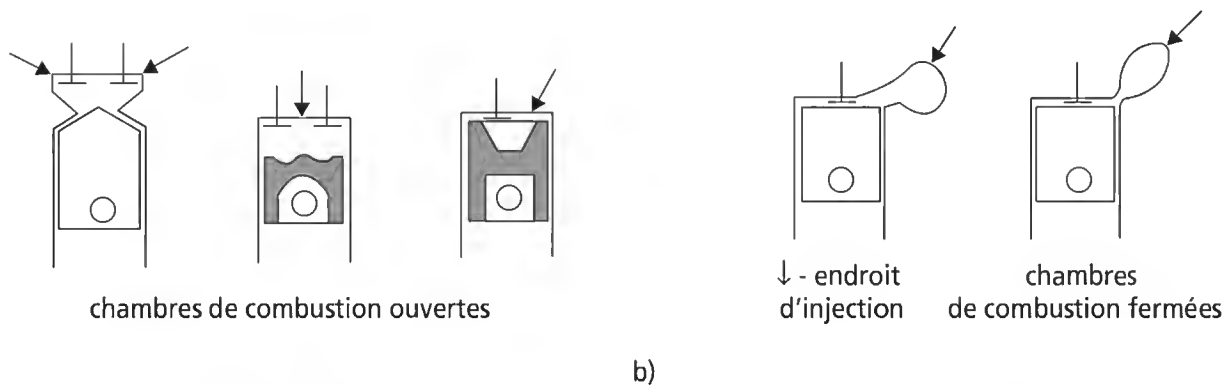
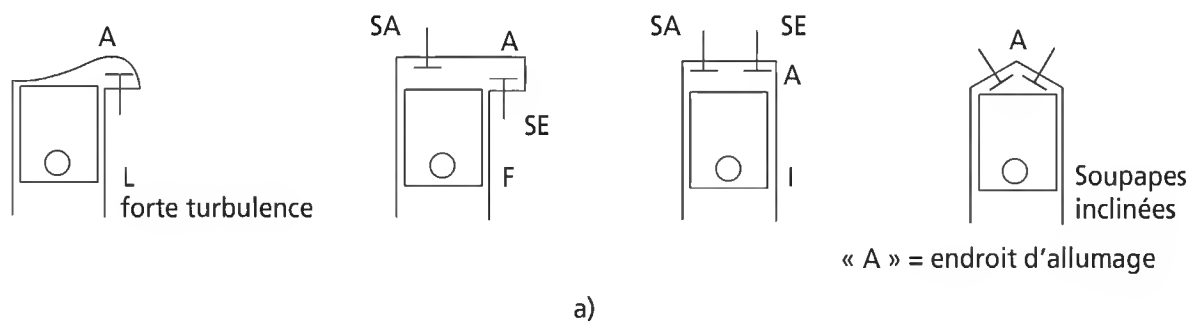
**Remarque 2 :** pour les combustions en moteur diesel, un ajustement par une double loi de Wiebe peut se faire.

### b) Chambre de combustion

Le paragraphe précédent a mis en évidence l'importance de la chambre de combustion (sa forme) sur l'optimisation de la combustion.

#### ► Forme de chambre pour des moteurs à allumage commandé

La figure 16.19.a montre quelques formes de tête de cylindre.



**Figures 16.19** a) tête de cylindre (moteur à allumage commandé)  
b) chambres de combustion (moteur à autoallumage)

La forme en L permet une forte turbulence, de même que le schéma F dû à Ricardo. La configuration I présente un espace de combustion trop plat à fort taux de compression. D'où le développement de dôme hémisphérique ou (et) à soupapes inclinées. En effet, une chambre de combustion de type sphérique offre un minimum de volume mort (minimum de temps de propagation, mais une montée rapide en pression.

**Remarque :** les schémas montrent une configuration à deux soupapes (SA, SE) ; ne pas oublier les configurations multi-soupapes, voire sans soupape.

#### ► Forme de chambre pour des moteurs à auto-allumage

Dans les moteurs à auto-allumage, il y a injection directe. Cette injection fait intervenir deux variables de commande : l'instant d'injection, la durée d'injection.

La figure 16.9.b montre quelques formes de chambre de combustion pour des moteurs à auto-allumage.

Les chambres de combustion ouvertes sont plutôt réservées aux moteurs lents et 2 temps.

Dans le cas des chambres fermées, l'intérêt de la turbulence est contrebalancée par l'inconvénient de forte température d'allumage, de fort délai, de faible température de paroi.

**Remarque :** la forme de chambre influe aussi sur le rendement volumétrique (pertes par pompage).

### c) Carburant et injection

#### ► Carburant

Une bonne carburant d'un moteur nécessite un certain dosage comburant-combustible, puis atomisation-dispersion, et enfin distribution-mélangeage. Pour un moteur, cela passe par le papillon d'admission.

#### *Dosage*

En marche normale à  $MAX \dot{W}$ , l'air (comburant) est le facteur limitant ; le rapport combustible-comburant stoechiométrique en masse correspond à 0,067 kg de combustible par kg d'air environ.

#### *Adaptation aux charges variables*

Dans les carburateurs, le réglage du papillon d'admission (commandant le débit d'air) impose le débit de combustible par effet Venturi (débit =  $f(\Delta P, \text{aire de l'orifice})$ ).

Le démarrage à froid nécessite un enrichissement particulier (injection de ralenti) ; le ralenti doit compenser les pertes par frottements. À froid, le risque de lavage des parois de cylindre est fort et néfaste pour la lubrification.

**Remarque :** en aviation et courses de Formule 1, des corrections de masse volumique avec l'altitude sont à apporter.

#### ► Injection

L'injection de carburant est de fait dans les moteurs à auto-allumage, de même en aéronautique. Le moteur dual fuel connaît aussi une injection pilote en mélange pauvre ; cette technique est bien adaptée aux installations statiques où le rendement prime sur la puissance volumétrique, qui peut être améliorée par turbo-compression.

Les progrès actuels de l'injection tant sur les moteurs diesels que sur les moteurs à essence font qu'ils tendent à se rejoindre. L'intérêt de l'injection est dans la mécanique : possibilité de contrôle-commande tant de l'économie en combustible que de la pollution environnementale.

Le système le plus en vogue à ce jour est le système « common rail », dans lequel la pompe haute pression (1 500 bar) est séparée des dispositifs d'alimentation et distribution ; d'autres variantes ont vu le jour, depuis l'engouement pour ce système.

#### d) En guise de conclusion

Les développements actuels sont nombreux dans les moteurs surtout du point de vue technique.

##### ► Moteur à charge stratifié

L'injection et l'allumage commandé sont assistés par une soupape d'admission directrice qui crée un tourbillon ; cette configuration nécessite de forts taux de compression, mais elle est sujette à des émissions importantes ( $NO_x$  à haute température). La turbo-suralimentation est possible.

Avec préchambre, la combustion en mélange pauvre s'impose.

##### ► Moteur à auto-allumage et charge homogène

Ces combustions dites HCCI (*Homogeneous Charge Compression Ignition*) : l'injection du mélange se fait dans le cylindre en présence de gaz brûlés, l'ignition (allumage) est spontanée en fin de compression.

##### ► Moteurs suralimentés ou turbo compressés

Le sous-dimensionnement des moteurs (*down sizing*) conduit à amplifier le remplissage des cylindres.

Pour cela, la suralimentation par compresseur (dont le Comprex, compresseur à ondes) peut répondre à la question, bien que coûteux en énergie.

La turbo-suralimentation en couplant la compression à la récupération d'énergie sur la détente des gaz brûlés en turbine est plus intéressante énergétiquement ; un refroidissement intermédiaire des gaz comprimés peut augmenter encore le remplissage.

##### ► Les modélisations numériques

En partant du modèle global thermodynamique à une zone, on a vu se développer des modèles à deux zones (gaz frais, puis gaz brûlés), puis multizones, pour aboutir à des modèles à écoulement turbulent (gros codes de calculs).

### ► Quelques références

Le lecteur intéressé par le sujet pourra consulter des articles dans les *Techniques de l'Ingénieur* (Tome BL1) ; pour les carburants et moteurs (Guibet J.), pour les phénomènes d'ondes dans les moteurs (Borel M.) ; d'un point de vue plus général mais consacrés aux moteurs, les deux ouvrages de Ph. Arquès (Arquès Ph.).

### 16.3.4 Modèles de moteur revisités

On apporte ici un éclairage thermodynamique en dimensions finies en vue de l'optimisation du fonctionnement du moteur, selon des critères et des contraintes à déterminer.

#### a) Moteur non adiabatique

En régime dynamique stationnaire, l'énergie disponible sur les fumées après combustion s'écrit :

$$\dot{q}_c = \dot{m} f C_f (T_{ad} - T_i) \quad (16.16)$$

Si on suppose  $\dot{m} f C_f$ , très voisin de  $\dot{m}_R C_R$  (réactifs),  $C_f$ ,  $C_R$  non fonction de  $T$  ;  $T_i$ , température des réactifs avant la combustion supposée réalisée à  $P_o$ ,  $T_o$ , conditions d'ambiance.

Le bilan énergétique sur le cycle permet d'écrire en convention de l'ingénieur :

$$\dot{q}_c = \dot{w} + \dot{m} f C_f (T_f - T_o) + \dot{q}_p \quad (16.17)$$

La combinaison de (16.16) et (16.17) conduit à :

$$\dot{w} = \dot{m} f C_f [(T_{ad} - T_i) - (T_f - T_o)] - \dot{q}_p \quad (16.18)$$

avec  $T_f < T_{ad}$  ;  $T_f$  température des fumées après détente,  $T_{ad}$  température adiabatique de combustion.

$$\eta_l = \frac{\dot{w}}{\dot{q}_c} = 1 - \frac{T_f - T_o}{T_{ad} - T_i} - \frac{\dot{q}_p}{\dot{q}_c} \quad (16.19)$$

Les relations (16.18) et (16.19) montrent l'effet négatif de la non-adiabacité du moteur (quel qu'il soit), sur la puissance mécanisable d'une part, et le rendement au sens du premier principe d'autre part.

Par ailleurs, même pour un moteur adiabatique, l'expression (16.19) ne se simplifie pas sous la forme d'un rendement de Carnot ; tout au plus peut-on voir apparaître un cycle de Carnot équivalent si on pose  $(T_f - T_o)$ , température de puits froid équivalente, et  $(T_{ad} - T_i)$ , température de source chaude équivalente.

### ► Explicitation simple des pertes thermiques

En supposant une conductance de perte thermique moyenne du moteur  $\bar{K}p$ , on peut écrire :

$$\dot{q}_p = \bar{K}p(\bar{T} - T_p) \quad (16.20)$$

avec  $T_p$ , température de paroi du cylindre ; cette température est fortement fonction du matériau (plus ordinaire en MCI ; plus sophistiquée en TAC et en technique aéronautique et spatiale).

En supposant les pertes thermiques essentiellement sur la phase de combustion  $[T_i, T_{ad}]$ , puis de détente des gaz chauds  $[T_{ad}, T_f]$ , on peut approximer simplement  $\bar{T}$  par :

$$\bar{T} = \frac{(\overline{T_i, T_{ad}}) + (\overline{T_{ad}, T_f})}{2} \sim \frac{T_{ad}}{2} + \frac{T_i + T_f}{4}$$

Il vient alors pour  $\dot{w}$  :

$$\dot{w} = \dot{m} fCf [(T_{ad} - T_i) - (T_f - T_p)] - \bar{K}p \left[ \frac{T_{ad}}{2} + \frac{T_i + T_f}{4} - T_p \right] \quad (16.21)$$

et pour  $\eta_l$  :

$$\eta_l = 1 - \frac{T_f - T_o}{T_{ad} - T_i} - \frac{\bar{K}p}{\dot{m} fCf} \frac{\frac{T_{ad}}{2} + \frac{T_i + T_f}{4} - T_p}{T_{ad} - T_i} \quad (16.22)$$

On voit sur ces deux expressions toutes choses égales par ailleurs l'intérêt d'augmenter  $T_p$  la température de paroi.

### b) Moteur adiabatique irréversible

En supposant la masse cyclée constante sous forme des fumées pour un cycle composé d'une compression 1-2, un apport de chaleur (combustion) 2-3, une détente motrice 3-4, une restitution de chaleur (avec égalisation de pression) 4-1, il vient pour les bilans d'énergie et d'entropie spécifique (convention algébrique) :

$$w + q_{2-3} + q_{4-1} = 0$$

$$s_{2-3} + s_{4-1} + s_i = 0$$

D'où l'expression de  $w$  et  $\eta_l$  :

$$w = -\bar{T}_{2-3}s_{2-3} + \bar{T}_{4-1}(s_{2-3} + s_i) \quad (16.23)$$

$$\eta_l = -\frac{w}{q_{2-3}} = \frac{\bar{T}_{2-3} - \bar{T}_{4-1}}{\bar{T}_{2-3}} \left[ 1 - \frac{s_i \bar{T}_{4-1}}{\frac{\bar{T}_{2-3} - \bar{T}_{4-1}}{q_{2-3} \bar{T}_{2-3}}} \right] \quad (16.24)$$

Les deux relations (16.23), (16.24) font apparaître, des températures moyennes entropiques ; par ailleurs, (16.24) est le produit du rendement de Carnot équivalent du moteur, par un rendement au sens du second principe.

On voit que ce deuxième rendement ne peut s'annuler en pratique que pour un moteur intérieurement réversible (endoréversible).

**Remarque :** les relations (16.24) et (16.19) permettent d'établir une correspondance entre les températures entropiques et  $T_0$ ,  $T_{ad}$ .

### c) Application à l'optimisation du cycle de Beau De Rochas

#### ► Cas du moteur irréversible avec pertes thermiques

On traite ici du moteur de Beau De Rochas, non adiabatique et irréversible, en supposant les pertes thermiques localisées essentiellement sur la phase de combustion.

Il vient alors pour le modèle les équations constitutives suivantes :

$$\text{Bilan d'énergie : } w + q + c_v(T_1 - T_4) - q_p = 0$$

$$\text{Bilan d'entropie : } c_v \ln \frac{T_3}{T_2} + c_v \ln \frac{T_1}{T_4} + s_i = 0$$

$$\text{Bilan de combustion : } q = c_v(T_3 - T_2) + q_p$$

En posant  $q_p = k_p \left( \frac{T_3 + T_2}{2} - T_p \right)$ , le bilan de combustion fournit  $T_3$  :

$$T_3 = \alpha(\Delta T + T_2) \text{ avec : } \alpha = \frac{c_v - kp/2}{c_v + kp/2} \leq 1 ; \Delta T = \frac{q + kpT_p}{c_v - kp/2}.$$

Le bilan d'entropie permet d'écrire :

$$T_4 = \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{T_1}{K}$$

$$\text{avec : } K = e^{-s_i/c_v} \leq 1$$

On en déduit  $w$  sous la forme :

$$-w = c_v \left[ \alpha(\Delta T + T_2) \left( 1 - \frac{T_1}{T_2 K} \right) - T_2 \left( 1 - \frac{T_1}{T_2} \right) \right]$$

$c_v, \alpha, \Delta T, K, T_1$  paramètres,  $T_2$  variable.

$w$  admet un optimum en fonction de  $T_2$  tel que :



$$\frac{T_{2opt}}{T_1} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\Delta T}{T_1} \cdot K} = \sqrt{\frac{q + kpTp}{kpT_1} \cdot K} = a$$

Il y correspond le MAX de puissance du moteur :

$$MAX(-w) = c_v T_1 a \left[ \left( \frac{1-\alpha}{K} a + \alpha \right) \left( 1 - \frac{1}{Ka} \right) - 1 + \frac{1}{a} \right]$$

**Remarque :** le résultat précédent se simplifie pour un moteur réversible ( $K = 1$ ) :

$$MAX(-w) = c_v T_1 (1 - \alpha)(a - 1)^2$$

$$MAX(-w) = c_v T_1 \frac{kp}{c_v + kp/2} \left[ \sqrt{\frac{q + kpTp}{kpT_1}} - 1 \right]^2$$

si  $kp \rightarrow 0$  (moteur adiabatique),  $\lim [MAX(-w)] \rightarrow q(\eta \rightarrow 1)$ , d'où l'intérêt (en théorie) du moteur adiabatique.

► Cas du moteur adiabatique irréversible, limité en température maximale

Les équations du modèle sont les mêmes que précédemment, avec  $q_p = 0$ , mais cette fois  $T_3 = TM$  imposée.

On en déduit :

$$T_2 = TM - \frac{q}{c_v}$$

D'où :

$$-w = q - c_v T_1 \left( \frac{TM}{K} - \frac{1}{TM - q/c_v} - 1 \right)$$

Le maximum de puissance du moteur est obtenu par :

$$q_{opt} = c_v \left( TM - \frac{\sqrt{T_1 TM}}{\sqrt{K}} \right)$$

avec :

$$MAX(-w) = c_v T_1 \left\{ \left[ \sqrt{\frac{TM}{T_1}} - \frac{1}{\sqrt{K}} \right]^2 + 1 - \frac{1}{K} \right\}$$

$$\eta(MAX(-w)) = \frac{TM - 2\sqrt{TMT_1/K} + T_1}{TM - \sqrt{TMT_1/K}}$$

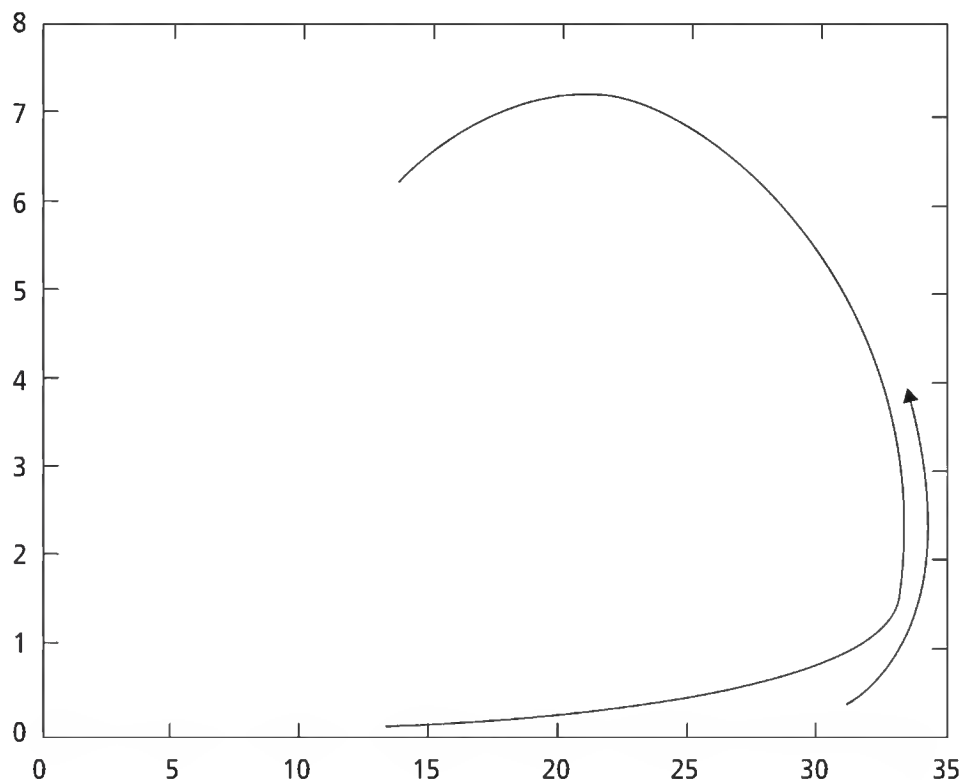
**Remarque :** pour une machine endoréversible ( $K = 1$ ), le résultat ci-dessus se simplifie ; en particulier, on trouve pour le rendement du moteur adiabatique réversible de Beau De Rochas limité en température, la même expression formelle du rendement à maximum de puissance que le rendement de Cham-badal-Novikov-Curzon-Ahlborn (*nice radical*) entre les températures extrêmes du cycle.

► Extension des modèles précédents

Un modèle thermodynamique intégrant la cinématique, une loi de Wiebe, des corrélations de pertes thermiques et des frottements mécaniques a été développé récemment dans notre groupe de recherche (Descieux D.). Le modèle nécessite une numérisation et conduit pour un réglage donné à une courbe caractéristique du

moteur  $\left( \overset{o}{w}, \eta_f \right)$  paramétrée en vitesse de rotation.

La figure 16.20 illustre cette courbe ; il apparaît clairement sur cette courbe une plage privilégiée d'utilisation du moteur, comprise entre le point de rendement maximal et le point de puissance maximale (régime économique, respectivement régime de puissance).



**Figure 16.20** Puissance en fonction du rendement pour un moteur de 0,5 l de cylindrée, rapport course-alésage = 1, rapport volumétrique 16,  $T_p = 480$  K, richesse = 0,7, A.A. = -5.



d) *Transposition à l'optimisation du cycle de Diesel*

Le présent paragraphe propose à titre d'exemples quelques calculs sur le moteur Diesel.

**Exemple 1**

Soit un moteur Diesel supposé adiabatique et réversible. On écrit les équations du modèle. On en déduit le rapport volumétrique optimum conduisant au maximum de puissance du moteur.

Équations du modèle :

$$w + q - c_v(T_4 - T_1) = 0$$

$$T_4 = \left( \frac{T_3}{T_2} \right)^\gamma T_1$$

$$q = c_p(T_3 - T_2)$$

À l'optimum, on a, à  $q$  imposé, une fonction croissante de  $T_2$ .

Cette équation fournit  $T_{2opt}$ , tel que  $\frac{T_{2opt}}{T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)_{opt}^{\gamma-1} = r_{vopt}^{\gamma-1}$ .

$r_{vopt}$  doit être compatible avec les contraintes.

**Exemple 2**

Soit un moteur diesel adiabatique et réversible, mais dont la température maximale de cycle est imposée (contrainte de matériaux) :  $T_3 = TM$ .

On recherche l'expression de  $-w$ , en fonction des variables et paramètres du problème, que l'on précisera. On en déduit l'expression du maximum de puissance du moteur.

$$-w = C_p T_2 \left( \frac{T_3}{T_2} - 1 \right) - C_v T_1 \left[ \left( \frac{T_3}{T_2} \right)^\gamma - 1 \right]$$

$$T_{2opt} = \sqrt[\gamma+1]{T_1 TM^\gamma} = TM - \frac{q_{opt}}{C_p}$$

$$MAX(-w) = C_v T_1 \left[ 1 + \gamma \frac{TM}{T_1} - (\gamma + 1) \left( \frac{TM}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \right]$$

$$\eta(MAX(-w)) = 1 - \frac{\left( \frac{TM}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} - 1}{\gamma \left[ \frac{TM}{T_1} - \left( \frac{TM}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \right]}$$

## 16.4 AUTRES MOTEURS

Le paragraphe 16.3 a montré que le moteur alternatif de Beau De Rochas était limité par le cliquetis (combustion), le moteur Diesel plutôt par la pression ; mais ces deux moteurs se rejoignent désormais sous forme d'un cycle de type mixte à injection, avec des contraintes environnementales (qualité de la combustion). Parmi les critères énergétiques, le critère le plus général semble être la puissance au litre (rapportée à la cylindrée du moteur).

Le problème se pose différemment pour les moteurs à flux (continu).

### 16.4.1 Turbines à combustion TAC

#### a) Machines à circuits ouvert, fermé

Les turbines à combustion sont plus communément appelées turbines à gaz. Ces dispositifs sont aussi à combustion interne ; ils utilisent exclusivement des combustibles gaz ou liquide.

Bien que le principe en soit simple, les réalisations pratiques restent très techniques ; la figure 16.21 présente une telle machine en coupe.

Les deux applications principales des turbines à gaz sont dans les transports, et tout particulièrement les turbines aéronautiques ; la turbine est complétée par une tuyère de propulsion, et dans les applications terrestres ; la figure 16.22 représente une coupe d'une turbine à gaz environnée.

Souvent, compte tenu de l'étroitesse des marchés, les turbines utilisées dans les applications terrestres sont des turbines adaptées de l'aéronautique.

La principale limitation des turbines provient des aubes (limitation en température : matériaux :  $T_{MAXTAC} < T_{MAXMCI}$  ; on verra que les performances augmentent si la température de combustion augmente.

Enfin, les turbines à gaz ont des vitesses de rotation élevées, nécessitant des réducteurs pour beaucoup d'applications.

Parmi l'ensemble des configurations de turbines à combustion possibles, on notera deux grandes catégories.

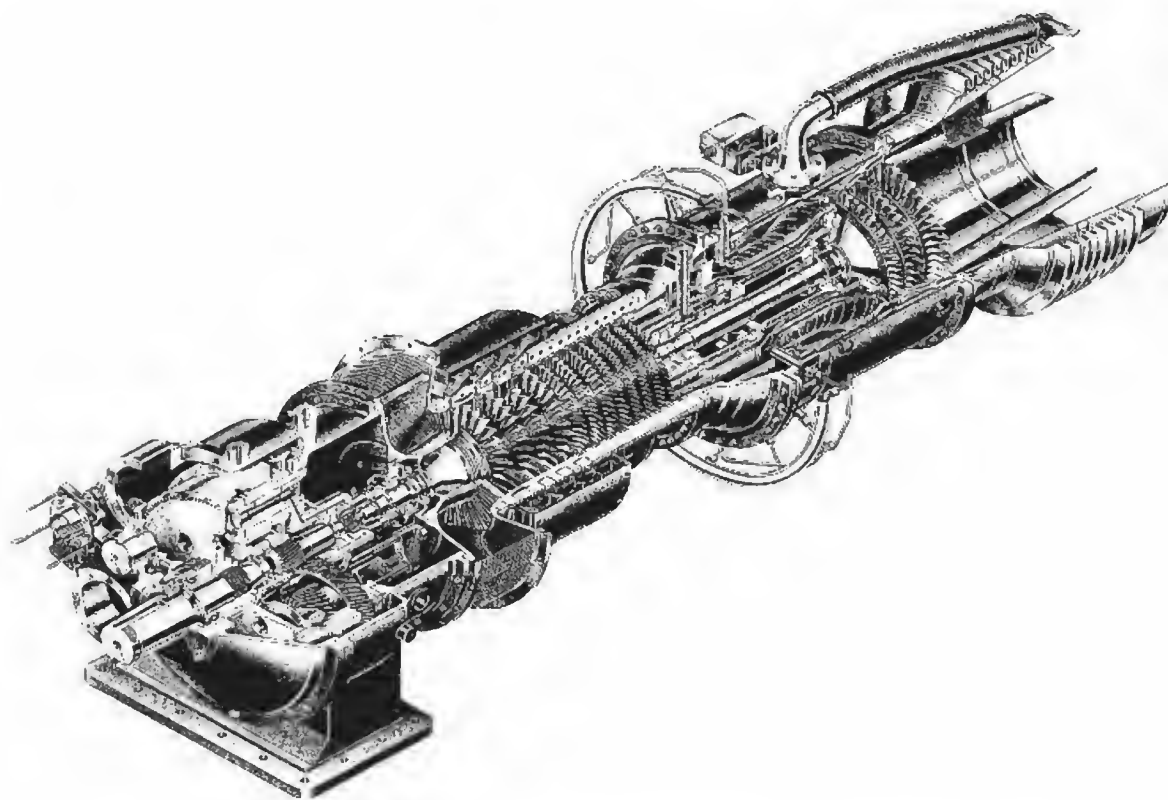


Figure 16.21 Coupe d'une turbine environnée en application terrestre.

► La turbine à gaz à circuit ouvert (figure 16.23.a)

La machine est une machine ouverte admettant de l'air au compresseur C, rejetant des gaz à l'atmosphère en sortie de turbine T ; le schéma représente un compresseur et une turbine sur le même arbre. Exemple : turbine d'avion.

Ce schéma toutefois est représenté avec une combustion externe : le combustible brûle au brûleur B dans une chambre externe au circuit d'air ; plus couramment, la combustion se fait par injection du combustible dans la chambre qui produit des fumées envoyées à la turbine.

► La turbine à gaz à circuit fermé (figure 16.23.b)

Ce schéma de fonctionnement est plus rare ; il présente l'intérêt de pouvoir travailler avec un gaz favorable aux transferts (He). Il exclut de fait la possibilité d'une combustion interne. Il comporte deux échangeurs de chaleur : l'échangeur B à haute température, l'échangeur E à basse température.

Ce type de configuration est envisagé pour des centrales solaires à turbine ; la combustion externe au brûleur B est alors remplacée par la captation et concentration du rayonnement solaire en B.

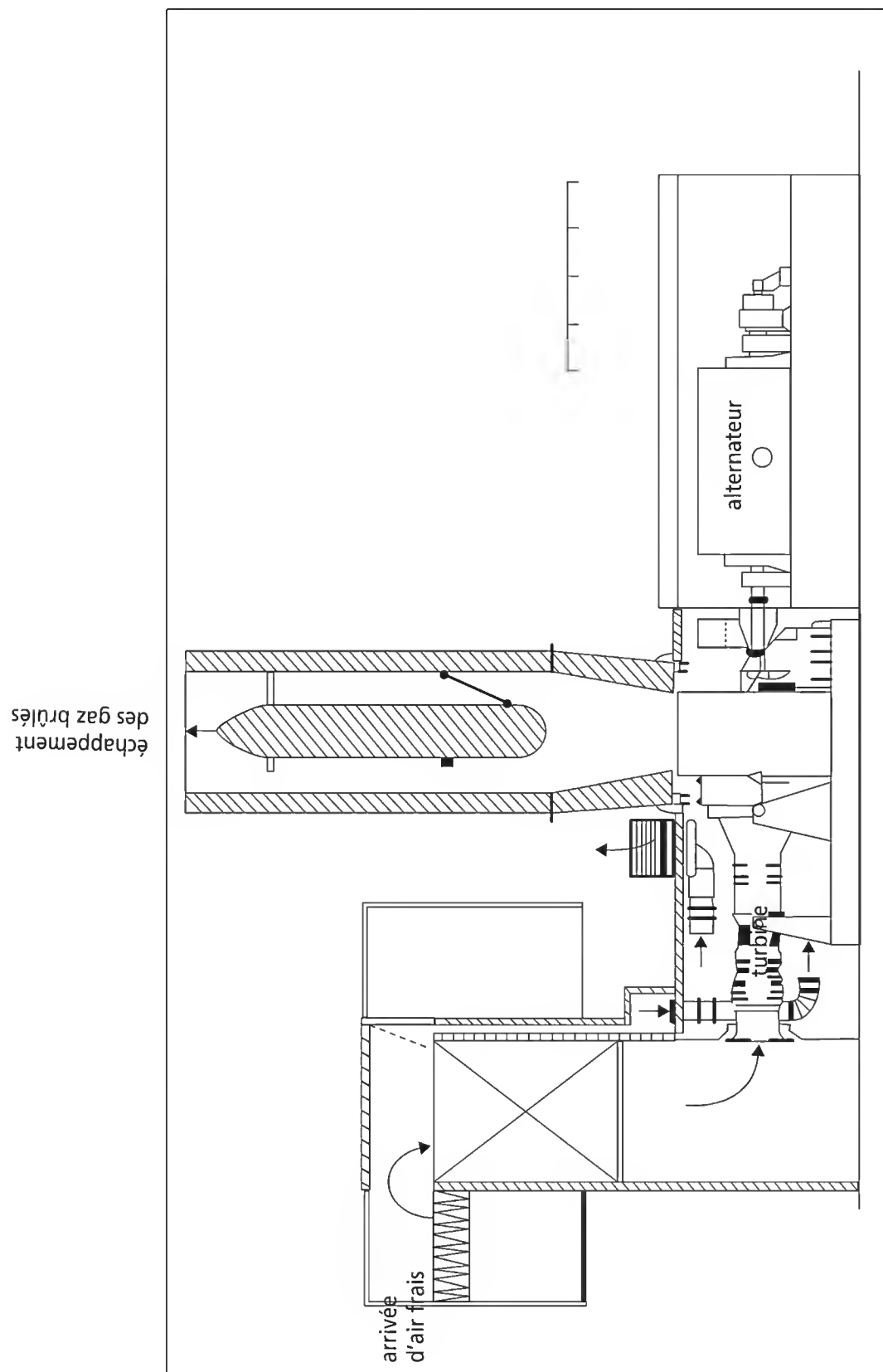
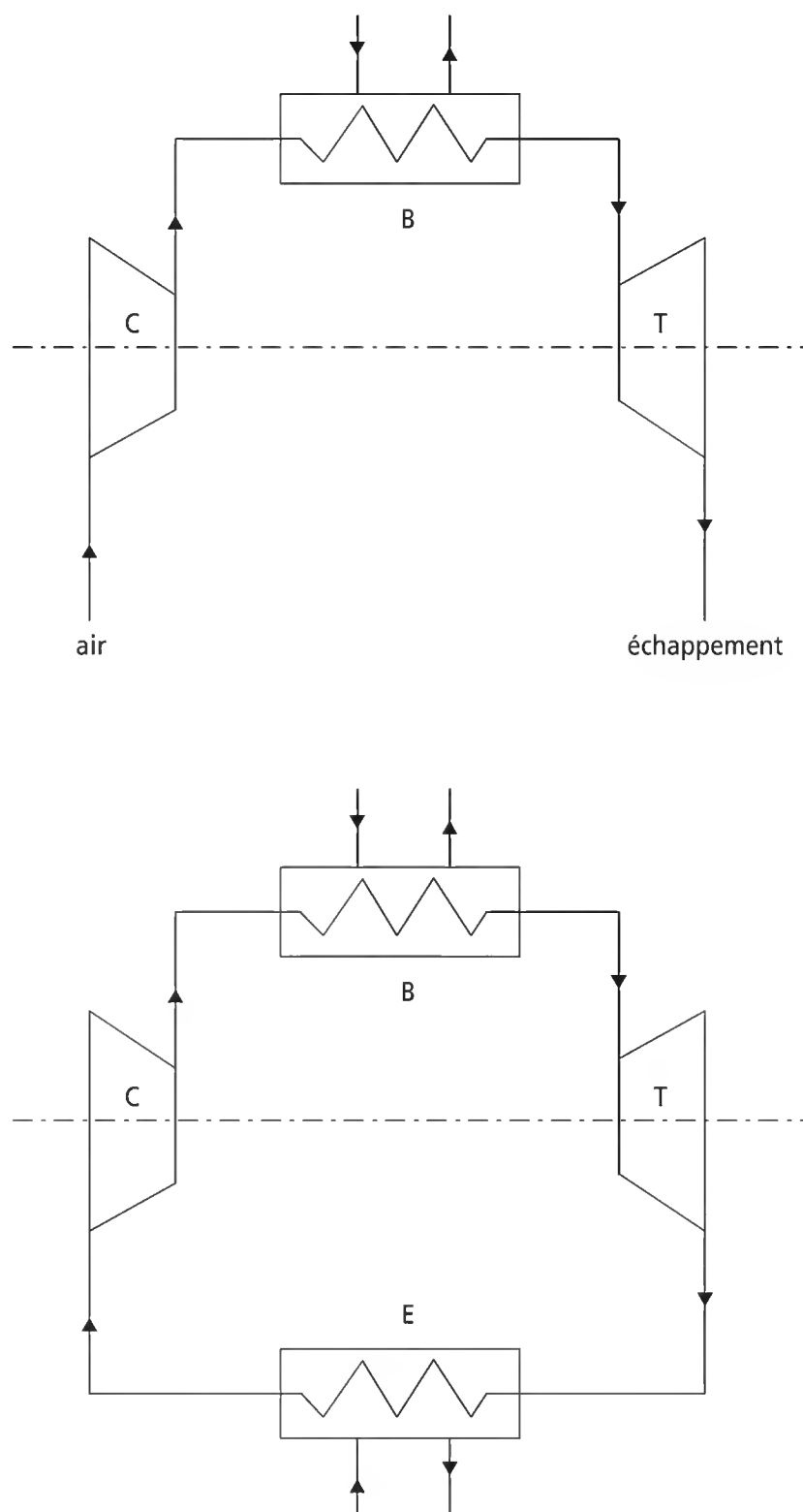


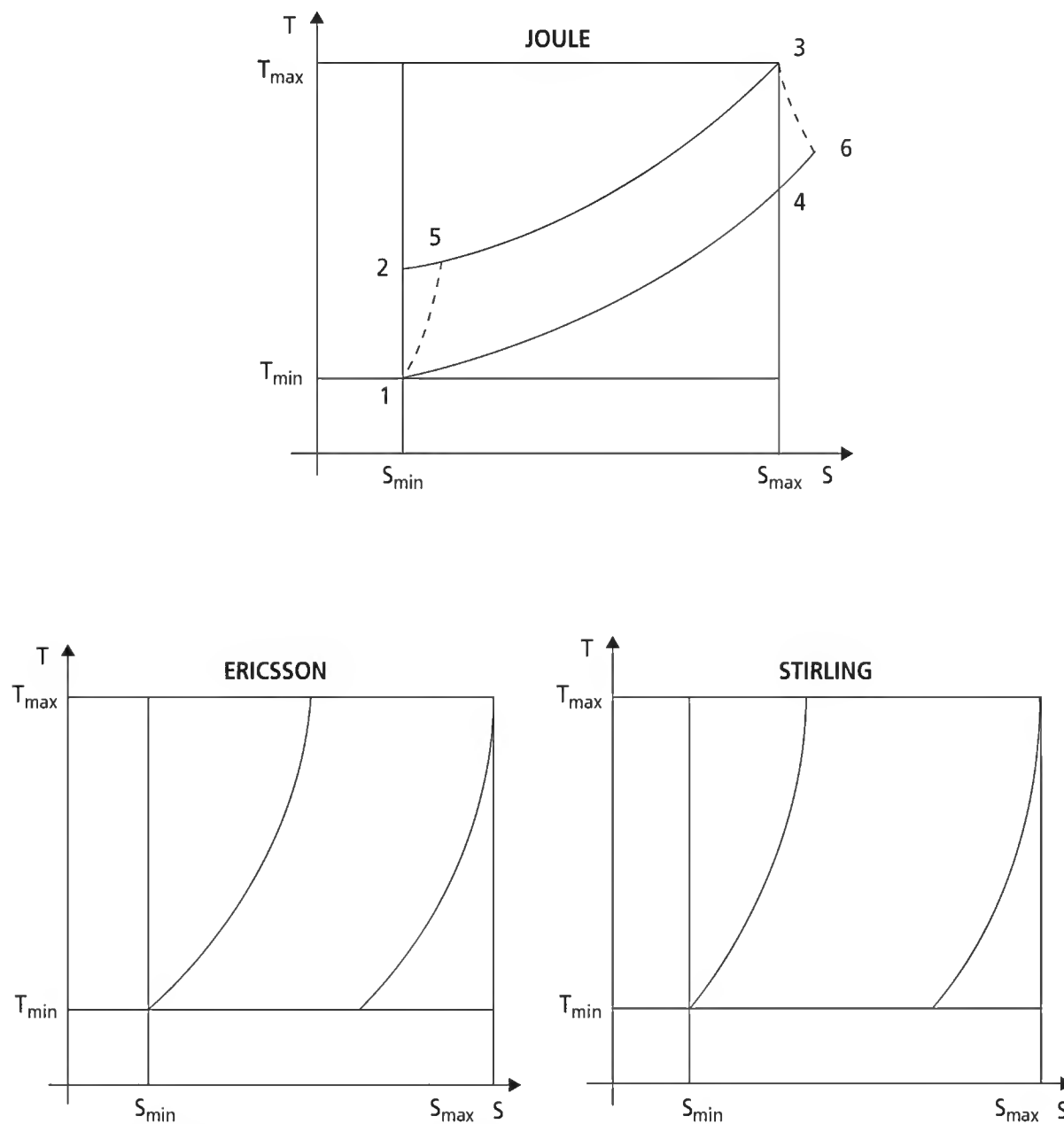
Figure 16.22 Coupe d'une turbine à combustion terrestre.



**Figure 16.23** Schémas de principe de TAC à combustion externe  
a) circuit ouvert, b) circuit fermé.

### b) Le cycle de Joule, version de base

Quelle que soit la configuration de la machine (figure 16.23), et comme pour les moteurs à combustion interne, le modèle thermostatique de machine travaille sur le cycle fermé équivalent conformément à la figure 16.24.



**Figure 16.24** Cycles de Joule, Ericsson, Stirling en diagramme entropique.

Ce cycle est une succession de quatre transformations thermodynamiques :

1-2 compression isentropique

2-3 échange de chaleur isobare (échauffement) à  $P_H$

3-4 détente isentropique

4-1 échange de chaleur isobare (refroidissement) à  $P_B$

On voit sur le cycle de Joule que le déplacement de la température intermédiaire 2 fait varier l'aire du cycle à  $T_{\min}$  et  $T_{\max}$  imposés : si  $T_2 \rightarrow T_1$ , le travail de cycle tend vers zéro (donc la puissance de la machine), alors que si  $T_2 \rightarrow T_{\max}$ , on retrouve aussi un travail de cycle tendant vers zéro ; il existe donc entre ces deux cycles extrêmes une position optimale de 2, qui correspond à un taux de compression optimum.

### ► Optimisation du cycle de Joule idéal

Cette optimisation thermostatique suppose toutes les transformations réversibles, mais aussi les propriétés physiques constantes, ainsi que les débits massiques.

Ce dernier point est clair pour les circuits fermés ; c'est une bonne approximation pour les circuits ouverts, vu les forts excès d'air généralement présents dans les turbines à combustion.

Ainsi, en raisonnant sur les quantités spécifiques massiques, il vient, pour le travail  $w$  disponible sur l'arbre commun turbine-compresseur :

$$w = w_t - w_c$$

### Rendement de cycle

Si on suppose l'air gaz parfait, l'expression générale du rendement de cycle :

$$\eta_l = \frac{w}{q} = \frac{(h_3 - h_4) - (h_2 - h_1)}{h_3 - h_2}$$

devient comme précédemment :

$$\eta_l = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_1} \quad (16.25)$$

L'équation de Laplace fournit alors :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = z \quad (16.26)$$

La combinaison de (16.25) et (16.26) conduit à :

$$\eta_l = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{z} \text{ avec } z = \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left( \tau = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_H}{P_B} \right)$$

**Remarque :** dans ce modèle, le rendement ne dépend que du taux de compression (fonction croissante) ; il faut au moins remarquer qu'une augmentation de  $\tau$  influe aussi sur le coût d'investissement de la machine (contrainte).

*Travail massique*

On a :

$$w = w_t - w_c = CpT_3 \left( 1 - \frac{1}{z} \right) - CpT_1(z-1)$$

Cela confirme l'existence d'un optimum tel que :

$$z_{opt} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}} = \sqrt{\frac{T_{MAX}}{T_{min}}}$$

On en déduit aisément :

$$MAX_w = Cp \left( \sqrt{T_{MAX}} - \sqrt{T_{min}} \right)^2$$

On remarque que  $\eta(MAX_w)$  correspond au rendement de Chambadal-Novikov-Curzon-Ahlborn.

► Optimisation d'un cycle de Joule réel

Le cycle de Joule réel modélisé ci-après intègre cette fois les irréversibilités de compression ( $\eta_{sc}$ , rendement isentropique de compression) et de détente ( $\eta_{sT}$ , rendement isentropique de turbine). Il vient :

$$\eta_{sc} = \frac{T_2 - T_1}{T_5 - T_1} = \frac{T_1(z-1)}{T_5 - T_1}$$

$$\eta_{sT} = \frac{T_3 - T_6}{T_3 - T_4}$$

D'où les expressions :

– du travail

$$w = Cp(z-1) \left( \frac{\eta_{sT} T_3}{z} - \frac{T_1}{\eta_{sc}} \right)$$

– de la chaleur dépensée

$$q = Cp \left[ T_3 - T_1 \left( 1 + \frac{z-1}{\eta_{sc}} \right) \right]$$

– du rendement  $\eta_t$

$$\eta_t = \left( 1 - \frac{1}{z} \right) \frac{\beta - z}{\sigma - z + 1}$$



avec :

$$\sigma = \eta_{sc} \left( \frac{T_3}{T_1} - 1 \right); \beta = \eta_{sc} \eta_{sT} \frac{T_3}{T_1}$$

On peut alors facilement trouver qu'il existe :

- un rendement maximum pour :

$$z_{opt\eta} = a - \sqrt{a^2 - b}$$

avec :

$$a = \frac{\beta}{\beta - \sigma}; b = \frac{(\sigma + 1)\beta}{\beta - \sigma}$$

- un maximum de travail pour :

$$z_{optw} = \sqrt{\beta}$$

### ► Quelques compléments sur les cycles réels

#### *Propriétés de stagnation*

Ces propriétés (température et pression) tiennent compte de l'énergie cinétique du fluide. Pour un système TAC (compresseur et turbines adiabatiques), le raisonne-

ment thermostatique suppose  $\frac{V^2}{2}$  (l'énergie cinétique) très inférieure à  $w$  et  $q_c$ .

Sinon, on définit la température de stagnation :

$$T_s = T + \frac{V^2}{2Cp}$$

Si on se rappelle que :  $Cp = R \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ ;  $M = \frac{V}{c}$  avec  $c = \sqrt{\gamma RT}$ , il vient :

$$\frac{T_s}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

De même, la pression de stagnation (pour une transformation isentropique) :

$$\frac{P_s}{P} = \left( \frac{T_s}{T} \right)^{\gamma/\gamma-1} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\gamma/\gamma-1}$$

Le déplacement du point d'état statique vers le point de stagnation réel est représenté en diagramme ( $hs$ ) sur la figure 16.25.

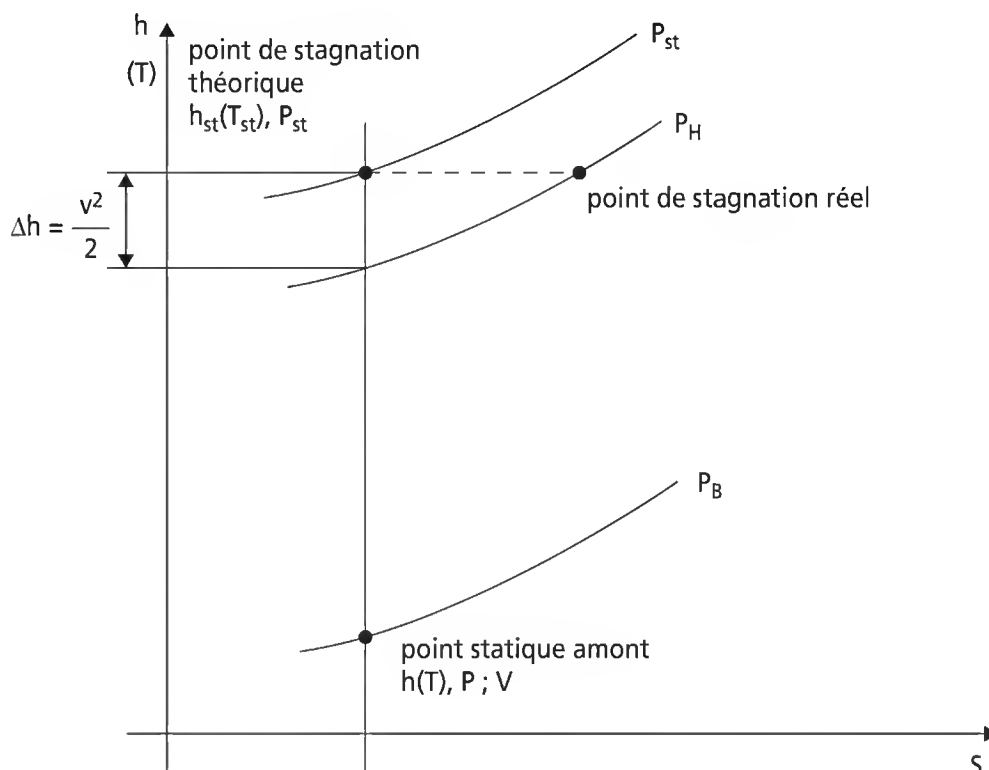


Figure 16.25 Points de stagnation en diagramme  $(h, s)$ .

On remarque sur la figure 16.25 le déplacement des points de stagnation réels dans une compression vers la pression haute du cycle. Le même schéma peut être établi pour la détente en turbine.

**Remarque 1 :** pour le gaz parfait, le schéma vaut en diagramme  $(T, s)$  autant qu'en diagramme  $(h, s)$ .

**Remarque 2 :** en toute rigueur, les caractéristiques doivent être menées sur les points de stagnation, intégrant les effets cinétiques.

#### Retour sur les rendements des composants d'une centrale à TAC

Sauf sur la combustion et une éventuelle récupération (voir paragraphe 16.4.1.d), les forts débits sont associés à des temps de séjour courts ; donc, les transformations thermodynamiques sont bien représentées par une adiabatique.

La transformation réelle en compresseur est illustrée sur la figure 16.26. Il apparaît alors la définition du rendement isentropique de compression :

$$\eta_{sc} = \frac{\overset{o}{w}_{sc}}{\overset{o}{w}_c}$$

On note que cette définition diffère du rendement mécanique global du compresseur  $\eta_M$  :

$$\eta_M = \frac{\overset{o}{w}_{sc}}{\overset{o}{w}_c + \overset{o}{w}_{f_{sc}}}$$

$\dot{w}_{f_{sc}}$ , puissance perdue par frottement solide (roulement et joints sur l'arbre du compresseur).

Cas de la turbine : de façon parallèle au compresseur, on définit le rendement isentropique de détente en turbine (figure 16.26).

$$\eta_{sT} = \frac{\dot{w}_T}{\dot{w}_{sT}}$$

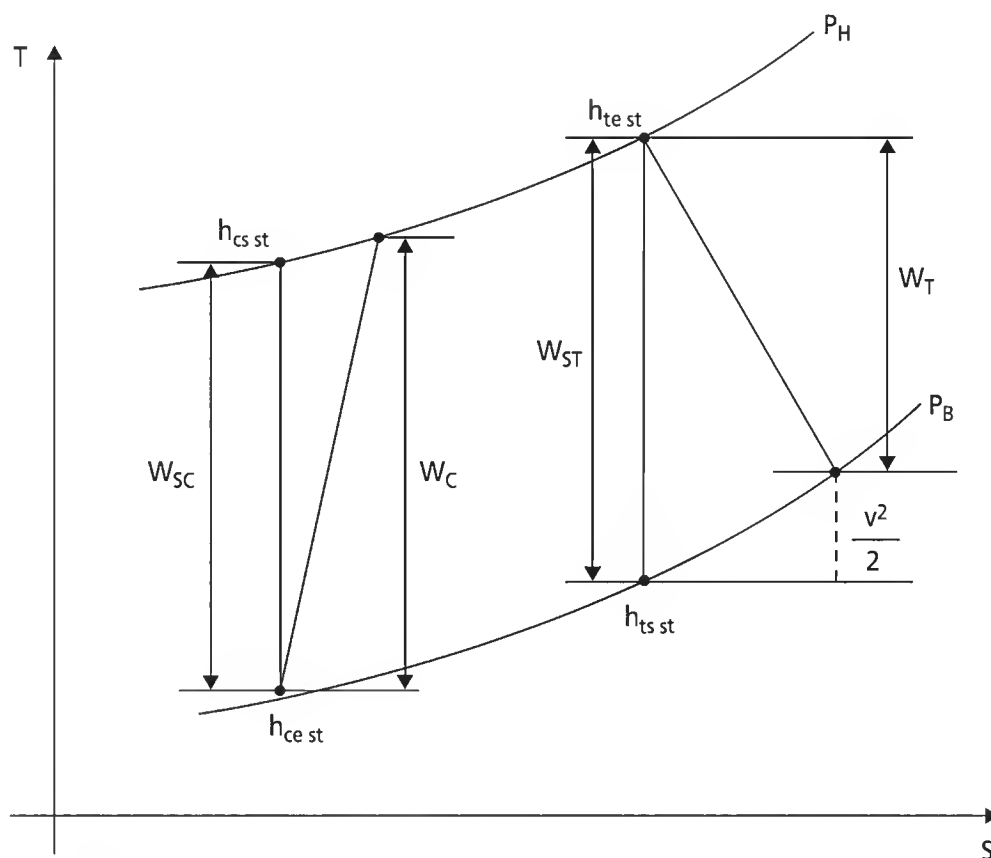


Figure 16.26 Compression et détente réelle en diagramme (h, s).

On notera ici que ces puissances sont relatives aux fumées ( $\Delta h$ , sur les fumées pour les turbines à combustion interne) ; cela se confondra valablement avec le  $\Delta h$  sur l'air en cas de fort excès d'air.

Cette expression peut se transformer en :

$$\eta_{sT} = \frac{\Delta h - w_{fsT}}{\Delta h_{is}}$$

en notant  $w_{fsT}$ , l'énergie spécifique perdue par frottement solide sur la turbine.

**Remarque :** l'approximation courante répartit également les pertes par frottement solide entre la turbine et le compresseur selon :

$$\dot{w}_{fsT} = \dot{w}_{fsC} = \frac{\dot{w}_{fs}}{2}$$

La puissance nette spécifique massique du système turbine est souvent exprimée en référence au kg d'air cyclé :

$$w_{net} = (1+n)(w_T - w_{fsT}) - (w_c + w_{fsC})$$

### Les écarts aux cycles de l'air

Fluide différent de l'air : dans toutes les machines à combustion interne la détente au moins se produit sur des produits de combustion en totalité ou partiellement, en présence d'excès d'air ; en conséquence,  $\gamma$  sera inférieur à 1,40, ce qui a pour conséquence une réduction du rendement thermique.

**Remarque :** il en est de même de la variation des chaleurs spécifiques (donc  $C_p$ ) avec  $T$ , ce qui induit une variation de  $\gamma$  avec  $T$ .

Combustion imparfaite : on a vu que selon le niveau de température des dissociations endothermiques ( $\text{CO}$ ,  $\text{H}_2$ ) peuvent intervenir.

Les bilans sont généralement faits par rapport au PCI du combustible et en négligeant la masse de combustible devant la masse d'air  $\left(n = \dot{m}_c / \dot{m}_a \sim 0\right)$ . Cette approximation permet de rechercher le rapport massique estimé combustible/air, à partir de la notion de rendement de combustion  $\eta_{\text{comb}}$  :

$$\eta_{\text{comb}} = \frac{\dot{m}_a \cdot (h_{fs} - h_{ae})}{\dot{m}_c \cdot \text{PCI}}$$

**Remarque :** cette expression néglige l'énergie sensible apportée par le combustible.

Non adiabacité : pertes thermiques à travers les parois.

Pertes par frottements fluides : pertes de pompage. Pertes de pression (viscosité) dans les conduits, échangeurs, et chambre de combustion (vu les fortes vitesses).

### c) Variantes de cycles

#### ► Cycles à récupération de chaleur

Contrairement au cycle de Carnot qui est un cycle à régénération mécanique, le cycle de Joule (comme le cycle de Ericsson et de Stirling) se prête bien à la régénération thermique, mais cette régénération est limitée par l'augmentation du taux de compression ou de détente du cycle.

La récupération de la chaleur se fait sur un échangeur à contre courant (échangeur récupérateur entre le fluide en sortie de compression, préchauffé par les gaz de sortie de turbine).

L'efficacité de l'échangeur de récupération est souvent voisine de  $\eta_R = 0,70$ .

### Optimisation d'un cycle de Joule fermé en contact avec des capacités thermiques finies

Ce cycle est représentatif d'une machine fermée. Il est représenté sur la figure 16.27, en tenant compte des capacités externes finies ( $T_{ce} \rightarrow T_{cs}$  en haute température ;  $T_{fe} \rightarrow T_{fs}$  en basse température), des pertes de pression internes ( $P_{H2} > P_{H3}$  ;  $P_{B4} > P_{B1}$ ), et aussi d'une récupération imparfaite de chaleur (échauffement  $2' \rightarrow x$ , correspondant au refroidissement en sortie de turbine de  $4' \rightarrow y$ ).

Mise en équation du modèle

En régime dynamique stationnaire : transfert de chaleur à la source chaude (méthode NUT) :

$$\dot{q}_c = \varepsilon_c \dot{C}_{\min} (T_{ce} - T_x) = \dot{C}_c (T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m} C_p (T_3 - T_x)$$

$$\text{avec : } \varepsilon_c = f \left( NUT_c, \frac{\dot{C}_{\min}}{\dot{C}_{\max}} \right), \text{ efficacité de l'échangeur chaud.}$$

$T_{ce}$ , paramètre,  $T_{cs}, T_3, T_x$  variables.

Transfert de chaleur au puits froid :

$$\dot{q}_F = \varepsilon_F \dot{C}_{\min} (T_{fe} - T_y) = \dot{C}_f (T_{fe} - T_{fs}) = \dot{m} C_p (T_1 - T_y)$$

$T_{fe}$ , paramètre,  $T_{fs}, T_1, T_y$  variables.

Transfert de chaleur à l'échangeur récupérateur :

$$\eta_R = \frac{T_x - T_{2'}}{T_{4'} - T_{2'}} = \frac{T_{4'} - T_y}{T_{4'} - T_{2'}}$$

Le bilan entropique :

$$T_{2'} \cdot T_{4'} = K T_1 T_3 \quad \text{avec } K = e^{\dot{S}_T / \dot{m} C_p}, K \text{ paramètre d'irréversibilité.}$$

Le bilan à la source chaude en présence de pertes thermiques (non adiabaticité de la machine).

$$\dot{q}_c = \varepsilon_c C_p (T_3 - T_s) = \dot{\phi} - K_p (T_{ce} - T_{fe})$$

$\dot{\phi}$ , flux disponible à la source chaude



La figure 16.28 rend compte de l'évolution du maximum de puissance réduit, en fonction de  $NUT_c$  et  $T_{ce}$  pour des valeurs de  $NUT_f, NUT_p, K, T_{se}$  spécifiées sur la figure.

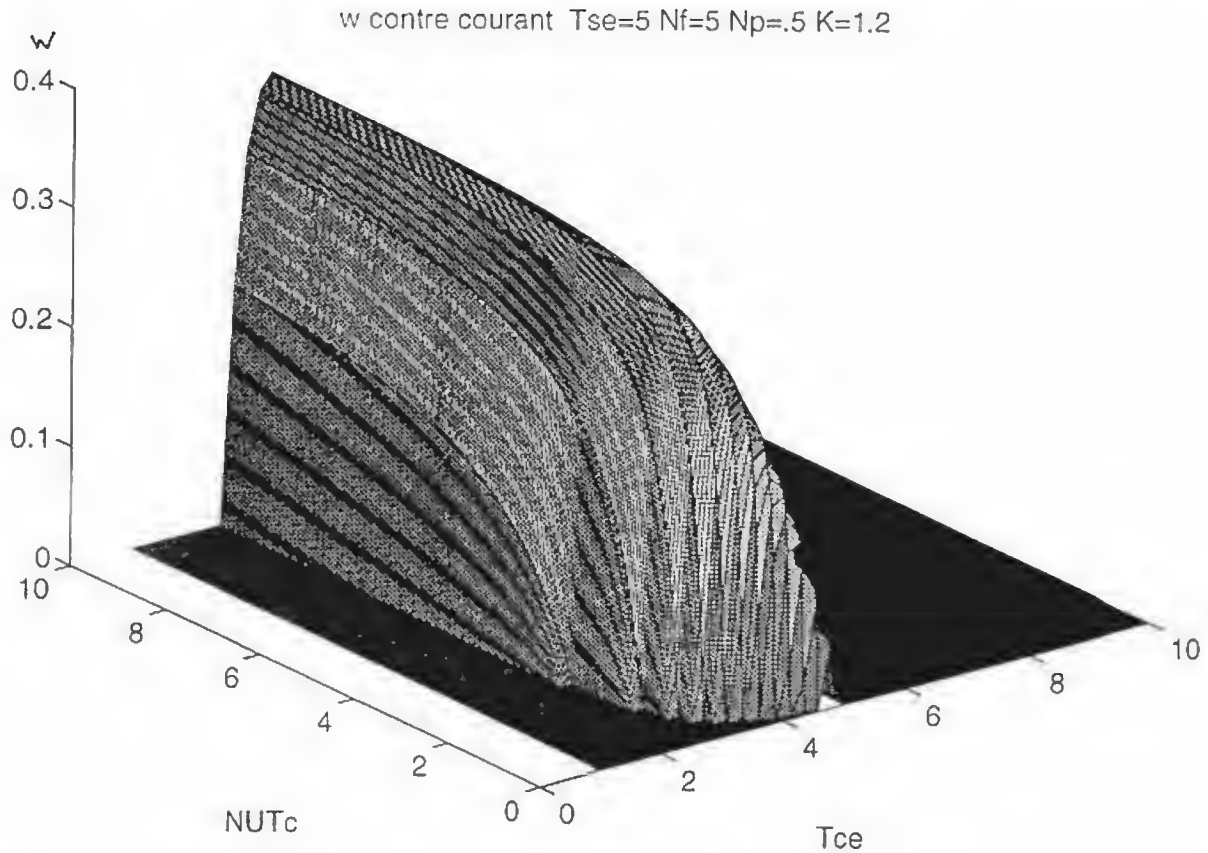


Figure 16.28 Optimum de puissance du moteur à cycle de Joule fermé.

On trouve par ailleurs que cet optimum est croissant de  $\phi_R$ , décroissant de  $NUT_p$ , et croissant avec  $\eta_R$ ; l'influence de  $K$  (irréversibilité) est négative; le modèle réagit donc bien conformément à la physique et constitue un guide à la conception, par l'étude de sensibilité paramétrique. Le lecteur intéressé peut consulter (Feidt M.).

#### ► Cycle à compression étagée avec refroidissement intermédiaire

Ce cycle est représenté sur la figure 16.29.

#### Optimum de travail massique

En supposant un même rendement isentropique  $\eta_{sc}$  pour la compression basse pression et haute pression, et un refroidissement parfait  $T_2' = T_1$ , il vient par le travail de compression :

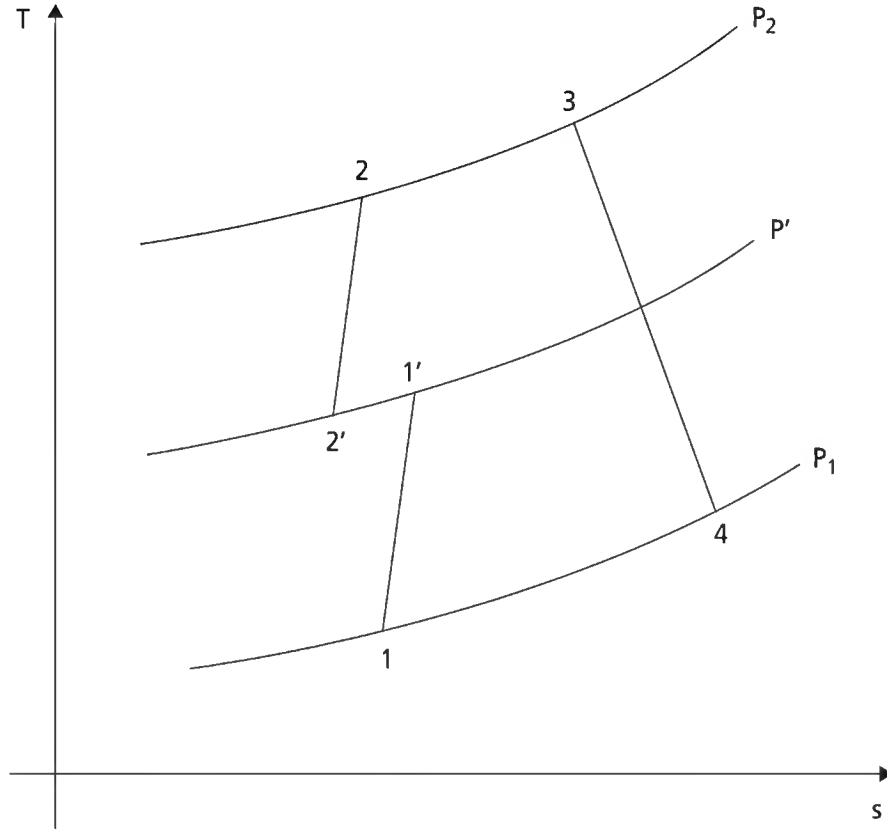


Figure 16.29 Cycle à compression étagée avec refroidissement intermédiaire.

$$w_c = \frac{CpT_1}{\eta_{sc}} \left[ z_1 + \frac{z}{z_1} - 2 \right]$$

avec :  $z = z_1 \cdot z_2$  et  $z_i = \tau_i^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ .

De la même façon, pour la turbine, on a :

$$w_T = CpT_3 \eta_{sT} \left( 1 - \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{D'où : } w = CpT_3 \eta_{sT} \left( 1 - \frac{1}{z} \right) - \frac{CpT_1}{\eta_{sc}} \left( z_1 + \frac{z}{z_1} - 2 \right)$$

Ce travail présente un optimum en fonction de  $z_1$  pour :

$$z_{1opt} = z_{2opt} = \sqrt{z} \quad (\text{ou } \tau_1 = \tau_2 = \sqrt{\tau})$$

$$MAXw = CpT_3 \eta_{sT} \left( 1 - \frac{1}{z} \right) - 2Cp \frac{T_1}{\eta_{sc}} (\sqrt{z} - 1)$$



Cette dernière expression fait apparaître un optimum en fonction de  $z$  pour :

$$z_{opt} = \sqrt{\beta^3}, \quad \beta = \frac{T_3}{T_1} \eta_{sc} \eta_{sT}$$

### Optimum de rendement

Les calculs fournissent la chaleur massique absorbée sous la forme :

$$q = Cp \left[ T_3 - \frac{T_1}{\eta_{sc}} \left( \eta_{sc} + \frac{z}{z_1} - 1 \right) \right]$$

Connaissant  $w$ , il vient  $\eta = \frac{w}{q}$ , soit :

$$\frac{d\eta}{dz_1} = \frac{1}{q} \frac{\partial w}{\partial z_1} - \frac{w}{q^2} \frac{\partial q}{\partial z_1}$$

L'optimum en fonction de  $z_1$  satisfait en conséquence à la relation non linéaire en  $z_1$  :

$$z(1 - \eta_{MAX}) = z_1^2 \text{ avec } \eta_{MAX} = f(z_1)$$

De la même façon en fonction de  $z$ , il vient :

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{q} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w}{q^2} \frac{\partial q}{\partial z}$$

Après calcul, il vient :

$$1 - \eta_{MAX} = \beta \frac{z_1^2}{z^2}$$

La solution à l'optimum s'en déduit et satisfait au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} zz_1 = \beta \\ \left( 1 - \frac{1}{\eta_{sT}} + \frac{1 + \eta_{sc}}{\beta} \right) z^3 - 3z^2 + \beta(\sigma + 1) = 0 \end{cases}$$

**Remarque :** le même type d'amélioration est possible pour les détentes : détente avec réchauffage intermédiaire (ou postcombustion).

### ► Cycles avec air humide

#### Cycle HAT (Humidified Air Turbine)

Dans ce cycle (voir figure 16.30), la limitation de température assurée en entrée de turbine est acquise par injection d'un liquide dans le cycle (faible travail de pompe),

mais il y correspond une diminution du  $\gamma$  de mélange, et aussi une amélioration de la qualité des effluents.

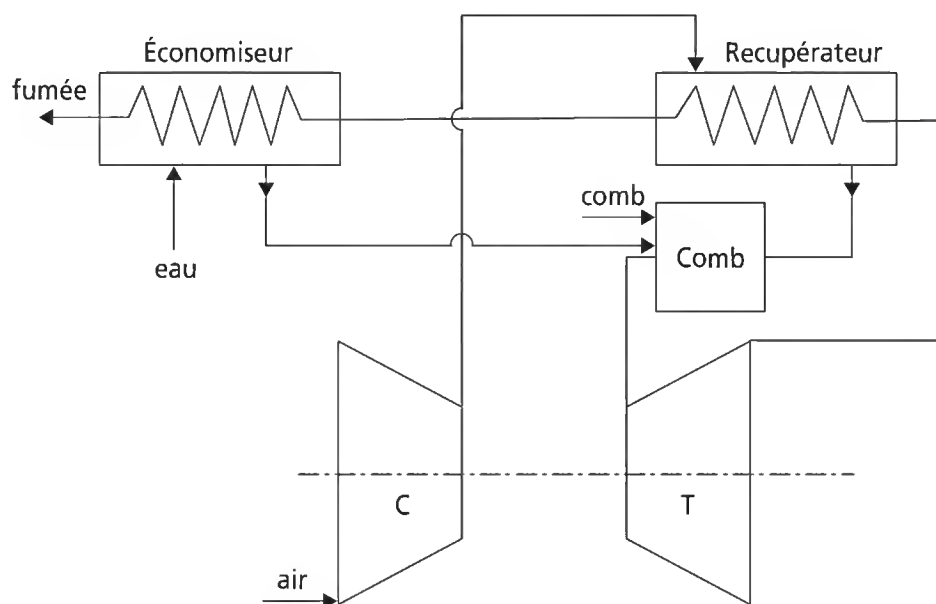


Figure 16.30 Cycle HAT d'une TAC.

L'eau utilisée se préchauffe dans un échangeur économiseur.

### Cycle STIG (*Steam In Gas*)

Dans ce cas, l'eau additionnelle est vaporisée dans l'échangeur récupérateur en sortie de turbine (pour éventuel usage) mais aussi injection sous forme vapeur dans la chambre de combustion. L'intérêt de ce type de cycle est très voisin du précédent.

En conclusion, des variantes de cycle, d'autres combinaisons sont possibles ; elles seront abordées dans un autre chapitre (cycles hybrides ou combinés).

### e) Les turbines aéronautiques

#### ► Le turboréacteur

Bien qu'il y ait eu quelques tentatives d'usages des TAC dans le domaine automobile et dans le domaine ferroviaire, la principale utilisation des turbines à combustion est le domaine aéronautique et spatial ; les fortes vitesses des gaz de sortie sont utilisables dans les systèmes de propulsion.

Le schéma de principe du turboréacteur est donné sur la figure 16.31.a. Il est complété par le cycle associé dans le diagramme de Clapeyron : il ne diffère pas essentiellement du cycle de Joule, mais fait apparaître le diffuseur en entrée de compresseur (divergent qui convertit la vitesse en pression), puis la tuyère en sortie de turbine (figure 16.31.b).

#### ► Autres moteurs

Les statoréacteurs, de même que les moteurs cryogéniques (exemple : moteur cryogénique d'Ariane) ne sont pas des moteurs autonomes. Ils sont précédés dans le

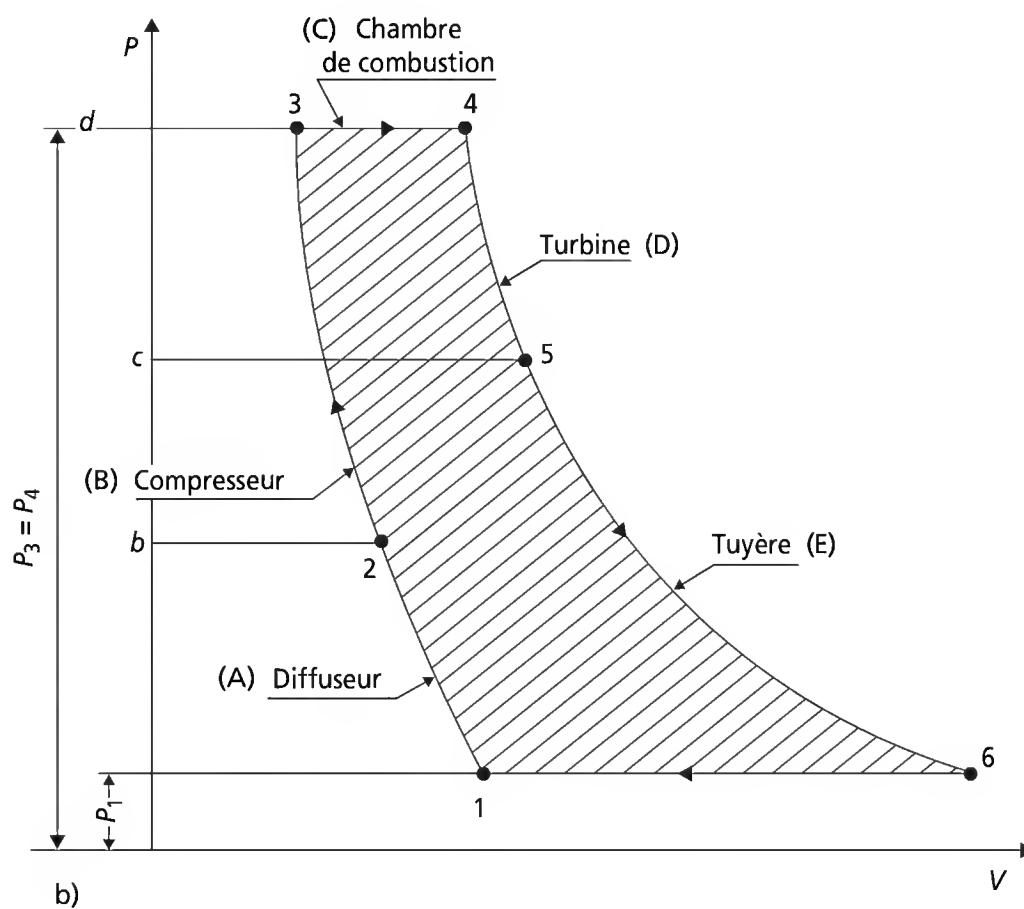
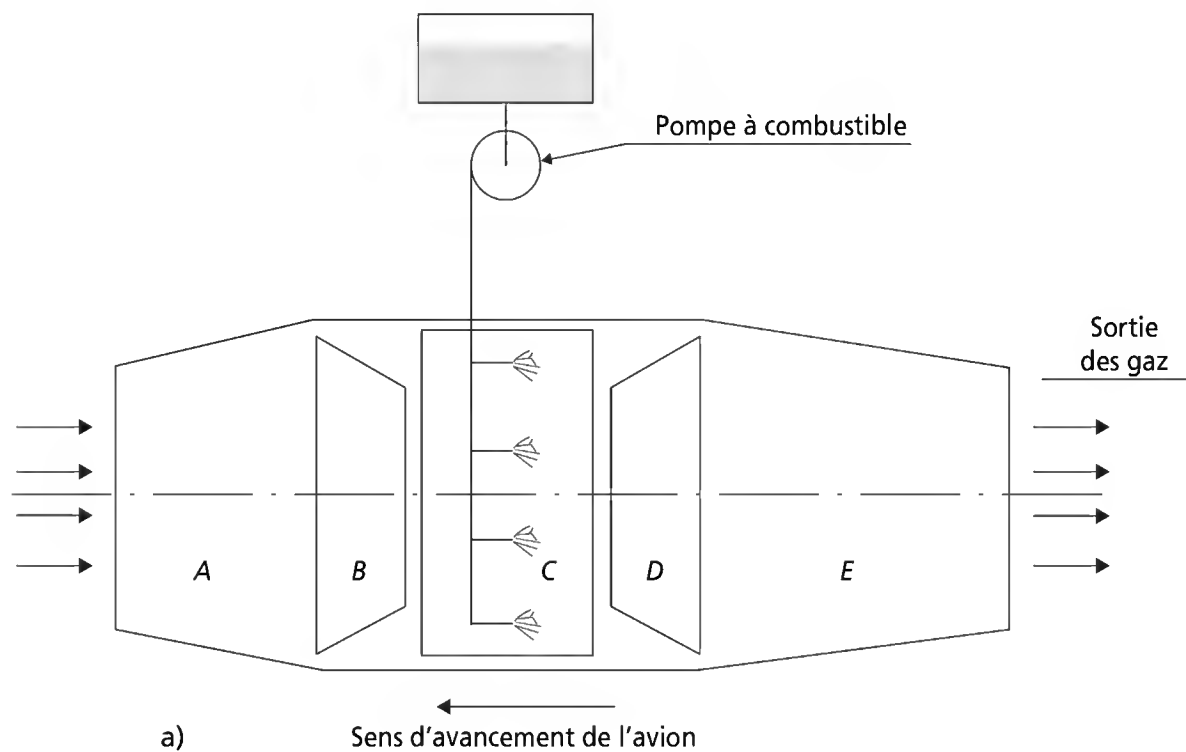


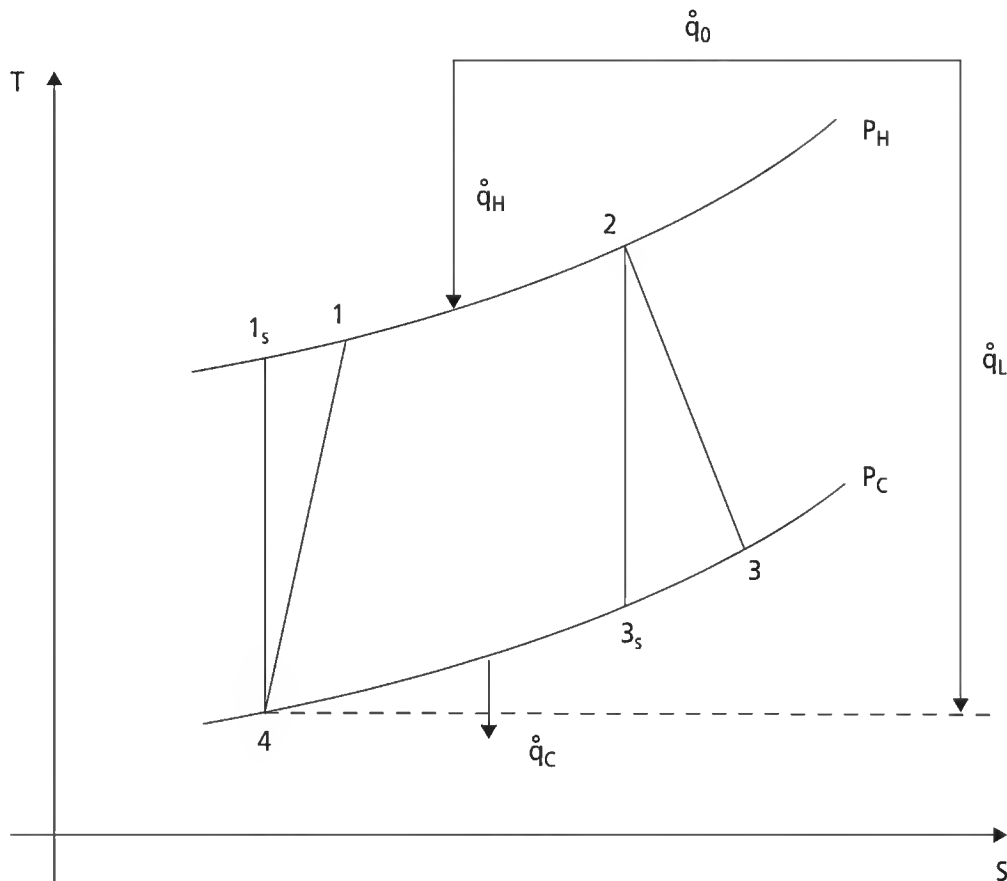
Figure 16.31

mouvement par d'autres dispositifs (moteurs à combustibles solides dans le cas d'Ariane).

D'autres modes de propulsion existent, au moins dans le principe, pour les satellites : propulseur à plasma, ou ionique.

- Un modèle de turbine en circuit ouvert selon la thermodynamique en dimensions finies

La figure 16.32 représente le cycle fermé équivalent, avec pertes thermiques  $\dot{q}_L$  (non-adiabacité).



**Figure 16.32** Cycle fermé équivalent à une turbine à gaz aéronautique (sans régénération).

La résolution du problème conduit :

- cas 1 : à un maximum de puissance mécanique, à puissance thermique disponible imposée. Le modèle fournit alors :

$$\dot{w}_{MAX} = \frac{1}{\dot{C} + K_L} \left[ K_L \dot{C} \left( \sqrt{T_M} + \sqrt{T_m} \right)^2 - 2K_L \dot{C} \sqrt{T_M T_m} \left( \frac{1}{\sqrt{S}} - 1 \right) - \dot{C}^2 T_m \left( \frac{1}{\sqrt{S}} - 1 \right) \right]$$

$\dot{C}$ , débit calorifique de la turbine  $= \dot{m} C_p$

$T_m = T_4$ , température minimale de cycle (l'ambiance)

$T_M = \frac{\dot{q}_o + K_L T_4}{K_L}$ , température maximale de cycle ( $\dot{q}_o$  lié au PCI du combustible et au débit combustible).

$S = e^{-\frac{\dot{S}_i}{\dot{C}}}$ , facteur entropique

**Remarque :** dans ce cas, l'optimum de puissance correspond aussi à l'optimum de rendement.

– cas 2 : au maximum de puissance à température maximale de cycle imposée :

$$\dot{w}_{MAX} = \dot{C} \left[ T_M - 2\sqrt{\frac{T_M T_m}{S}} + T_m \right]$$

$$\eta \left( \dot{w}_{MAX} \right) = \frac{T_M + T_m - 2\sqrt{\frac{T_M T_m}{S}}}{T_M \left( 1 + \frac{K_L}{2} \right) - \sqrt{\frac{T_M T_m}{S}} - \frac{K_L T_m}{\dot{C}}}$$

**Remarque :** pour cette même température  $T_M$ , il existe un maximum de rendement, qui se produit pour des conditions de fonctionnement différentes.

Le lecteur intéressé peut se référer à un article récent (Feidt M.).

### 16.4.2 Autres moteurs à combustion externe

Il a déjà été dit que le cycle de Brayton pouvait se prêter à une combustion externe. En fait, les moteurs à combustion externe font principalement intervenir deux cycles : le cycle de Stirling déjà rencontré à l'occasion de la production de basses températures, le cycle d'Ericsson.

#### a) Les cycles de Stirling et de Ericsson

##### ► Le cycle moteur de Stirling

La figure 16.33 a représente en diagramme entropique et en diagramme de Clapeyron le cycle de Stirling. Il s'agit ici effectivement d'une machine à cycle fermé.

Ce cycle comporte deux transformations isochores et deux transformations isothermes aux contacts avec la source et le puits.

Le cycle de Stirling peut donner lieu entre les points 1-2, puis 3-4 à une régénération thermique parfaite. En ce sens, ce cycle a, d'un point de vue thermostatique, le même rendement limite que le cycle de Carnot, pour les mêmes températures limites (thermostat chaud et froid).

Cependant, le travail volumique spécifique est supérieur pour le cycle de Stirling par rapport au cycle de Carnot.

#### ► Le cycle moteur d'Ericsson

La figure 16.33.b représente en diagramme entropique et en diagramme de Clapeyron le cycle de Ericsson. Là encore, la machine est une machine fermée.

Ce cycle comporte deux transformations isobares et deux transformations isothermes.

Là encore, il peut y avoir régénération thermique parfaite, et, en conséquence, même rendement limite que le cycle de Carnot pour les mêmes conditions de températures externes.

Toutefois, en pratique, on notera que pour le cycle de Ericsson la régénération thermique se réalise dans un échangeur à contre courant équilibré (comme dans un cycle de Joule) ; c'est une transformation de type continu.

Par contre, de par le principe du cycle de Stirling, la régénération thermique passe par une phase de stockage et déstockage de chaleur sur un échangeur régénérateur : le cycle est foncièrement discontinu.

La matérialisation discontinue du cycle de Ericsson (cycle approché) correspond à une TAC à compression avec refroidissement intermédiaire, puis post-combustion inter-étage en turbine et régénération.

#### ► Comparaison thermostatique des cycles

Entre mêmes thermostats et à mêmes volumes limites (encombrements), les travaux spécifiques volumiques de ces cycles sont dans l'ordre : Stirling > Ericsson > Carnot.

#### b) Réalisations pratiques

Les cycles idéaux précédents supposent des transferts idéaux sans frottements entre les thermostats, un mouvement discontinu des pistons (piston moteur et piston déplaceur), ainsi qu'une régénération parfaite.

Dans les faits, il n'en est rien, la cinématique a son mot à dire ; il existe trois types de cinématique principaux pour le moteur de Stirling. Le système rhomboïdal est illustré sur la figure 16.34 (c'est un système où les deux pistons sont déphasés

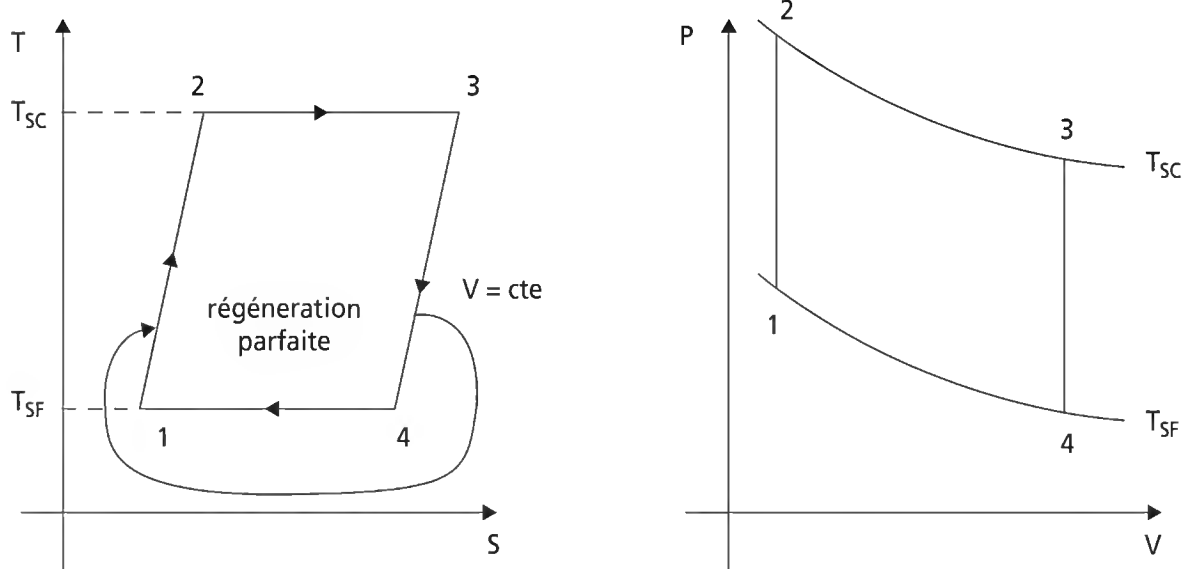
d'environ  $\frac{\pi}{2}$ ).

**Remarque :** ne pas confondre distance min ou MAX entre pistons avec min ou MAX des volumes du fluide de travail.

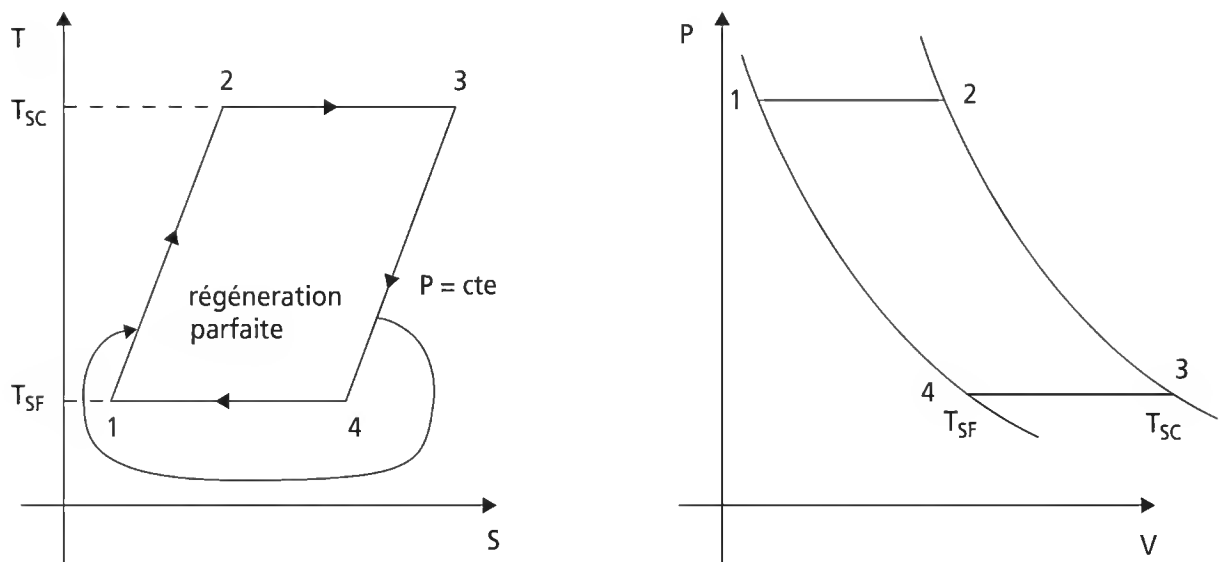
Ce même moteur se prête à la pressurisation (jusqu'à 70 bars).

Le transfert de chaleur à travers la paroi chaude en fait un bon candidat pour les moteurs solaires.

Les moteurs à combustion externe peuvent par ailleurs utiliser tout type de combustible, avec une grande facilité de traitement des effluents.



(a)



(b)

Figure 16.33 Cycles de Stirling (a) et de Ericsson (b)

Toutefois, le moteur de Stirling et de Ericsson nécessite une parfaite maîtrise des transferts de chaleur et des pertes associées. Ce point retient particulièrement l'attention de l'auteur ; des modèles thermodynamiques étudiant cet aspect ont été développés (Feidt M.) et sont encore en développement.

Le lecteur intéressé peut se référer à la thèse suivante soutenue sur le sujet (Costea M.).

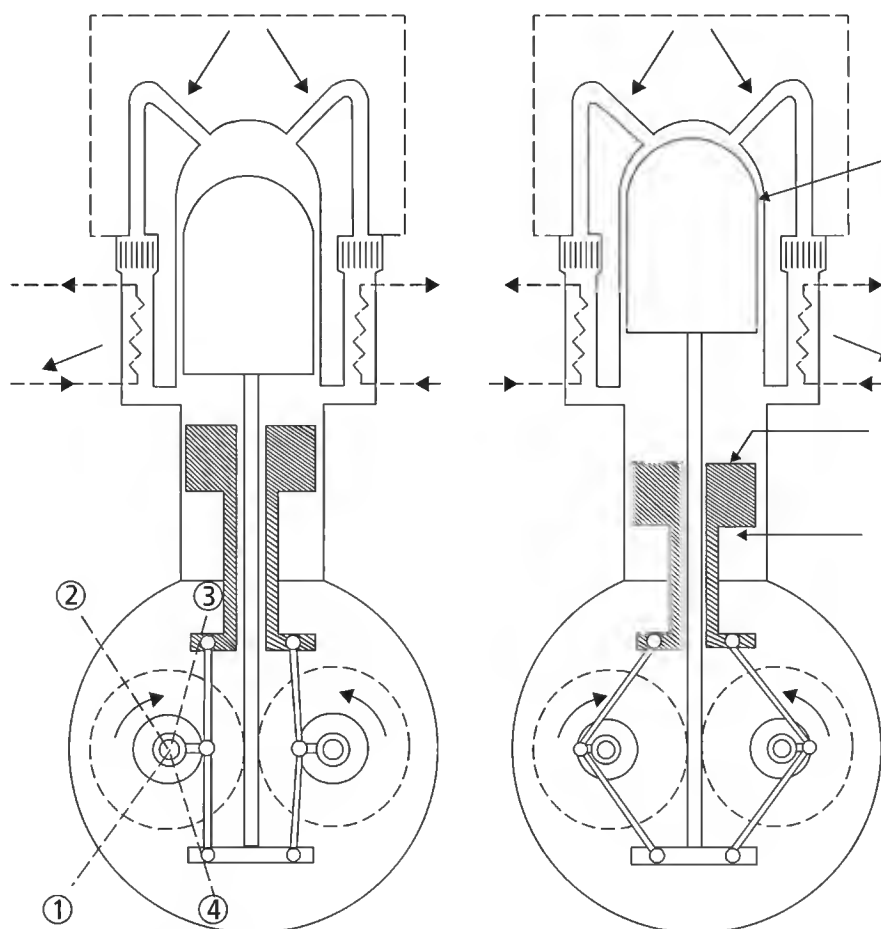


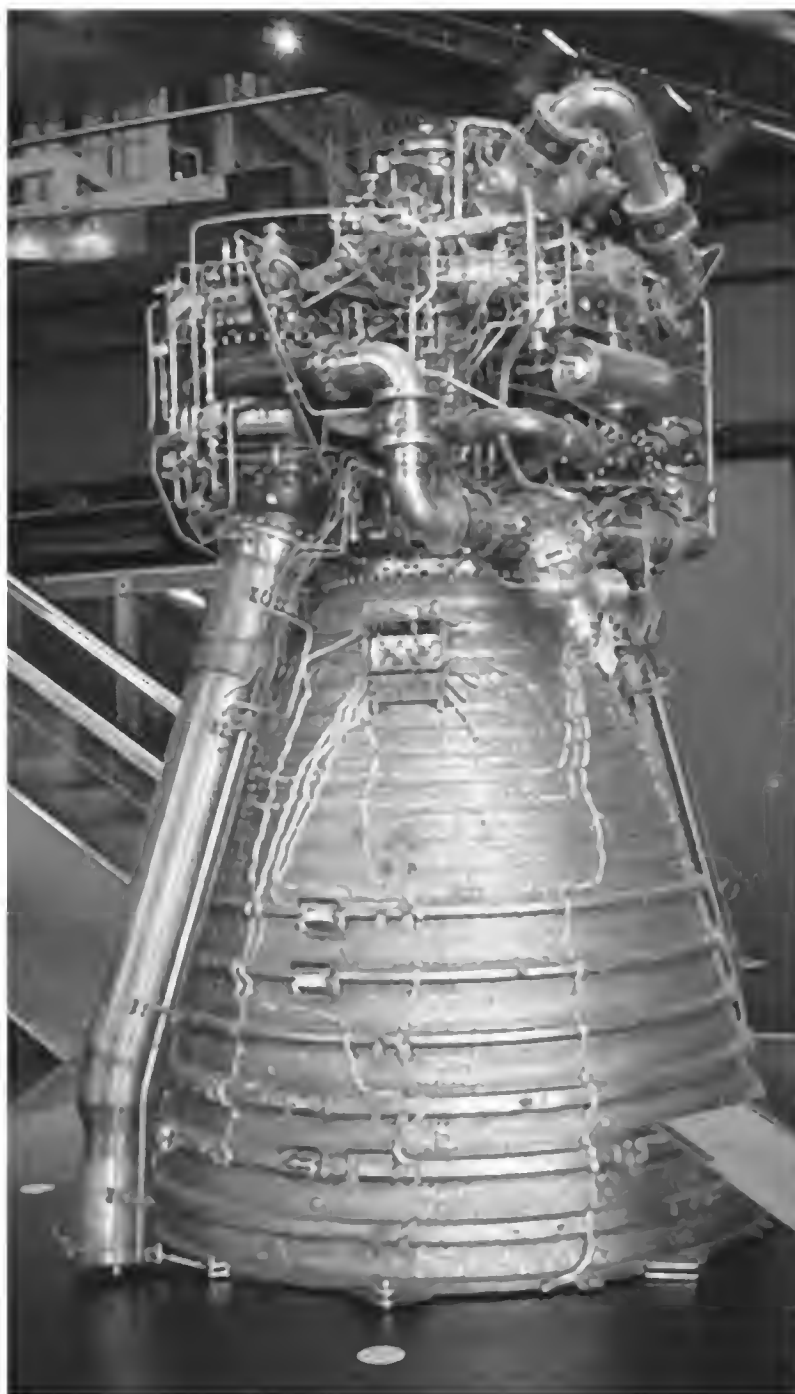
Figure 16.34 Une réalisation d'une machine de Stirling.

## BIBLIOGRAPHIE

- AGRAWAL D.D., GUPTA C.P., Computer program for constant pressure or constant volume combustion calculations in hydrocarbon air system, *Trans. of the ASME*, p. 246-253, April 1977.
- ARQUÈS PH., *Moteurs alternatifs à combustion interne, de la théorie à la compétition*, Ellipses, 1999.
- ARQUÈS PH., *Conception et construction des moteurs alternatifs*, Ellipses, 2000.
- BOREL M., *Les phénomènes d'ondes dans les moteurs*, Éditions Technip, 2000.
- BORGHI R., DESTRIAU M., *La combustion et les flammes*, Éditions Technip, 1995.
- COSTEA M., *Augmentation des performances des échangeurs de chaleur en vue de l'optimisation thermodynamique de la machine de Stirling*, Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy, septembre 1997.
- DESCIEUX D., FEIDT M., *Thermodynamique des moteurs : de la thermostatique à la thermodynamique ; modèles de tendances*, Communication Journée SFT, (Optimisation des moteurs thermiques), Paris, 30 mars 2006.
- DESTRIAU M. et al. *Cinétique et dynamique chimique*, Éditions Technip, 1981.



- FEIDT M., COSTEA M., POSTENICU V., Comparison between the Brayton cycle with imposed thermal input, and with maximum temperature constraint, *Oil and gaz science technology, revue IFP*, Vol. 61, n° 2, 2006, en cours de parution.
- FEIDT M., LE SAOS K., COSTEA M., PETRESCU M., Optimal allocation of HEX inventory associated with fixed power or fixed heat transfert rate input, *Int. J. Applied Thermodynamics*, Vol. 5, n° 1, p. 25-36, 2002.
- FEIDT M., Optimisation d'un cycle de Brayton moteur en contact avec des capacités thermiques finies, *Rev. Gén. Therm.*, n° 418-419, p. 662-666, 1996.
- GUIBET J.-C., *Carburants et moteurs. Énergie. Environnement*, Éditions Technip, Tomes 1 et 2, 1997.
- GUILLET R., *Du diagramme hygrométrique de combustion aux pompes à vapeur d'eau : un nouveau regard sur la combustion et ses applications énergétiques*, Elsevier, 1998.
- PLUVIOSE M., *Conversion d'énergie par turbomachine, génie énergétique*, Ellipses, 2005.
- Techniques de l'Ingénieur, Moteurs*, Tome BL1.



## Chapitre 17

# La vapeur d'eau

### 17.1 INTRODUCTION

L'eau sous forme de vapeur est un fluide disponible aisément vu l'abondance de ce corps dans notre environnement, particulièrement sous forme liquide. De plus, ses propriétés thermophysiques en font un fluide privilégié pour les applications (chapitre 6).

Dans le présent chapitre, seront examinées successivement la production de la vapeur et son utilisation industrielle en tant que fluide thermique, mais aussi comme vecteur de production de force motrice.

La production naturelle de vapeur et la présence d'eau dans de nombreux produits conduiront à la considération de l'air humide (paragraphe 17.3) et des diverses applications qui y sont liées (conditionnement d'air, séchage, humidification).

### 17.2 PRODUCTION ET UTILISATION DE LA VAPEUR D'EAU

#### 17.2.1 Production de la vapeur d'eau

##### *a) Les diagrammes de l'eau pure*

Les principales propriétés physiques de l'eau ont été données au paragraphe 6.5.2.a. On se contentera de rappeler ici que le cyclage de ce fluide suppose de travailler entre le point triple ( $t_T = 0,01\text{ °C}$  ;  $P_T = 0,6113\text{ kPa}$ ) et le point critique ( $t_k = 374,1\text{ °C}$  ;  $P_k = 2,209\text{ }10^4\text{ kPa}$  ;  $v_k = 3,155\text{ m}^3/\text{kg}$ ) si on veut bénéficier du changement de phase liquide-vapeur dans des conditions simples.

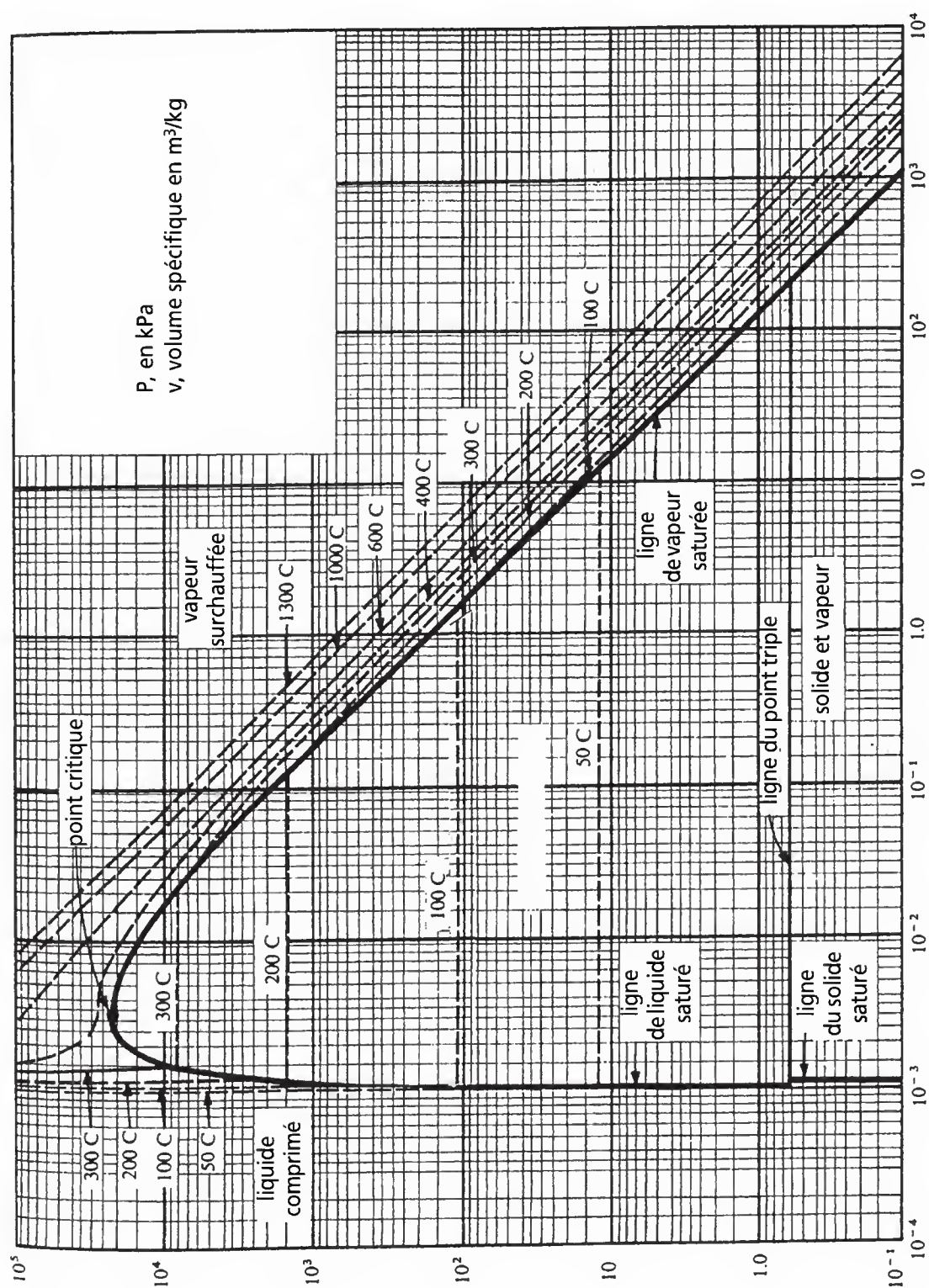


Figure 17.1 Diagramme pression-volume spécifique pour l'eau.

La figure 17.1 présente les points d'état de l'eau pure sous forme log-log dans le diagramme de Clapeyron ( $P, V$ ), mais ce diagramme n'est pas le diagramme courant utilisé par les chaudiéristes et turbiniers : ceux-ci préfèrent le diagramme de Mollier ( $h, s$ ) de l'eau. Ce diagramme est proposé dans l'annexe 4 des diagrammes thermodynamiques. Il serait aussi possible d'utiliser un diagramme  $\ln p, h$  (comme les frigoristes).

Les diagrammes sont très utiles pour l'avant-projet et la détermination rapide de propriétés. Néanmoins, la généralisation des moyens de calcul informatique permet l'usage de méthodes numériques ; la question posée alors est le compromis entre la précision des déterminations et le coût et la durée des calculs. Pour les besoins en calculs rapides et accessibles (bureau d'études, contrôle-commande), on préconise l'usage de calcul à partir d'équations analytiques tronquées, mais préservant une bonne précision numérique. Ainsi, pour les propriétés de la vapeur surchauffée, essentielles pour les systèmes étudiés ci-après, (Fernandes J.L.M.) a proposé une méthode sur la base d'une équation d'état cubique.

► Propriétés de la vapeur surchauffée à partir d'une équation d'état cubique

Les propriétés de la vapeur d'eau surchauffée sont évaluées à partir de l'équation d'état cubique sous forme réduite :

$$P_r = T_r \rho_r \left[ 1 + \left( C_1 + \frac{C_2}{T_r^\alpha} + \frac{C_3}{T_r^\beta} + \frac{C_4}{T_r} \right) \rho_r + \left( C_5 + \frac{C_6}{T_r^\delta} + \frac{C_7}{T_r^\gamma} + \frac{C_8}{T_r} \right) \rho_r^2 \right]$$

Les variables sont réduites par rapport à  $T_c$ , température critique,

$$R = 0,4615 \text{ kJ/kgK}, RT_c \text{ et } \frac{RT_c}{P_c}.$$

Le domaine d'usage est de 0,2 kPa à 20 Mpa pour la pression, 20 °C à 600 °C (800 °C) pour la température.

L'ajustement des coefficients permettant une précision de 1 % conduit à :

$$\alpha = 0,562 ; \beta = 4,200 ; \delta = 4,970 ; \gamma = 9,220 ;$$

$$C_1 = 0,1005 ; C_2 = 0,2159 ; C_3 = -0,1640 ; C_4 = 0,5112 ;$$

$$C_5 = 6,8288 \cdot 10^{-2} ; C_6 = 0,1001 ;$$

$$C_7 = -2,4412 \cdot 10^{-2} ; C_8 = -9,7556 \cdot 10^{-2}$$

L'ensemble des propriétés surchauffées est obtenu par intégration à partir de la saturation ( $P, h, s$ ) avec une précision de l'ordre de 1 % ; cela suppose pour  $h, s$  de connaître  $C_v(T_r, \rho_r)$  à la précision de 3,5 % :

$$C_{v_r}(T_r, \rho_r) = \frac{C_{v_r}(T_r)}{R} - \left[ \frac{\alpha(\alpha-1)}{T_r^\alpha} C_2 + \frac{\beta(\beta-1)C_3}{T_r^\beta} \right] \rho_r - \left[ \frac{\delta(\delta-1)C_6}{2T_r^\alpha} + \frac{\gamma(\gamma-1)C_7}{2T_r^\gamma} \right] \rho_r^2$$

avec  $C_{v_o}(T_r) = -5,3290 \cdot 10^{-2} T_r^3 + 0,3189 T_r^2 - 6,7331 \cdot 10^{-2} T_r + 1,3710$ , à la précision de 1 %.

### b) Vapeur et chaudière

#### ➤ Description d'une chaudière industrielle

Les réalisations technologiques pour la production de vapeur se font dans les chaudières ; on focalise ici la description sur les chaudières industrielles. On distinguera diverses réalisations selon les combustibles :

- les chaudières à combustibles classiques (charbon, mazout, gaz) ;
- les chaudières à récupération ;
- les chaudières nucléaires.

**Remarque :** il existe aussi des chaudières de niche comme les chaudières pour liqueurs de papeterie ou les chaudières pour déchets.

La figure 17.2 présente un exemple de chaudière de centrale thermique pour la production d'électricité.

#### *Le foyer*

L'élément principal de la chaudière est le foyer, là où se produit la combustion par mise en contact du combustible avec le comburant, de l'air (air primaire).

#### *Le circuit d'air*

La figure 17.3 représente le schéma des circuits de la chaudière, en particulier de l'air comburant.

On voit sur le schéma la présence d'un circuit d'air secondaire et de recyclage des fumées ; ces circuits permettent un réglage des allures de chauffe.

Le reliquat des fumées est envoyé vers la cheminée, mais en passant par un échangeur de chaleur qui permet le réchauffage de l'air (RA) ; éventuellement, il peut y avoir un préchauffeur d'air (PRA).

#### *Le circuit des fumées*

Ce circuit va du foyer à l'aval de la combustion jusqu'à la cheminée ; la température des fumées (chaleur sensible) décroît constamment du foyer jusqu'au rejet atmosphérique.

Ce rejet fait intervenir une dispersion dans l'environnement, d'où divers traitements (du dépoussiérage jusqu'à la captation partielle de  $\text{CO}_2$  : chapitre 19). La cheminée doit avoir une hauteur permettant par ailleurs un tirage adéquat.

Les cheminées se présentent pour ce faire sous forme monoconduit ou multiconduits avec des parois multiples ; les matériaux ont évolué de la brique au béton, puis la tôle.



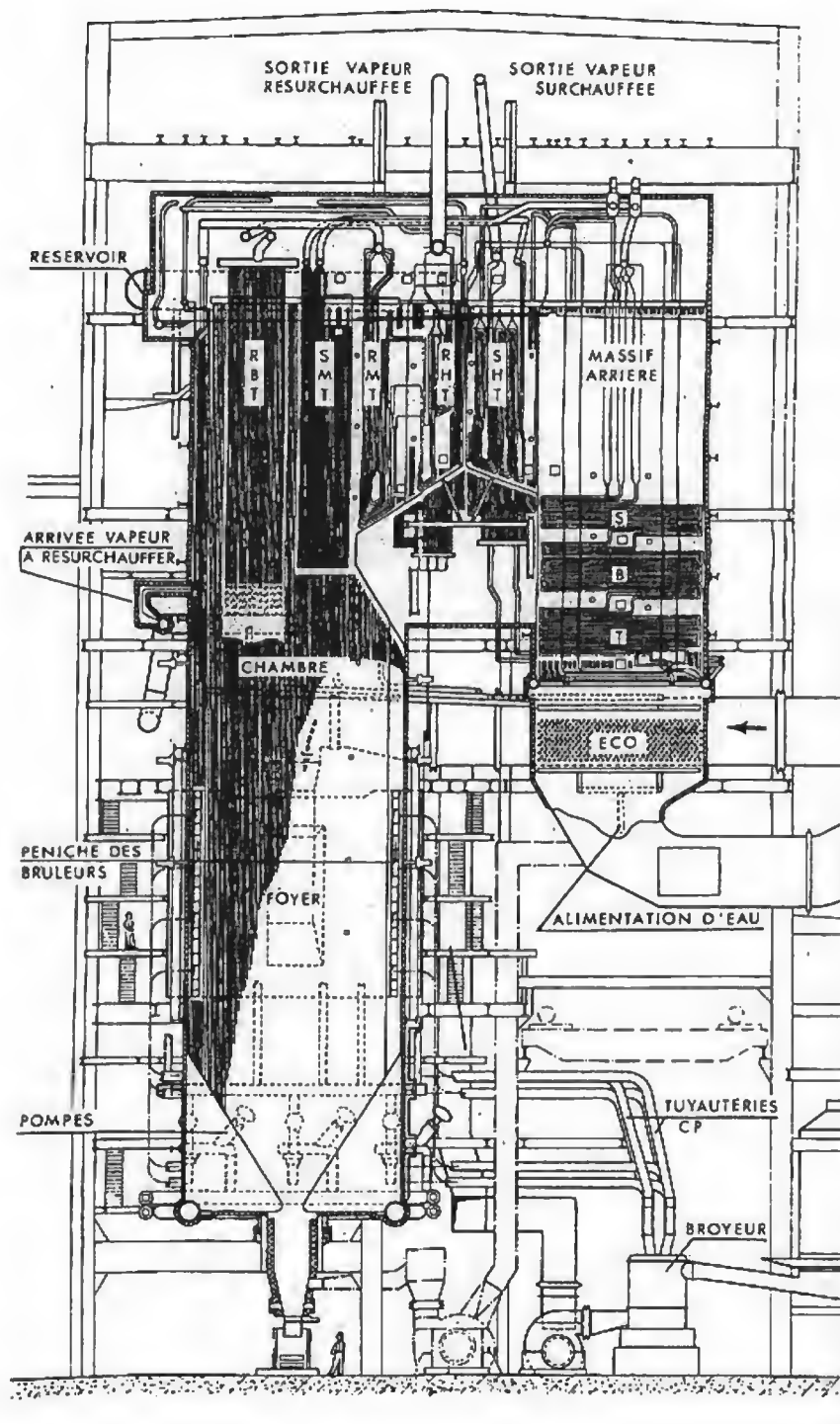


Figure 17.2 Chaudière de centrale thermique, un exemple.

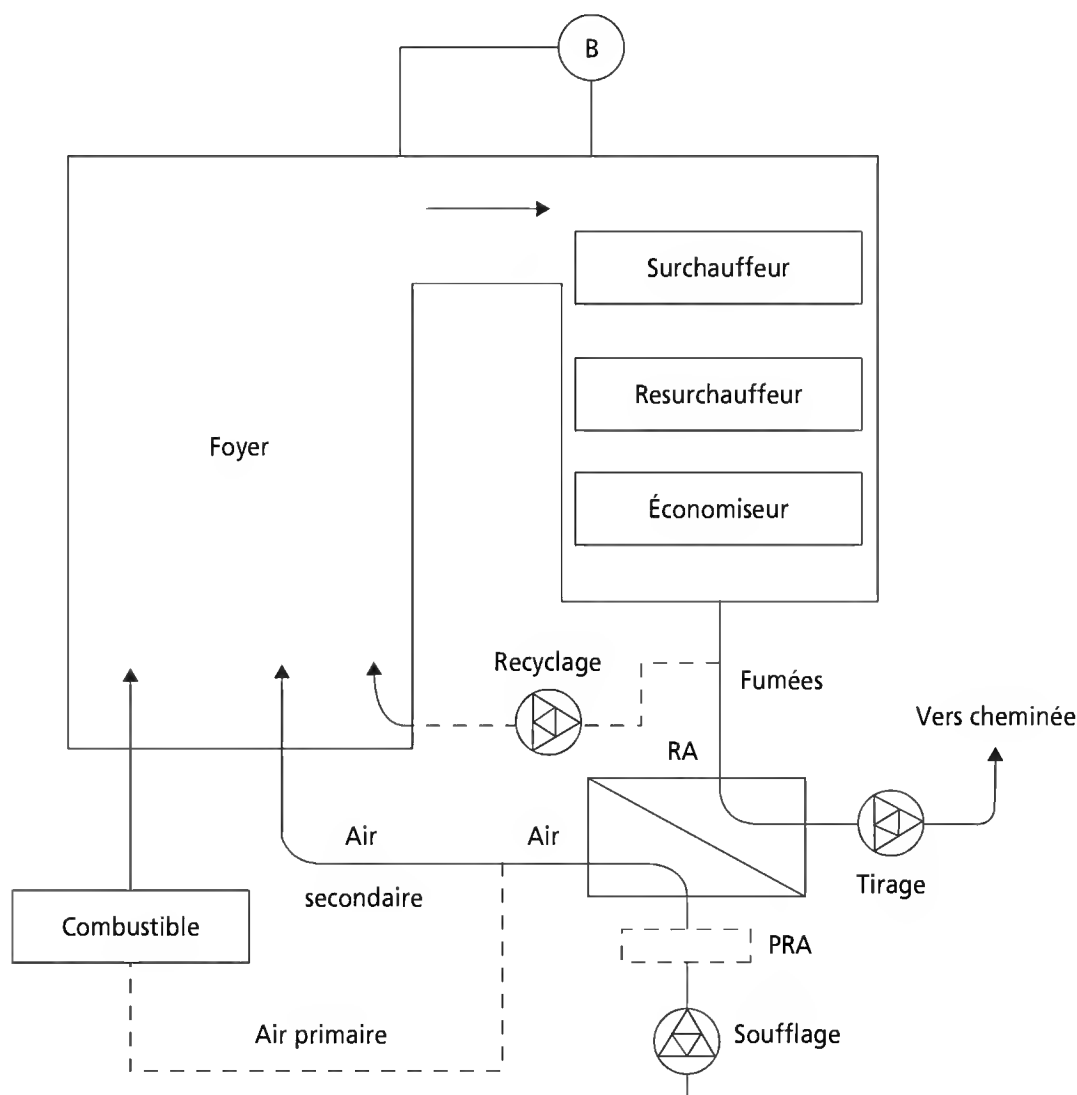


Figure 17.3 Schéma des circuits en chaudière.

**Remarque :** le circuit des fumées nécessite aussi une conception adéquate pour permettre un nettoyage facile (encrassement par les suies) ; des précautions doivent aussi être prises quant aux températures de parois, pour éviter la condensation acide (corrosion).

### Le circuit de l'eau

Ce circuit fait apparaître de nombreux échangeurs donnant lieu à de nombreuses variantes et optimisation (voir chapitre 19). On se contente de présenter ici les fonctions de ces échangeurs sans entrer dans le détail des configurations. Dans l'ordre d'apparition pour l'eau, on notera :

- l'économiseur qui permet un réchauffage de l'eau liquide ;
- le bouilleur B : il comporte un ballon où existe à la pression donnée, à la température de saturation un mélange liquide-vapeur maintenu en température par circulation naturelle ou forcée ;



- le surchauffeur : il est à l'aval du dispositif de séparation de la vapeur d'avec le liquide, mais généralement en amont par rapport aux fumées pour disposer du meilleur potentiel thermique. Le surchauffeur produit une vapeur surchauffée sèche, qui peut être envoyée en entrée de turbine à vapeur ;
- les re-surchauffeurs : ces échangeurs éventuels ont aussi pour but par contact avec les fumées de relever le potentiel enthalpique (thermique) des vapeurs.

L'eau utilisée dans les circuits subit des traitements qui ne seront pas développés ici ; il est par ailleurs important de dégazer l'eau, la présence d'incondensables étant néfaste au fonctionnement (chute des transferts thermiques et donc d'efficacité).

### Épaisseurs de parois

Le circuit d'eau est soumis à une pression interne forte (potentiellement 200 bars) ; aussi, il existe des règlements et codes précis pour le dimensionnement des corps cylindriques et des tubes (AFNOR-APAVE en France, ASME aux États-Unis). Ainsi, l'épaisseur minimale d'un corps cylindrique est donnée par :

$$e \leq \frac{PR_i}{\sigma_{zs} - 0,5p}$$

$P$ , pression relative dans le corps

$R_i$ , rayon intérieur du corps

$\sigma$ , contrainte nominale du matériau de paroi

$z$ , coefficient de résistance relative (selon la norme ; dépend des orifices en paroi)

$s$ , coefficient de résistance relative des joints soudés.

Pour l'épaisseur minimale de tube, il vient :

$$e \leq \frac{P.D_e}{2\sigma + P}$$

$D_e$ , diamètre extérieur du tube.

**Remarque 1 :**  $\sigma$  est fortement dépendant du niveau de température.

**Remarque 2 :** les deux expressions précédentes sont à rapprocher de celle

déduite de la résistance des matériaux :  $e \leq \frac{P.D}{2\sigma}$ .

### c) Rendement thermique de chaudière

#### ► Méthode globale de détermination

Le rendement thermique d'une chaudière  $\eta_{ch}$  (ou d'une chaufferie) est défini comme étant le rapport de la quantité de chaleur utile délivrée, sur la quantité de chaleur consommée ; en régime dynamique stationnaire, il vient :

$$\eta_{ch} = \frac{q_u}{q_d}$$

$\overset{o}{q}_u$ , puissance calorifique utile

$\overset{o}{q}_d$ , puissance calorifique dépensée.

On note que :

$$\overset{o}{q}_u = \overset{o}{m}_e (h_v - h_e)$$

$$\overset{o}{q}_d = \overset{o}{m}_{comb} . PCI$$

$\overset{o}{m}_e$ , débit d'eau cyclé

$h_v, h_e$ , enthalpie de la vapeur produite, et de l'eau d'alimentation de chaudière

$\overset{o}{m}_{comb}$ , débit de combustible de PCI connu.

**Remarque :** ce rendement ignore la présence d'auxiliaires tels que les ventilateurs de soufflage, tirage et recyclage.

#### ► Méthode des pertes séparées

Cette méthode s'appuie sur le bilan calorifique de chaudière, qui est tel que :

$$\overset{o}{q}_d = \overset{o}{q}_u + \overset{o}{q}_p$$

$\overset{o}{q}_p$ , flux des pertes.

On estime alors les divers postes de pertes thermiques ; ceux-ci sont :

- les pertes par imbrûlés (voire combustion) et par les suies ; ces pertes peuvent apparaître dans les cendres et résidus et les fumées ;
- les pertes par conduction convection et rayonnement thermiques ;
- les pertes par la cheminée : chaleur sensible des fumées, chaleur latente de la vapeur d'eau produite par combustion ;
- les pertes par purge (eau perdue de la chaudière) ;
- autres pertes (pertes organiques de la chaufferie).

De façon générale, on notera  $\overset{o}{q}_p = \sum_i \overset{o}{q}_{pi}$ , de sorte que :

$$\eta_{ch} = 1 - \frac{\sum_i \overset{o}{q}_{pi}}{\overset{o}{q}_d}$$

La méthode des pertes séparées est une méthode plus fine que la méthode globale, mais plus longue et délicate de mise en œuvre.

#### d) Quelques applications thermiques : la vapeur

La vapeur est un fluide industriel dont l'utilisation en réseau est très développée ; on citera ici tout particulièrement les utilisations dans le domaine agroalimentaire pour des opérations de blanchiment et pasteurisation. Pour ce faire, il existe des chaudières spécialement adaptées à la production de vapeur : les générateurs de vapeur.

Ils sont généralement plus compacts que les chaudières classiques à capacité égale ; leurs capacités sont aussi moindres (100 à 10 000 kg/h) de même que leur pression (2 à 20 bars). Ces générateurs sont de fait sous-critique bien que des générateurs sur-critiques soient réalisables.

**Remarque :** la vapeur est utilisée aussi en cuisson (cuisson à la vapeur et auto-cuisson).

D'autres utilisations dans des procédés spécifiques existent ; on citera à titre d'exemple la récupération thermique de pétrole dans des gisements d'accès difficiles, par injection de vapeur.

### 17.2.2 Utilisation de la vapeur d'eau comme force motrice

L'utilisation de la vapeur est encore dominée par la production de force motrice.

#### a) Les cycles moteurs à vapeur

##### ► Du cycle de Carnot au cycle de Hirn

Le cycle à fluide condensable moteur ou direct idéal utilise des fluides à changement de phase (vaporisation et condensation isobares et isothermes pour les fluides purs), complété par deux transformations isentropiques (régénération mécanique parfaite). Toutefois, le cycle de Carnot se heurte à des impossibilités techniques : le système moteur de base utilisant la vapeur d'eau nécessite un générateur de vapeur (paragraphe 17.2.1), puis une turbine à vapeur, suivie d'un condenseur. Le retour du fluide liquide vers la chaudière se fait par l'intermédiaire d'une pompe (figure 17.4).

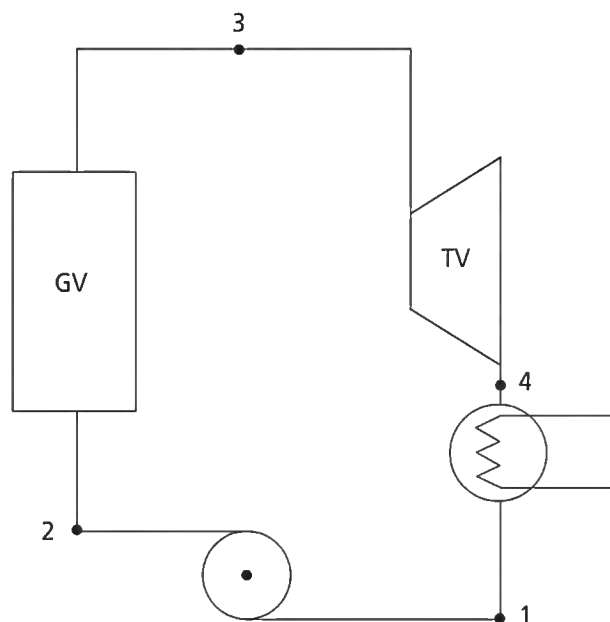
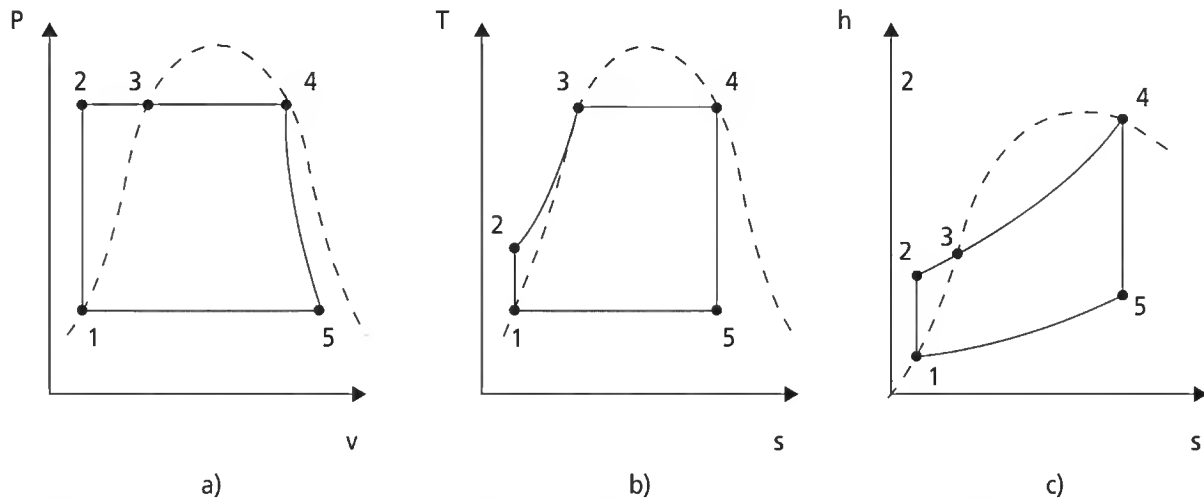


Figure 17.4 Schéma d'un système moteur à turbine à vapeur.

### Cycle de Rankine

De ce fait, le cycle de Carnot devient un cycle de Rankine, dont la représentation dans divers diagrammes est faite sur la figure 17.5.



**Figure 17.5** Cycle de Rankine a) dans le diagramme de Clapeyron b) dans le diagramme entropique ( $T, s$ ) c) dans le diagramme de Mollier ( $h, s$ )

Le cycle de Rankine diffère du cycle de Carnot par la compression isentropique sur le liquide, suivie d'une transformation isobare de chauffage ou chaleur sensible. Si on suppose alors les variations de vitesse des fluides négligeables et la turbine et pompe adiabatiques, la puissance nette en régime dynamique stationnaire s'écrit :

$$\dot{W}_{\text{net}} = \dot{W}_{\text{turbine}} - \dot{W}_{\text{pompe}} \quad \text{ou} \quad \dot{W}_{\text{net}} = \dot{Q}_D - \dot{Q}_{\text{condenseur}}.$$

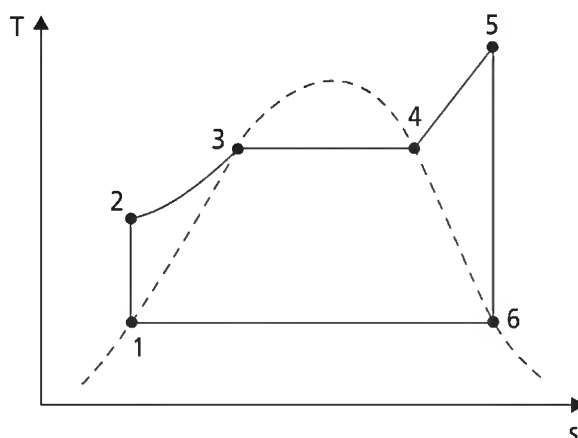
**Remarque :** les puissances mises en jeu pour le pompage du liquide restent faibles en comparaison de la puissance de turbine.

### Cycle de Hirn

L'inconvénient principal du cycle de Rankine provient de la détente isentropique 4-5 dans le domaine diphasique ; cette détente correspondant à une marche en régime humide est sujette à des limitations technologiques (érosion d'aube si le titre en vapeur s'éloigne trop de la saturation vapeur :  $x < 1$ ).

Pour obtenir en sortie de turbine une vapeur saturée ( $x = 1$ ), Hirn a proposé d'introduire en turbine à vapeur une vapeur surchauffée. Celle-ci est produite en surchauffant la vapeur saturée extraite du bouilleur, dans l'échangeur supplémentaire surchauffeur (transformation 4-5 de la figure 17.6).

Le tableau 17.1 donne pour diverses pressions d'admission en turbine et en l'absence de pertes de pression l'évolution du rendement théorique de cycle, en fonction du niveau de température de surchauffe. La pression basse est de 0,05 bar (température de condensation 32,5 °C). On voit que le gain en rendement augmente lorsque la température de surchauffe augmente.

Figure 17.6 Cycle de Hirn dans le diagramme  $(T, s)$ .

**TABLEAU 17.1** RENDEMENT THÉORIQUE DE CYCLE EN FONCTION DU NIVEAU DE TEMPÉRATURE DE SURCHAUFFE ( $T_{\text{cond}} = 32,5\text{ °C}$ ), POUR DIVERSES PRESSIONS HAUTES.

Pression admission Bar	Température de surchauffe °C					
	300	350	400	450	500	550
50	0,369	0,375	0,382	0,388	0,394	0,403
100	....	0,399	0,405	0,412	0,420	0,428
150	....	0,404	0,414	0,424	0,432	0,439
200	....	....	0,417	0,429	0,438	0,446

Ce tableau montre que, à même température, le rendement de cycle augmente avec l'augmentation de pression.

En conclusion, les conditions d'admission en turbine doivent être telles que  $T$  et  $P$  soient aussi hautes que possibles. Les niveaux de température actuels sont voisins de 1 000 K (les superalliages à base de Ni visent 700 °C).

### ► Cycle supercritique

Une autre façon d'améliorer les performances est de concevoir des cycles supercritiques pour lesquels  $P > 218$  bars. Un exemple de cycle à vapeur supercritique est donné sur la figure 17.7.

Il faut faire attention au titre vapeur en basse pression (B.P.) et aux contraintes mécaniques (voire thermomécaniques) : actuellement, les limitations imposées par les matériaux voisinent 700 °C. Le tableau 17.2 fournit des exemples de réalisation récents utilisant l'eau supercritique.

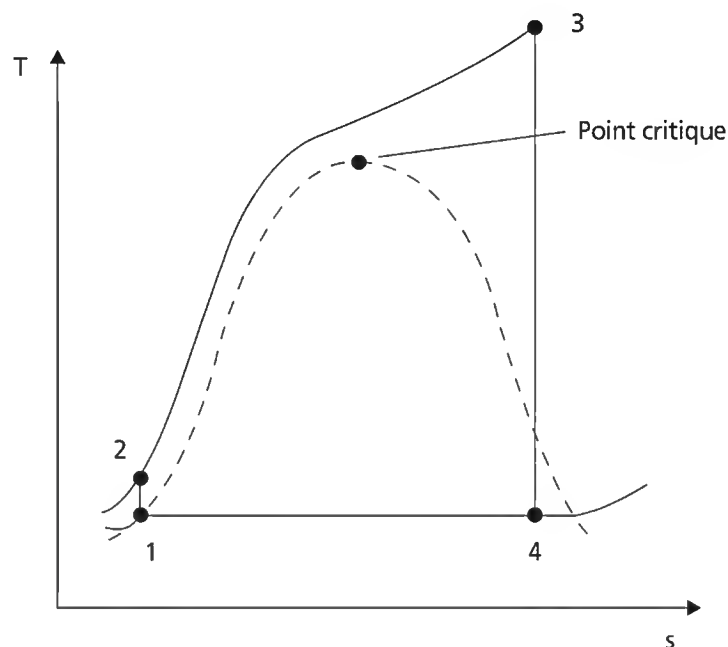


Figure 17.7 Cycle à vapeur d'eau supercritique.

TABLEAU 17.2 EXEMPLES RÉCENTS DE RÉALISATION AVEC DE L'EAU SUPERCRITIQUE.

Réalisation	Schaerbacck	Avedere	SchwarzPumpe	Sippendorf
	Danemark		Allemagne	
Puissance brute MW	400	530	800	900
Pression haute bar	290	300	–	268
Température haute °C	582	580	545	554
Température de ressurchauffe °C	580-580	600	565	583
Année de mise en fonctionnement	1997	2000	1998	2000

**Remarque :** une autre façon d'améliorer le rendement est de diminuer la pression B.P. (si possible) par usage d'éjecteur ou de pompe à vide.

#### ► Cycle à ressurchauffe

En sortie de l'ensemble turbine, un titre avec 7 à 10 % de liquide au maximum est autorisé. Pour éviter de pénétrer dans le domaine diphasique, l'usage d'une détente fractionnée couplée à une ressurchauffe permet de relever en isobare le niveau de température de la vapeur surchauffée, avant détente dans l'étage suivant. La figure 17.8 représente en diagramme  $T, s$  un cycle à une ressurchauffe.

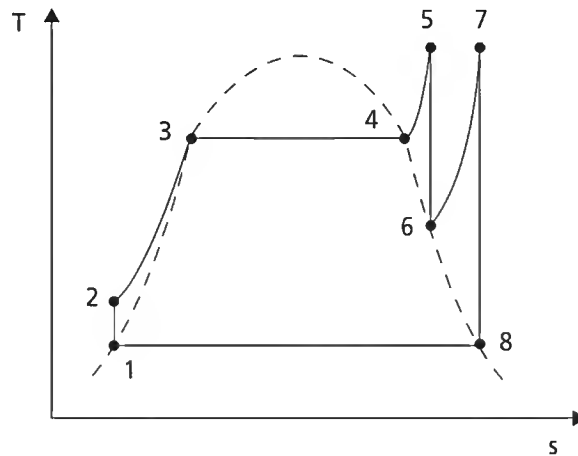


Figure 17.8 Cycle à ressurchauffe en diagramme  $(T, s)$ .

Les turbines de centrales ayant trois corps (HP, MP, BP), on utilise le plus souvent deux ressurchauffes.

### ► Cycles à régénération ou soutirages

#### *Cycle à régénération thermique*

Le cycle à régénération thermique suppose un transfert de chaleur du fluide se détendant, vers le même fluide en cours de compression. Le rendement de ce cycle à régénération thermique serait dans le principe identique à celui de Carnot, mais il est très difficile à réaliser en pratique.

#### *Cycles à soutirages*

Aussi on préfère réaliser des soutirages de vapeur entre deux étages. La figure 17.9 représente un schéma d'une installation à TV à trois corps avec deux soutirages entre chaque corps. Le soutirage représenté est un soutirage avec mélangeage M, installation la plus simple techniquement. Il est aussi possible de réaliser des soutirages sans mélangeage (avec échangeur de chaleur).

#### *Autres variantes de cycles*

Elles sont très nombreuses et certaines seront explorées au chapitre 19 (cycles combinés). On se contentera d'ajouter ici que si l'on veut valoriser la chaleur fatale au condenseur (cogénération), l'utilisation d'un cycle à contrepression est utile : l'augmentation de pression au condenseur permet de valoriser la chaleur, au détriment du rendement thermomécanique.

#### *b) Les turbines à vapeur*

La figure 17.10 présente une coupe longitudinale d'une turbine de centrale thermique.



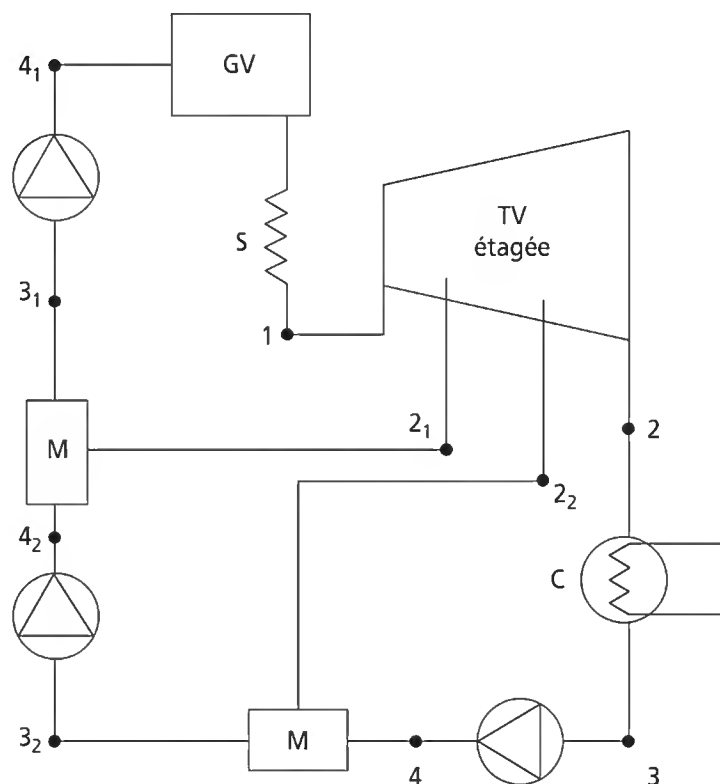


Figure 17.9 Schéma d'une installation à 2 soutirages avec mélangeage.

### ► Principe de base

La vapeur acquiert une certaine vitesse en se détendant dans des orifices statiques (fixes) appelés tuyères. Ce sont des orifices coniques ou convergent-divergent si la vitesse d'écoulement est supersonique. Leurs sections sont parfaitement calibrées et leurs surfaces parfaitement polies.

La vapeur traverse ensuite la partie mobile de la turbine : le rotor (figure 17.11).

La partie où circule la vapeur dans la turbine est appelée veine vapeur ; la veine vapeur est déviée dans les aubages mobiles (ailettes) implantées à la périphérie du rotor. Ce processus de mise en mouvement de la vapeur peut se produire en une ou plusieurs fois dans des tuyères fixes et aubages mobiles successifs. La turbine sera dite simple ou multiple.

On donne ci-après les principaux coefficients relatifs aux tuyères et aux diffuseurs.

#### *Coefficients relatifs aux tuyères (figure 17.12)*

Rendement d'une tuyère :

$$\eta_T = \frac{\text{énergie cinétique réelle à la sortie de tuyère}}{\text{énergie cinétique pour un écoulement isentropique à la même pression de sortie}}$$



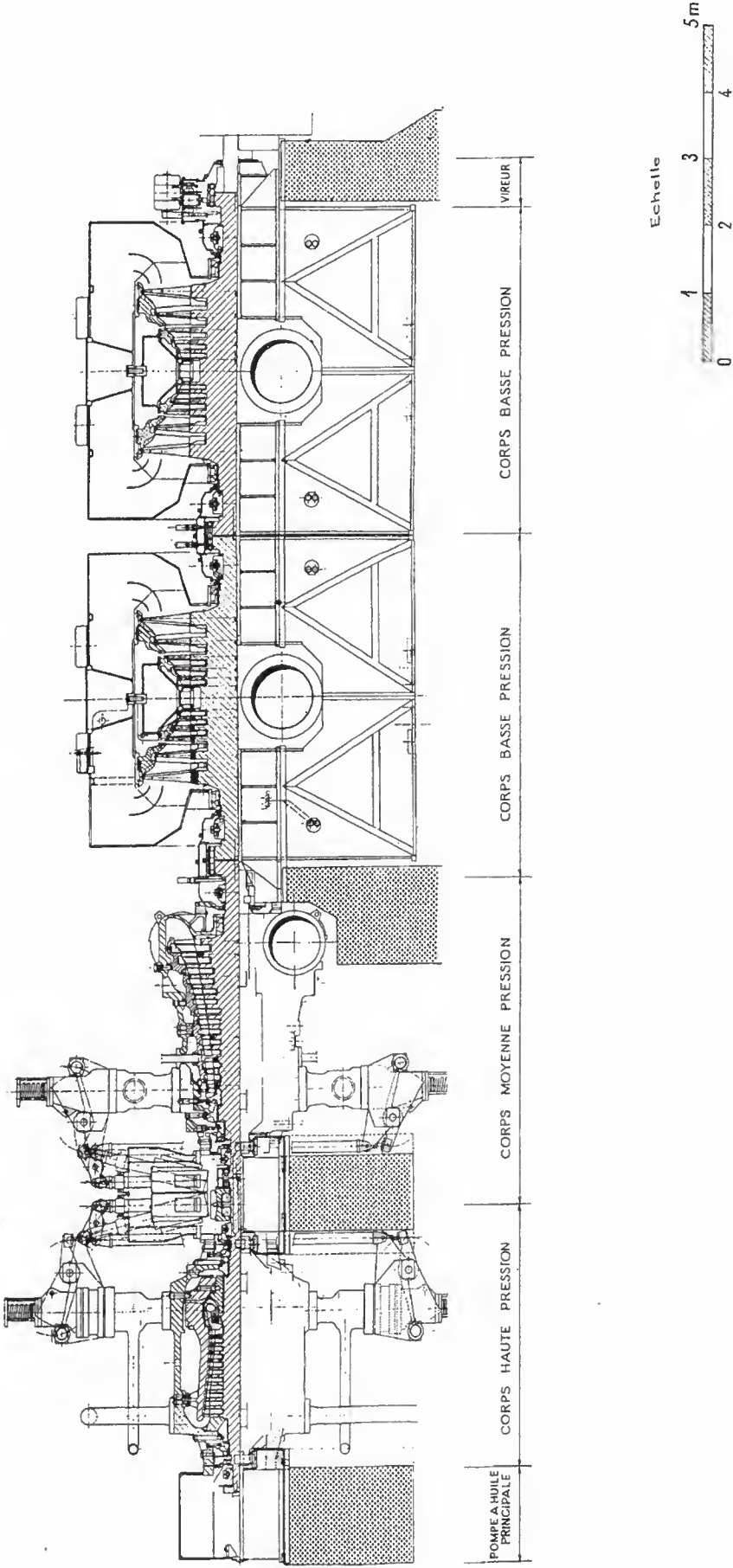


Figure 17.10 Coupe d'une turbine

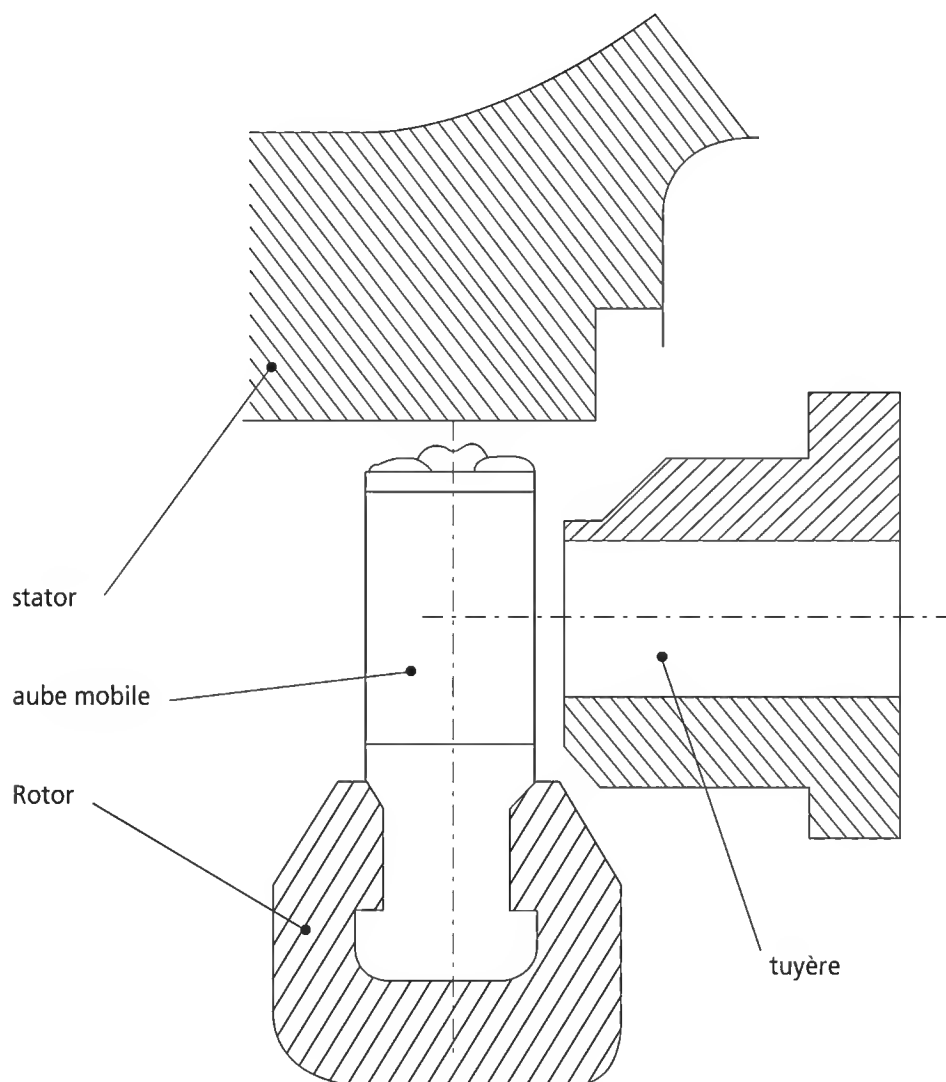


Figure 17.11 Motif élémentaire de turbine à vapeur.

Les irréversibilités sont surtout dues à l'effet de frottement dans la couche limite.

Coefficient de vitesse :

$$C_v = \frac{\text{vitesse réelle à la sortie de tuyère}}{\text{vitesse pour un écoulement isentropique à la même pression de sortie}}$$

$$C_v = \sqrt{\eta_T}$$

Coefficient de débit :

$$C_D = \frac{\text{débit masse réel}}{\text{débit masse de l'écoulement isentropique}}$$

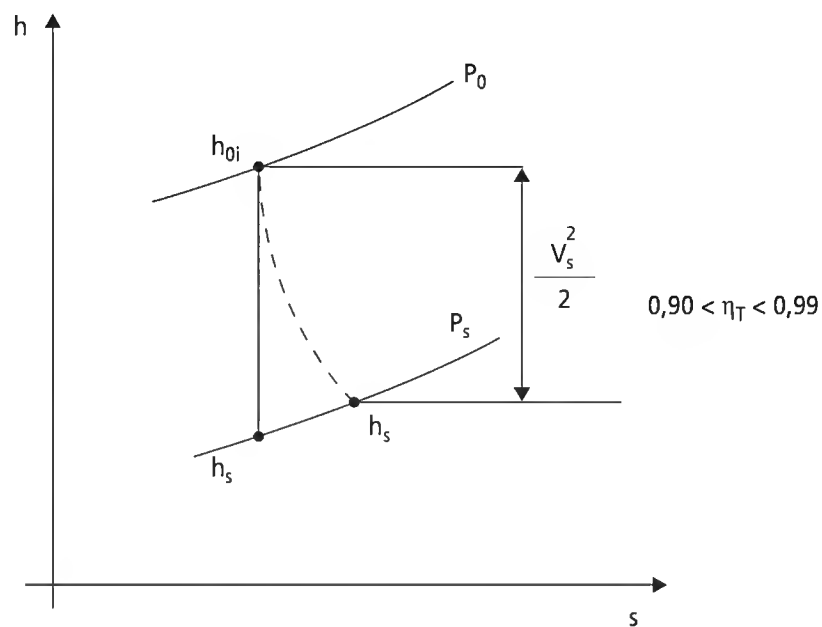


Figure 17.12

Rendement d'un diffuseur (figure 17.13)

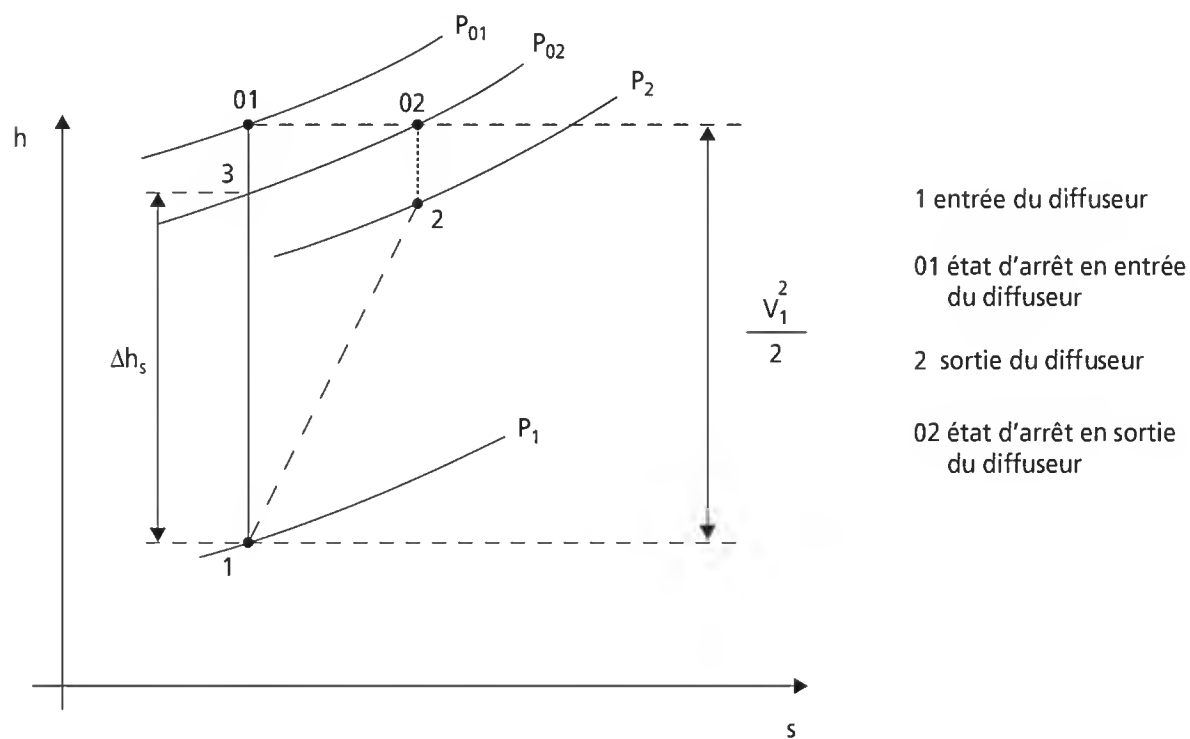


Figure 17.13

$$\eta_D = \frac{\Delta h_s}{V_{1/2}^2} = \frac{h_3 - h_1}{ho_1 - h_1} = \frac{h_3 - h_1}{ho_1 - h_1}$$

$$\text{Pour GP : } \eta_D = \frac{T_3 - T_1}{To_2 - T_1} = \frac{T_3 - T_1}{V_1^2 / 2Cp_o}$$

Après calcul, il vient :

$$\eta_D = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{Po_2}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{\frac{k-1}{2} M_1^2}$$

### ► Principaux types de turbines à vapeur

#### *La turbine élémentaire à action (figure 17.14)*

Lors de son passage dans la tuyère, la vapeur subit une chute de pression et de température, mais acquiert une vitesse,  $W$ , en sortie.  $U$  est la vitesse périphérique de la roue (vitesse d'entraînement).

On trace ainsi le triangle de vitesse :  $W$ ,  $U$ ,  $V_r$  (vitesse relative). Pour un fonctionnement sans chocs, il faut que la direction de  $V_r$  soit tangente au profil de l'aube mobile.

L'aubage mobile est constitué de canaux à section constante, la vapeur qui les traverse conserve sa vitesse relative et sort tangentiellement au profil de sortie des aubes.

#### *La roue double à action (figure 17.15)*

À l'échappement de la roue mobile, la vapeur a encore une composante radiale importante. Il est possible de turbiner cette énergie en disposant une seconde roue mobile et un redresseur :

On a :  $W > W' > W''$ . Le redresseur est fixe. On s'arrange pour avoir la même chute de vitesse dans les deux roues mobiles. En théorie on pourrait multiplier le nombre de roues, en pratique, on n'en rencontre que deux et exceptionnellement trois.

#### *La turbine à réaction*

La turbine à réaction pure ne peut être utilisée pratiquement : la vapeur sortant à grande vitesse des tuyères montées aux extrémités d'un bras mobile provoque sur ce bras une réaction qui le met en mouvement. Les vitesses atteintes par la vapeur en sortie de tuyère seraient bien trop importantes pour les puissances usuelles.

Les turbines à réaction réelle utilisent à la fois le principe de l'action et de la réaction à 50-50 % (on dit que le degré de réaction est de  $1/2$ ).

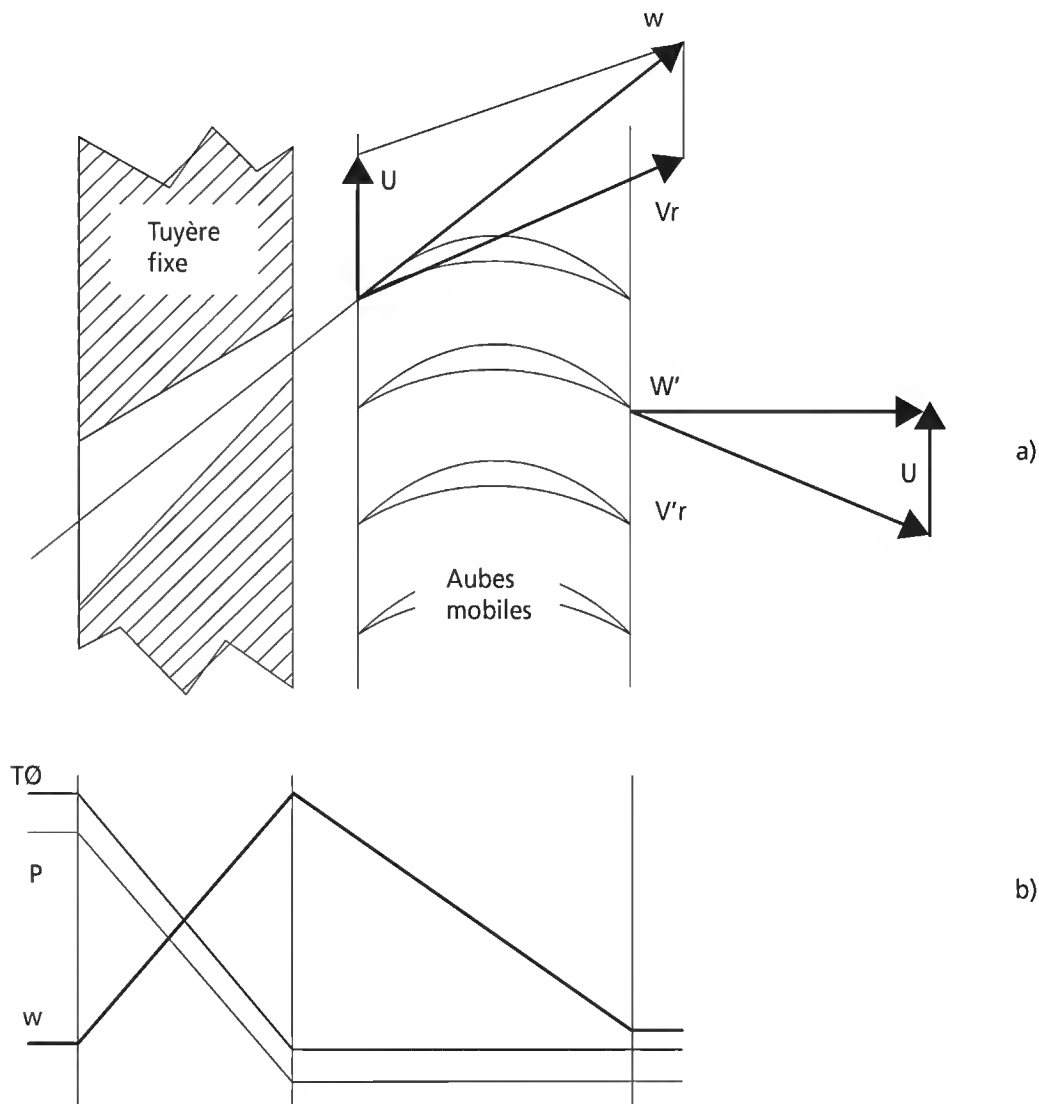


Figure 17.14 Turbine à action.

Les turbines à réaction sont analogues dans leurs dispositions générales aux turbines à actions, mais le tracé des aubages est tel que la chute s'effectue à la fois dans les parties fixes et parties mobiles. Deux ailettes consécutives des aubages mobiles forment une tuyère dans laquelle la vapeur continue à se détendre.

Dans ces conditions, chaque aube mobile d'une turbine à réaction est animée non seulement par l'énergie cinétique issue de la détente opérée dans le redresseur, mais aussi par l'énergie cinétique issue de la détente qui s'opère dans ses propres canaux inter aubes.

La vapeur est à des pressions différentes de part et d'autre des roues mobiles. Cette différence de pression impose une construction avec des jeux plus réduits sur les turbines à réaction.

La chute de pression est limitée dans les aubages, les turbines à réactions comportent un grand nombre de roues en série.

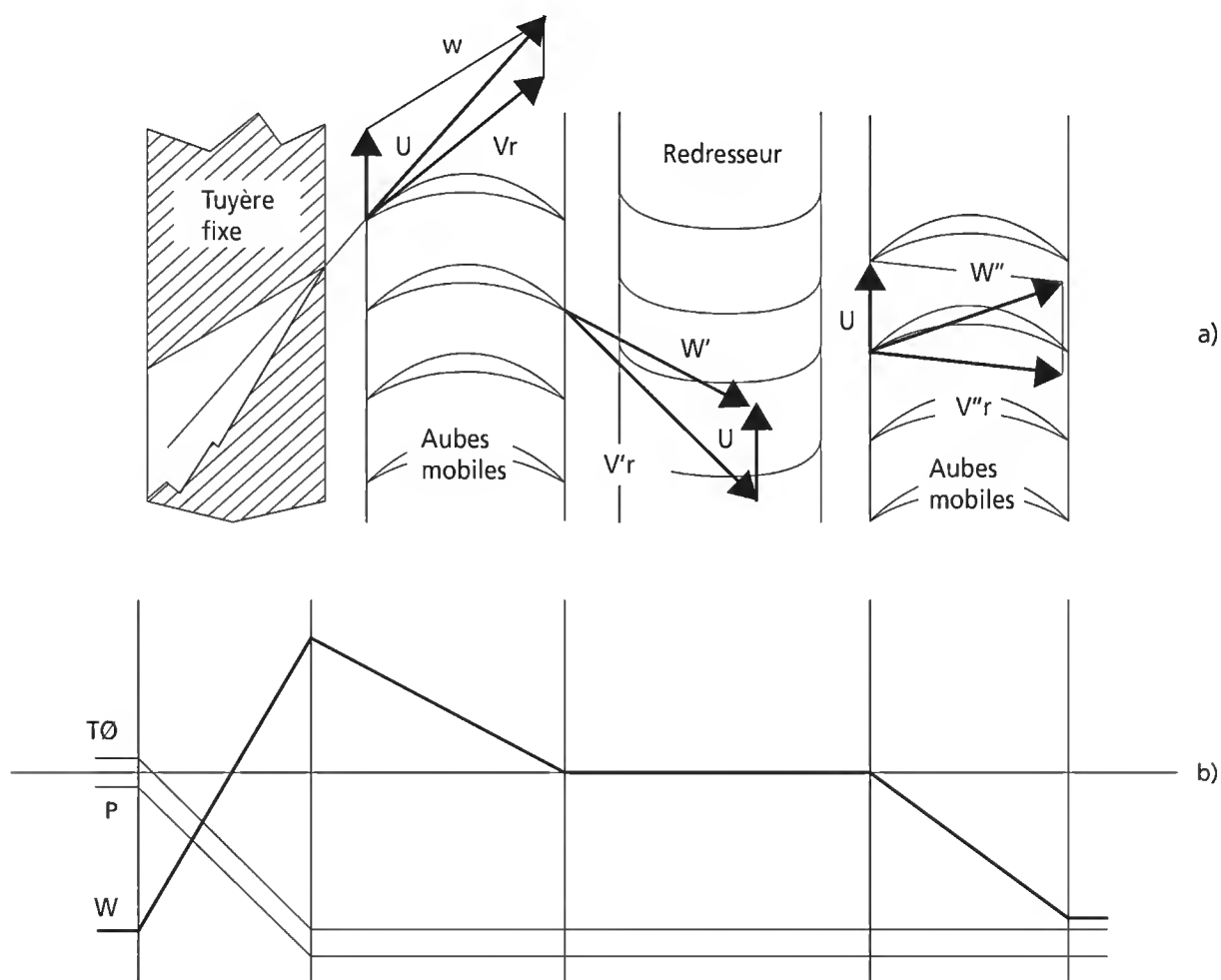


Figure 17.15 Turbine à double action.

### ► Quelques particularités techniques

La veine vapeur occupe un volume de plus en plus grand de l'amont vers l'aval.

Généralement, sur les grosses machines à trois corps (HP, MP, BP), le corps BP fait intervenir deux flux opposés (montage tête bêche) ; cela permet un équilibrage des poussées axiales sur l'arbre des turbines.

Le transitoire thermique de ces machines est long et nécessite de satisfaire un certain nombre de paliers sous peine de fluage thermomécanique des arbres.

Les aubes nécessitent des fixations sur l'arbre selon divers modes ; le plus utilisé est la fixation en pied de sapin d'origine Westinghouse. Pour des raisons de résistance mécanique, on réalise maintenant des aubes monocristallines.

Enfin, la charge de la machine pouvant varier, le fonctionnement à débit vapeur réduit se fait par passage d'une injection totale à une injection partielle (section d'admission).

► L'évolution des applications motrices de la vapeur

Le moteur à vapeur est en fait une application dont la première réalisation remonte à l'Antiquité : moteur à vapeur d'Héron d'Alexandrie. Puis, avec l'essor industriel, on a utilisé la machine à vapeur (voir photographie).



Une machine à vapeur (photographie de l'auteur).

Aujourd'hui, la turbine à vapeur est un macro composant essentiel des centrales thermiques, des centrales nucléaires, voire des centrales solaires (à moindre puissance). Elle est également utilisée dans le domaine des transports maritimes ; la propulsion turbo-électrique en est une illustration. Le réacteur nucléaire embarqué produit de la chaleur (chaudière nucléaire) qui vaporise de l'eau admise dans la turbine. La turbine entraîne un alternateur alimentant le moteur électrique de propulsion.

**Remarque :** la propulsion turbomécanique est aussi possible, la turbine entraînant l'hélice par l'intermédiaire d'un réducteur.

À ces applications à grande échelle correspondent des études sur les micro voire les nano machines à vapeur apparues dans les années 1990 sous forme de prototype aux États-Unis.

## 17.3 L'AIR HUMIDE

### 17.3.1 Le mélange air-vapeur d'eau

Ce mélange est un mélange naturel qui nous environne et dont l'importance est connue dans la vie de tous les jours (météorologie), sans doute moins dans les applications industrielles.

#### a) Les propriétés physiques du mélange

L'air humide peut être considéré comme un mélange d'air sec et de vapeur d'eau ; les propriétés de l'air sec ont été données préalablement (paragraphe 6.5.1.b), de même que pour l'eau pure (paragraphe 6.5.2.a). Le mélange binaire que représente l'air humide sera assimilé à un mélange de gaz parfait, moyennant l'hypothèse que la pression partielle de vapeur d'eau  $P_v$  reste faible ; le cas le plus défavorable à considérer est celui de la saturation  $P_v'$ , à la température du mélange ( $P_v' < P$ , pression totale, souvent la pression atmosphérique).

#### ► Humidité absolue

L'humidité absolue  $w$  est définie par :

$$w = \frac{m_v}{m_a}$$

$m_a$ , masse d'air sec de l'échantillon

$m_v$ , masse de vapeur d'eau de l'échantillon.

On remarque que la référence choisie est la masse d'air sec ; ce sera la règle dans les opérations en air humide. Le choix de l'humidité absolue au détriment de la concentration massique en eau provient du fait que dans la plupart des applications rencontrées, la seule grandeur conservative est la masse d'air sec (aux infiltrations ou pertes près), alors que la masse vapeur peut varier selon le point d'état.

#### ► Humidité relative ou degré hygrométrique

Elle est définie par :

$$\varepsilon = \frac{P_v}{P_v'}$$

Il en résulte que :  $P_a = P - P_v = P - \varepsilon.P_v'$  (loi de Dalton).

Comme les pressions partielles  $P_a$  et  $P_v$  sont, d'après les lois des mélanges de gaz parfaits, proportionnelles aux nombres de moles d'air sec et de vapeur d'eau, on a :



$$\frac{P_v}{P_a} = \frac{P_v}{P - \varepsilon P_v'} = \frac{m_v / 18}{m_a / 28,96} = 1,608 \frac{m_v}{m_a}$$

qui prend la forme courante :

$$\omega = 0,622 \frac{P_v}{P - \varepsilon P_v'} = 0,622 \frac{\varepsilon P_v'}{P - \varepsilon P_v'}$$

La valeur maximale  $\omega'$  est obtenue lorsque l'air est saturé en vapeur d'eau ( $\varepsilon = 1$ ) :  $\omega' = 0,622 \left[ P_v' / (P - P_v') \right]$ .

Le point de fonctionnement correspondant est appelé *point de rosée*. La chaleur spécifique de l'air humide sera obtenue dans le cadre des hypothèses retenues.

Rappelons qu'en règle générale les caractéristiques de l'air humide sont toujours ramenées au kg d'air sec.

Jusqu'à présent, nous avons considéré un mélange air-vapeur-liquide, la phase liquide faisant son apparition à partir du point de rosée caractérisé par la *température de rosée*.

Le refroidissement de l'air humide en dessous de la température de rosée se traduit en effet par l'apparition d'une phase liquide  $\omega_L$  sous forme de brouillard ou de dépôt d'eau liquide sur les parois en contact avec le mélange. Cependant, le refroidissement du même mélange diphasique donne lieu, à partir de 0 °C pour la pression atmosphérique, à une congélation du brouillard, correspondant à une quantité  $\omega_s$  d'eau solide.

En résumé, la valeur de  $\varepsilon$  correspond à chaque fois à la température de l'air humide étudié ; on a toujours :

– au dessus de la température de rosée :

$$\varepsilon < 1 ; \omega < \omega' ; \omega_L = 0 ; \omega_s = 0$$

– au point de rosée :

$$\varepsilon = 1 ; \omega = \omega' ; \omega_L = 0 ; \omega_s = 0$$

– en dessous de la température de rosée :

$$\varepsilon = 1 ; \omega = \omega' ; \omega_L > 0 \text{ ou } \omega_s > 0$$

## b) Les diagrammes de l'air humide ou psychométriques

### ► Divers diagrammes

Les avant-projets industriels faisant intervenir l'air humide et les études sur site sont commodément résolus sur diagramme par l'usage de méthodes graphiques (Knoche K.F.). Les diagrammes traduisent les relations d'équilibre et de conservation entre les diverses grandeurs de mélange ; ils sont souvent fournis pour la pression totale d'une atmosphère, mais ils sont généralisables à toute autre pression si besoin est.

Les diagrammes disponibles sont nombreux (voir annexe 4) ; le plus courant est le diagramme de Mollier ( $h, \omega$ ) enthalpie, humidité absolue. On va montrer ci-après comment construire un diagramme : pour cela, on va rechercher l'expression de l'enthalpie spécifique massique  $h$  de l'air humide, mais rapportée au kg d'air sec, comme indiqué.

**Remarque :** les raisonnements sur le diagramme de Mollier sont transposables pour les autres diagrammes, dont le diagramme de Veron-Casari ( $t, w$  : température sèche, humidité absolue), qui est très utilisé en France.

### ► Enthalpie de l'air humide

Soit un mélange d'air ou d'eau contenant par kg d'air sec, des masses  $\omega, \omega_L, \omega_s$  de vapeur d'eau, sous forme liquide et de glace. En négligeant les chaleurs de mélange en phase gazeuse et en choisissant pour origine des enthalpies la même température de référence 0 °C, nous appellerons :

$h_a$ , l'enthalpie par unité de masse (1 kg) de l'air sec,

$h_v$ , l'enthalpie par unité de masse de la vapeur d'eau,

$h_L$ , l'enthalpie par unité de masse du liquide,

$h_s$ , l'enthalpie par unité de masse de la glace.

Ces enthalpies correspondant à la température  $t$ , l'enthalpie du mélange par kg d'air sec sera :

$$h = h_a + \omega \cdot h_v + \omega_L \cdot h_L + \omega_s \cdot h_s$$

En explicitant la température, cette expression devient :

$$h = c_{pa} t + \omega(h_{v_0} + c_{pv} t) + \omega_L(c_{pL} t) + \omega_s(-h_{L_0} + c_{ps} t)$$

On rappelle que la chaleur spécifique de l'air sec  $c_{pa}$  et de la vapeur d'eau  $c_{pv}$  valent en moyenne sur l'intervalle de température [0, 100 °C] :

$$c_{pa} = 0,241 \text{ kcal/kg } ^\circ\text{C} ; c_{pv} = 0,445 \text{ kcal/kg } ^\circ\text{C}$$

Sachant que la chaleur spécifique à pression constante pour la glace vaut  $c_{ps} = 0,5 \text{ kcal/kg } ^\circ\text{C}$ , que  $h_{v_0}$  représente la chaleur de vaporisation de l'eau à 0 °C,  $h_{v_0} = 597,2 \text{ kcal/kg}$  et  $h_{L_0}$ , la chaleur de fusion de la glace qui, à 0 °C, vaut  $h_{L_0} = 79,8 \text{ kcal/kg}$ , il vient :

$$h = 0,241t + \omega(597,2 + 0,44t) + \omega_L t - \omega_s(79,8 - 0,5t)$$

C'est à partir de cette expression qu'est établi le diagramme de Mollier pour l'air humide.

► Diagramme de Mollier ( $h, \omega$ ) (figure 17.16)

Pour obtenir une représentation convenable des courbes à humidité relative  $\varepsilon = \text{Cte}$ , on a abandonné le système d'axes en coordonnées rectangulaires. L'axe des enthalpies reste vertical mais l'axe des abscisses fait généralement avec l'axe des ordonnées un angle obtus :  $135^\circ$  sur le diagramme de Mollier.

L'expression de  $h$  du paragraphe précédent se limite à :

$$h = c_{pa} + \omega(h_{v_0} + c_{pv}t) = (c_{pa} + \omega c_{pv})t + \omega h_{v_0} = c_p t + \omega h_{v_0}$$

ou

$$h = 0,241t + \omega(597,2 + 0,44t) = (0,241 + 0,44\omega)t + 597,2\omega$$

pour de l'air humide ne contenant de l'eau que sous forme de vapeur. Dans ce cas, les trois courbes  $x = \text{Cte}$ ,  $t = \text{Cte}$ ,  $h = \text{Cte}$  sont des droites sur le diagramme.

Le diagramme est alors tracé de telle sorte que la droite  $t = 0$  soit confondue avec l'axe des  $x$ , et la droite  $\omega = 0$  avec l'axe vertical des  $h$ .

La grandeur  $h$  a pour  $t = 0$  la valeur  $h_{v_0} \cdot \omega$ , de sorte qu'on obtient la droite  $h = 0$  en portant verticalement vers le bas à partir d'un point  $M_0(\omega)$  de la droite  $t = 0$ , un segment  $M_0M = h_{v_0} \cdot \omega$  et en joignant  $M$  au point  $O$ .

Si on porte sur le prolongement de  $MM_0$ , le segment  $M_0M_2 = c_{pa}t$ , puis le segment  $M_2M_1 = c_{pv}\omega t$ , la somme de ces trois segments  $MM_1 = h$ , enthalpie de l'air humide au point  $M_1$ . La parallèle à  $OM$  menée par  $M_1$  est une isenthalpe  $h = \text{Cte}$ .

De plus, comme tout segment  $OM$  mesuré le long de l'isenthalpe  $h = 0$  est proportionnel au segment  $OPM_0$  de l'axe  $\omega$ , l'isenthalpe  $h = 0$  peut représenter à une échelle différente la valeur de  $\omega$ .

En conclusion, sur le diagramme de Mollier :

- les droites  $h = \text{Cte}$  sont des parallèles à la droite  $h = 0$  ;
- les droites  $\omega = \text{Cte}$  sont parallèles à la droite  $\omega = 0$  ;
- les droites  $t = \text{Cte}$  sont inclinées sur la direction de l'isotherme  $t = 0$  qui est horizontale de  $\tan \alpha = c_{pv} \cdot t$ . L'inclinaison croissant avec  $t$ , les isothermes ne sont pas parallèles.

La valeur de la pression totale du mélange étant donnée (couramment la pression atmosphérique), on peut encore tracer sur le diagramme les lignes à humidité relative  $\varepsilon$  constante.

À chaque valeur de la température correspond, d'après la courbe de tension de vapeur de l'eau, une pression de saturation  $p_v'$ . Pour une valeur de  $\varepsilon$  donnée, on peut donc déterminer pour chaque valeur de la température, la valeur correspondante de  $\omega$ . Chaque couple  $(t, \omega)$  détermine sur le diagramme un point de la courbe  $\varepsilon = \text{Cte}$ .

En particulier, la courbe  $\varepsilon = 1$  est obtenue en associant à chaque valeur de  $t$ , la valeur  $\omega'$  correspondante précédemment définie. La courbe obtenue au moyen de ces valeurs est la courbe de saturation ou courbe de rosée relative à la pression  $p$ . On peut montrer aisément que la courbe de saturation de vapeur d'eau sous la pression atmosphérique est asymptotique à l'isotherme  $t = 100\text{ °C}$ .

Avec l'accroissement de la pression, la courbe de saturation se déplace vers le haut dans le diagramme. Ces variations restent toutefois négligeables lorsque la pression varie de 20 mm de Hg autour de la pression atmosphérique. D'autre part, il est possible d'utiliser le diagramme pour des pressions nettement différentes. Pour cela, il faut remarquer que l'on peut envisager les courbes tracées  $\varepsilon = \text{Cte}$  comme des courbes  $(\varepsilon/p) = \text{Cte}$ .

En effet, l'humidité absolue peut se mettre sous la forme :

$$\omega = 0,622 \frac{\frac{\varepsilon}{p} p_v'}{1 - \frac{\varepsilon}{p} p_v'}$$

La courbe  $(\varepsilon/p) = k$  devient d'ailleurs la courbe de saturation correspondant à la pression  $p = (1/k)$ .

Que se passe-t-il au-delà de la courbe de saturation ? Il est possible de définir l'allure des isothermes dans cette région. Nous ne le ferons pas pour alléger le texte. Remarquons simplement que, lorsque la température étant supérieure à  $0\text{ °C}$ , l'humidité absolue totale  $\omega_T$  devient supérieure à  $\omega'$ , le mélange comprend de l'air saturé de vapeur d'eau et un brouillard d'eau liquide.

On a alors :

$$\omega_T = \omega' + \omega_L \text{ avec } \omega = \omega' \quad \omega_L > 0 \quad \omega_s = 0$$

$$h = 0,241t + \omega'(597,2 + 0,44t) + \omega_L t$$

Le point  $N_1$  en est un exemple. La droite  $t_L = 0\text{ °C}$  est un exemple d'isotherme appelée *isotherme de brouillard*. Lorsque la température devient inférieure à  $0\text{ °C}$ , les gouttelettes liquides du brouillard passent à l'état solide. Quand tout le liquide est solidifié, on a :

$$\omega_T = \omega' + \omega_s \text{ avec } \omega = \omega' \quad \omega_L = 0 \quad \omega_s > 0$$

$$h = 0,241t + \omega(597,2 + 0,44t) - \omega_s(79,8 - 0,5t)$$

Un exemple d'isotherme correspondante est la droite  $t_s = 0\text{ °C}$  appelée isotherme de glace.

Ainsi, l'isotherme  $t = 0\text{ °C}$  horizontale pour  $\varepsilon < 1$  prend, à partir de  $\varepsilon = 1$  (point P), la direction  $t_L = 0\text{ °C}$  pour l'isotherme de brouillard et  $t_s = 0\text{ °C}$  pour l'isotherme de

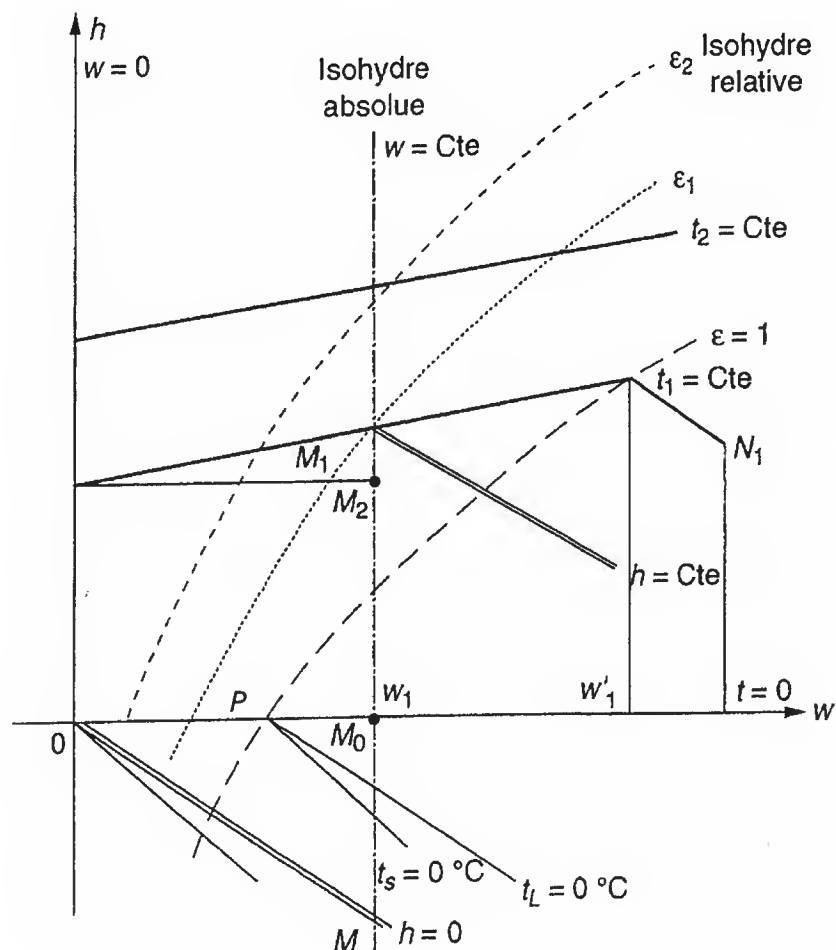


Figure 17.16 Diagramme de Mollier de l'air humide.

glace. Pour tous les points compris entre ces deux isothermes, on a  $\omega_L > 0$  et  $\omega_S > 0$ . Le mélange comporte alors de l'air et de l'eau dans les trois états. Ces courbes ne figurent pas en général sur les diagrammes car elles ne sont pas usuelles. Il en est de même souvent pour les isothermes  $t < 0$ .

### ► Métrologie de l'air humide

#### *Psychromètre*

La connaissance d'un point d'état d'un mélange d'air humide passe par la connaissance de deux données, le plus souvent une température sèche  $t$ , et une température humide  $t'$ , associée aux conditions de saturation du mélange à même enthalpie.

La théorie de l'évaporation adiabatique ne sera pas rapportée ici, faute de place, mais elle débouche sur la mesure de  $t$  et  $t'$  par un appareil appelé psychromètre ; cet appareil peut revêtir plusieurs formes, dont la plus évoluée faisant appel à l'effet

Peltier pour détecter l'apparition de la condensation sur miroir (hygromètre à point de rosée). Cet appareil est utilisé aussi en tant qu'étalon.

### Hygromètre

Par opposition aux appareils précédents, les hygromètres sont des appareils relatifs, qui nécessitent un étalonnage comparatif. La précision de ceux-ci souvent assez médiocre dépend surtout du principe physique utilisé, de l'hygromètre à cheveux à l'hygromètre capacitif. Ils fournissent une indication sur  $\varepsilon$ , et nécessitent donc la connaissance supplémentaire de la température sèche.

### c) Les principales transformations unitaires

Ces transformations peuvent être illustrées sur diagramme ; elles sont aussi développées ici sous forme analytique.

- Mélange isobare de deux quantités d'air humide d'états hygrométriques différents

Soit un mélange d'une masse  $m_1(1+\omega_1)$  d'air humide à la température  $t_1$  avec une masse  $m_2(1+\omega_2)$  d'air humide de température  $t_2$  sous une pression constante (la pression atmosphérique). Soit  $\omega_m, t_m, h_m, \varepsilon_m$  les caractéristiques du mélange résultant. Les points représentatifs respectifs seront  $M_1, M_2, M$  sur le diagramme représenté figure 17.17.

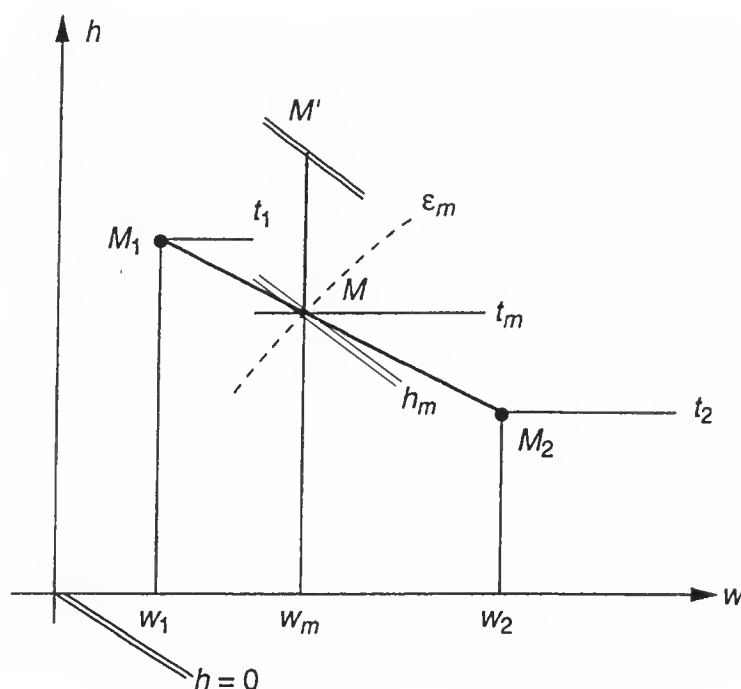


Figure 17.17 Mélange isobare de deux airs humides.



Le principe de conservation de la matière permet d'écrire :

$$m = m_1 + m_2 \quad m\omega_m = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \quad \text{d'où } \omega_m = \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{m_1 + m_2}$$

Le principe de conservation de l'énergie, en négligeant l'enthalpie de mélange, permet aussi d'écrire :

$$mh_m = m_1h_1 + m_2h_2 \quad \text{soit } h_m = \frac{m_1h_1 + m_2h_2}{m_1 + m_2}$$

Ces deux valeurs permettent de placer le point M dans le diagramme. Il en résulte les valeurs correspondantes de  $t_m$  et  $\varepsilon_m$ .

Toutefois, on peut établir ce résultat par une construction graphique simple. L'élimination de  $m$  dans les relations précédentes conduit en effet à :

$$\frac{h_m - h_1}{\omega_m - \omega_1} = \frac{h_2 - h_m}{\omega_2 - \omega_m}$$

Cette relation montre que le point M se situe sur la droite  $M_1M_2$ . Vu que  $(\omega_2 - \omega_m) / (\omega_m - \omega_1) = (m_1 / m_2) = (\overline{M_2M} / \overline{MM_1})$ , M sera le barycentre des masses  $m_1$  et  $m_2$  appliquées aux points respectifs  $M_1$  et  $M_2$ .

#### ► Apport de chaleur sur un air humide

Si pendant l'opération de mélange le système est soumis à un apport de chaleur  $q$ , la variation  $\Delta h_m$  de l'enthalpie sera telle que :

$$m\Delta h_m = q$$

puisque l'apport s'effectue à pression constante. Dans le cas de figure, le point M' correspondant est tel que  $MM' = \Delta h_m = (q / m)$  avec  $q > 0$  (figure 17.17).

#### ► Mélange d'une quantité de vapeur d'eau ou d'eau liquide à de l'air humide

Soit un air humide de caractéristiques représentées par le point  $M_1$ .

Le point  $M_2$  représentant l'état de l'eau ajoutée est en dehors du diagramme ( $\omega_2 = \omega$ ).

Toutefois, si  $m_2$  est la masse d'eau ajoutée, on a :

$$m_2 = m_1(\omega_m - \omega_1)$$

et  $h_2$  désignant l'enthalpie de l'eau ajoutée, on a aussi :

$$m_2h_2 = m_1(h_m - h_1)$$

Le problème est donc résolu, et vu que :

$$\frac{h_m - h_1}{\omega_m - \omega_1} = h_2$$

le coefficient angulaire de la droite  $M_1M$  est égal à l'enthalpie de l'eau liquide. Afin de faciliter le tracé de la direction cherchée, les diagrammes psychrométriques comportent généralement en bordure une échelle des coefficients angulaires ou des variations d'enthalpies rapportés à la variation de  $\omega$ .

La droite  $M_1M$  étant connue, on obtient par exemple le point M par l'augmentation d'abscisse à partir de  $M_1$ ,  $(\omega_m - \omega_1) = (m_2 / m_1)$ .

### 17.3.2 Les applications de l'air humide

Les applications dans le domaine industriel sont principalement : le conditionnement de l'air, le séchage, l'humidification, les tours de refroidissement.

Ces quatre domaines vont être examinés succinctement ci-après.

#### a) Le conditionnement de l'air

Les réalisations de climatisation, tant en chaud qu'en froid, sont très prisées actuellement ; elles donnent lieu à applications dans les bâtiments de tous types, ainsi que dans le domaine des transports.

La variété des situations rencontrées fait que chaque problème doit être résolu selon sa spécificité. Néanmoins, le conditionnement de l'air présente des constantes.

#### ► La centrale de traitement de l'air

Cette centrale comporte les éléments suivants :

- ventilateurs assurant le mouvement de l'air ;
- refroidisseurs selon l'intensité du refroidissement, la condensation (voire le givrage) peut apparaître. L'évacuation d'eau se traduit par une réduction des humidités absolues et relatives ; cette réduction doit être maîtrisée en fonction des conditions de confort ;
- réchauffeurs apportant de la chaleur dans l'écoulement ;
- laveurs, humidificateurs. Le fluide en écoulement est mis en contact avec de l'eau (par pulvérisation, ruissellement, injection vapeur, etc.) ; il y a alors transfert simultané de chaleur et de matière.

En France, l'industrie du matériel aéraulique, thermique et frigorifique est représenté par Uniclimate ([www.uniclimate.org](http://www.uniclimate.org)). Il existe de nombreux traités spécialisés dans le domaine, vers lequel le lecteur est renvoyé.

#### ► Le réseau aéraulique

Il assure la liaison entre la centrale de traitement d'air et l'espace desservi, ainsi que l'extérieur pour le renouvellement ou l'extraction d'air.



➤ La régulation

Elle agit sur les différentes variables de commande pour maintenir les conditions de confort désirées.

b) Le séchage

➤ Produits séchés

Le séchage est un procédé courant aussi bien dans le domaine industriel (quelques exemples : bois, briques, tuiles et autres produits en terre cuite) que dans le domaine agroalimentaire (malt, grains, luzerne, saucissons).

L'eau contenue dans les matériaux peut se présenter sous deux formes faisant intervenir une liaison physique entre l'eau et le matériau (cette liaison est une liaison faible, correspondant à l'humidité du matériau), soit une liaison chimique entre l'eau et le matériau. Cette liaison est une liaison forte correspondant à l'hygroscopie du matériau.

➤ Modes de séchage

*Air préalablement chauffé*

Le mode de séchage le plus courant suppose l'utilisation du vecteur air auquel on fournit préalablement un apport de chaleur.

Il est alors possible de distinguer deux types principaux de séchoirs : apport de chaleur réalisé directement dans le séchoir, apport de chaleur transmis indirectement à l'air en entrée de séchoir.

Pour chacun des cas de figures précédents, il est possible de distinguer de nombreuses variantes dont quelques-unes seront évoquées dans le paragraphe suivant.

*Autres modes de séchage*

Parmi ces modes, qui ne seront pas étudiés ici, on se contentera de citer l'utilisation des techniques du vide (lyophilisation), le séchage à radiations (encres).

➤ Analyse du fonctionnement des séchoirs à air

*Hypothèses des modèles*

Dans ce paragraphe vont être considérées trois variantes principales de séchoir à air : séchoir simple à apport direct de chaleur, séchoir simple à préchauffage d'air, séchoir étagé.

Dans les modélisations qui vont suivre, les séchoirs seront supposés adiabatiques.

Par ailleurs, on n'envisagera que le séchage des produits dans lesquels l'eau n'est liée que sous forme physique telle que la pression de vapeur saturante et la température correspondantes soient identiques à celles de l'eau pure. De ce fait, il est possible d'utiliser le diagramme  $(h, \omega)$ , ce qui n'est plus recevable lorsque l'eau est liée chimiquement au substrat.

*Bilans du séchoir à apport direct de chaleur*

Le schéma du principe de séchoir est représenté figure 17.18.

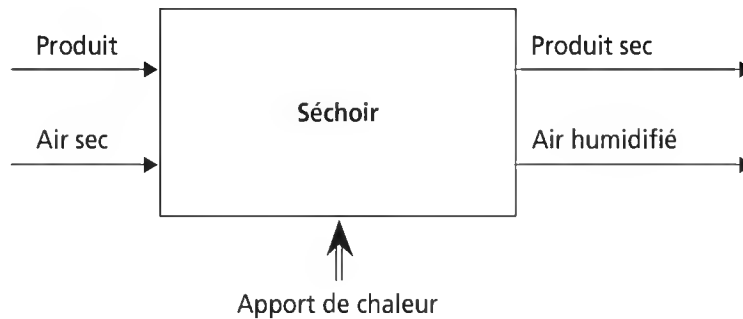


Figure 17.18 Schéma de principe du séchoir simple à apport direct de chaleur.

À l'entrée du séchoir, le produit a une masse totale :

$$M_p = M_{ps} + M_E \quad (17.1)$$

L'air d'entrée a une masse (air sec)  $M_A$  et une humidité  $\omega_{AE}$ . À la sortie du séchoir, l'air de sortie est caractérisé par une humidité  $\omega_{AS}$ .

Le bilan masse du séchoir en résulte :

$$M_E = M_A (\omega_{AS} - \omega_{AE}) \quad (17.2)$$

Soit  $T_{PE}$  la température d'entrée du produit ;  $T_{PS}$  la température de sortie du produit dont on supposera la capacité calorifique constante sur  $[T_{PE}, T_{PS}]$  et indépendante de l'humidité.

On appellera  $q$  la quantité de chaleur apportée pour le séchage,  $h_{AE}$  l'enthalpie de l'air d'entrée,  $h_{AS}$  l'enthalpie de l'air de sortie.

Le bilan thermique du séchoir en résulte. Après réarrangement des termes, il vient :

$$q = M_A (h_{AS} - h_{AE}) + M_{ps} C_p (T_{PS} - T_{PE}) - M_E C_{pE} T_{PE} \quad (17.3)$$

Si on suppose les deux derniers termes négligeables, on a :

$$q = M_A (h_{AS} - h_{AE}) \quad (17.4)$$

(17.2) et (17.4) permettent l'étude du séchage très simplement sur le diagramme.

**Remarque :** la variante de séchoir à préchauffage de l'air est équivalente à celle qui vient d'être présentée.

#### Autres variantes – conclusions

Il serait possible de mettre en évidence l'intérêt du séchoir tunnel étagé qui constitue un exemple de procédé discret à cycle ouvert.

Parmi les variantes récentes permettant une amélioration importante de ces procédés, il y a lieu de mentionner les séchoirs utilisant une MAF ou PAC.

En effet, l'évaporateur et le condenseur ont un rôle actif dans ces séchoirs. L'évaporateur permet de condenser une partie de la vapeur d'eau extraite, augmentant les possibilités de séchage. Par ailleurs, la chaleur prélevée sur l'air à l'évaporateur est restituée renforcée à l'air au niveau du condenseur. Conformément au schéma, le circuit d'air apparaît comme un circuit semi-fermé. De ce fait, un chauffage d'appoint peut être nécessaire (figure 17.19).

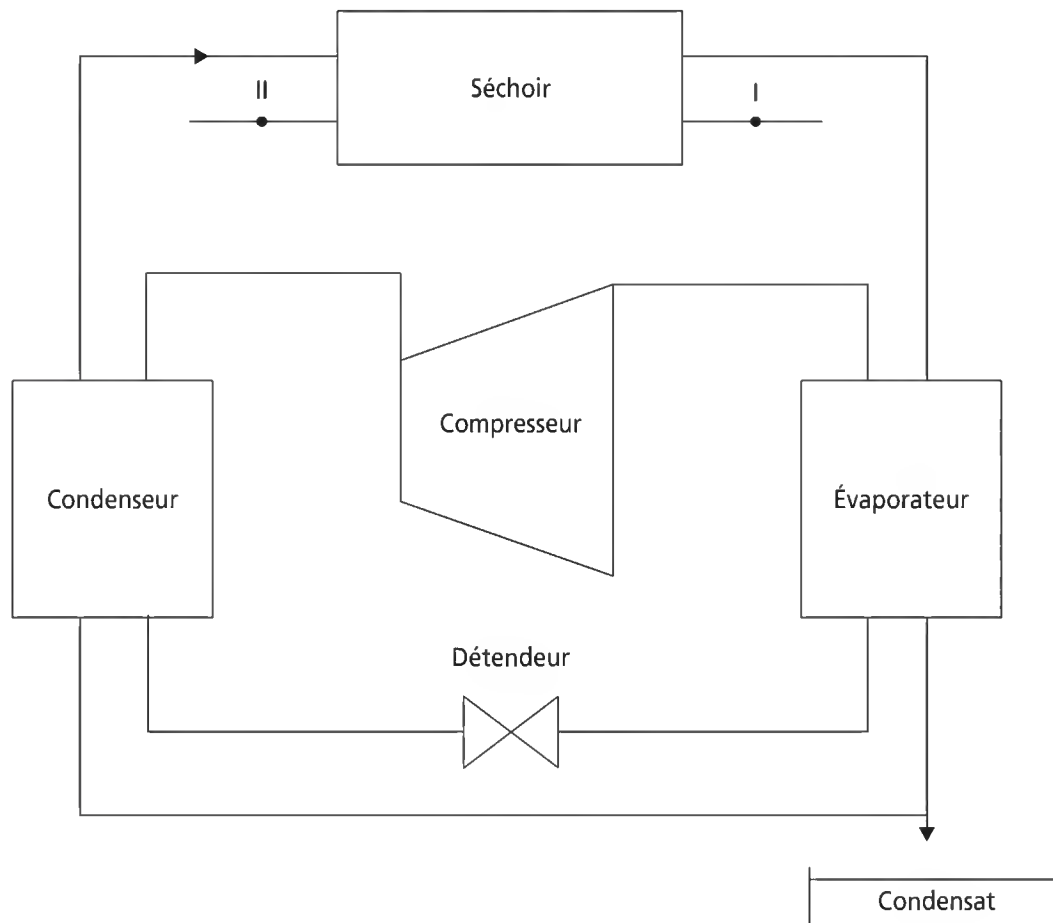


Figure 17.19 Séchoir simple incorporant une MAF-PAC.

### c) Humidification-réfrigérants atmosphériques

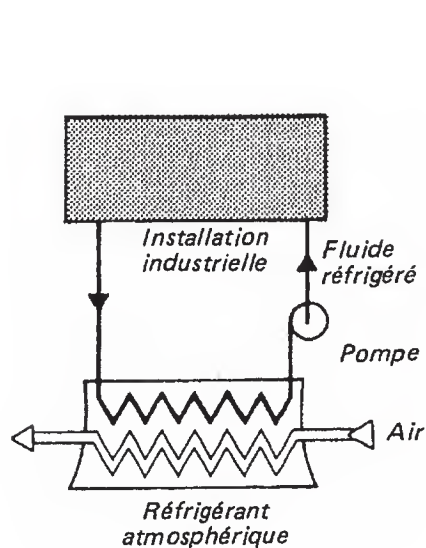
#### ► Humidification

Cette opération peut trouver un intérêt dans la réalisation de conditions de confort pour un air trop sec, mais aussi en milieu industriel. Ainsi, en génie chimique, mais aussi en génie mécanique, on a vu l'intérêt de l'air humide dans les cycles de turbine à combustion. Il pourrait en être de même en compression pour le refroidissement interétage.

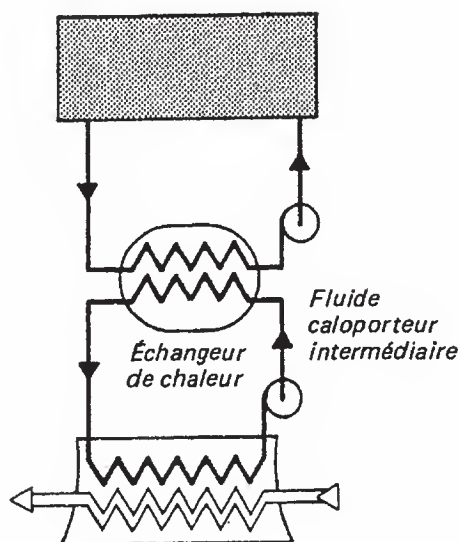
**Remarque :** l'opération de déshumidification est aussi une opération importante. Un exemple : déshumidification de l'air comprimé (possible par sécheur frigorifique, mais pas uniquement).

### ► Les réfrigérants atmosphériques

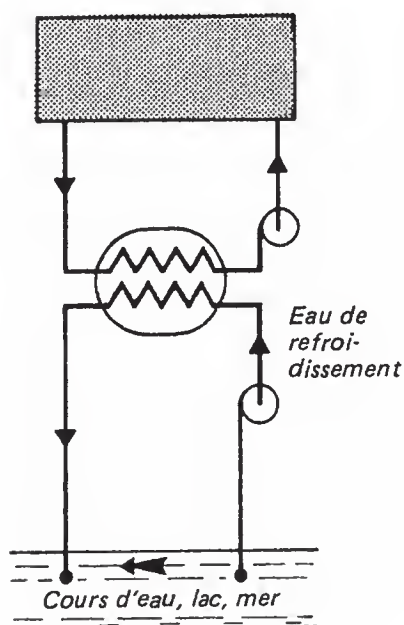
Les réfrigérants atmosphériques sont aussi appelés tours de refroidissement ; ils appartiennent au monde des échangeurs (chapitre 13).



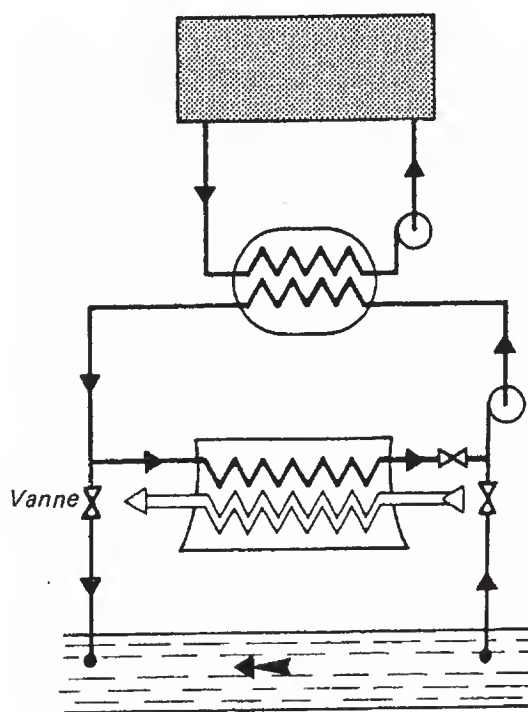
Refroidissement en circuit fermé  
(Système direct)



Refroidissement en circuit fermé  
(Système indirect)



Refroidissement en circuit ouvert



Refroidissement mixte

Figure 17.20 Schémas de circuit de refroidissement.

Les tours de refroidissement sont des dispositifs utilisés pour refroidir l'eau des centrales thermiques, des installations frigorifiques et de climatisation. En forme de cheminée laissant échapper parfois un panache blanc de vapeur aux abords des centrales thermiques, les tours de refroidissement se trouvent aussi dans les installations frigorifiques sous forme de petites tours dont l'enveloppe est en tôle d'acier galvanisé ou en polyester renforcé de fibre de verre. On en voit souvent sur les toitures-terrasses de nombreux établissements industriels ou commerciaux. Les tours de refroidissement assurent donc la même fonction qu'un échangeur de chaleur, monté dans un système thermique le plus souvent entre un circuit d'eau et un circuit d'air, et constituent d'importants dispositifs économiseurs d'eau. Leurs classifications dépendent :

- du mode et du système d'échange mis en œuvre et du type de contact avec l'air (direct, indirect) ;
- du sens d'écoulement de l'air et de l'eau, en particulier dans le système d'échange ;
- du mode de déplacement de l'air (tirage).

Les schémas de la figure 17.21 et la photographie rendent compte de réalisations industrielles du domaine de la pétrochimie ; l'homme sur la photographie donne une idée de la dimension des appareils (documents aimablement communiqués par GEA-BTT, Nantes, France).

Le lecteur souhaitant des détails sur cette famille d'échangeurs trouvera les renseignements dans l'ouvrage spécialisé de (Caudron L.)

#### ➤ Un exemple d'échangeur air-eau

##### *Échangeurs air-eau*

Ces échangeurs sont principalement des réfrigérants atmosphériques. Ce type de réfrigérant est utilisé en particulier pour le refroidissement de l'eau en circuit fermé, ce qui permet de réaliser des économies de fluide et d'éviter une pollution thermique de ce même fluide.

Les échangeurs correspondant se présentent généralement sous forme de tour. La version la plus courante est à contre-courant.

Le châssis supporte des chicanes sur lesquelles l'eau ruisselle, tandis que l'air décrit un circuit ascendant par tirage naturel ou mieux par ventilation forcée. Dans la version réfrigération atmosphérique, le refroidissement est lié à l'évaporation d'eau, ce qui nécessite une introduction d'eau annexe en complément.

---

#### **Exemple de dimensionnement de la tour**

La mesure fournit les caractéristiques de l'air en entrée de colonne en 1  $\omega_1, T_1, h_1$ , puis en sortie 2  $\omega_2, T_2, h_2$ .

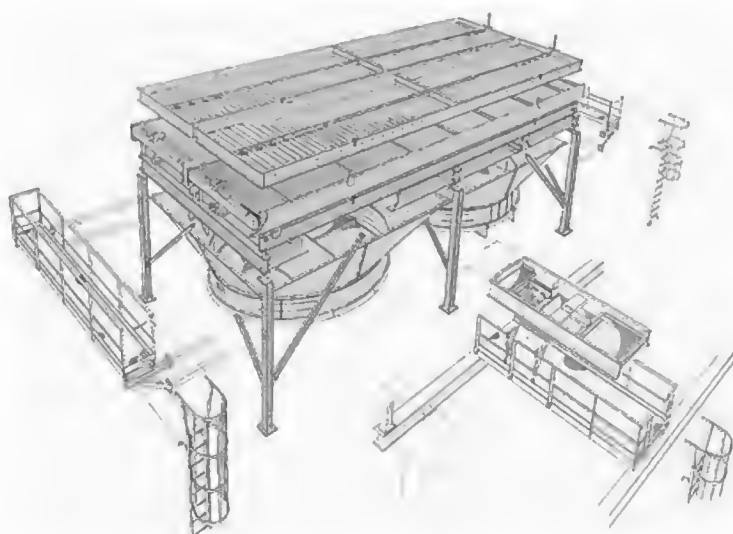


Figure 17.21 Structures d'aéroréfrigérants.

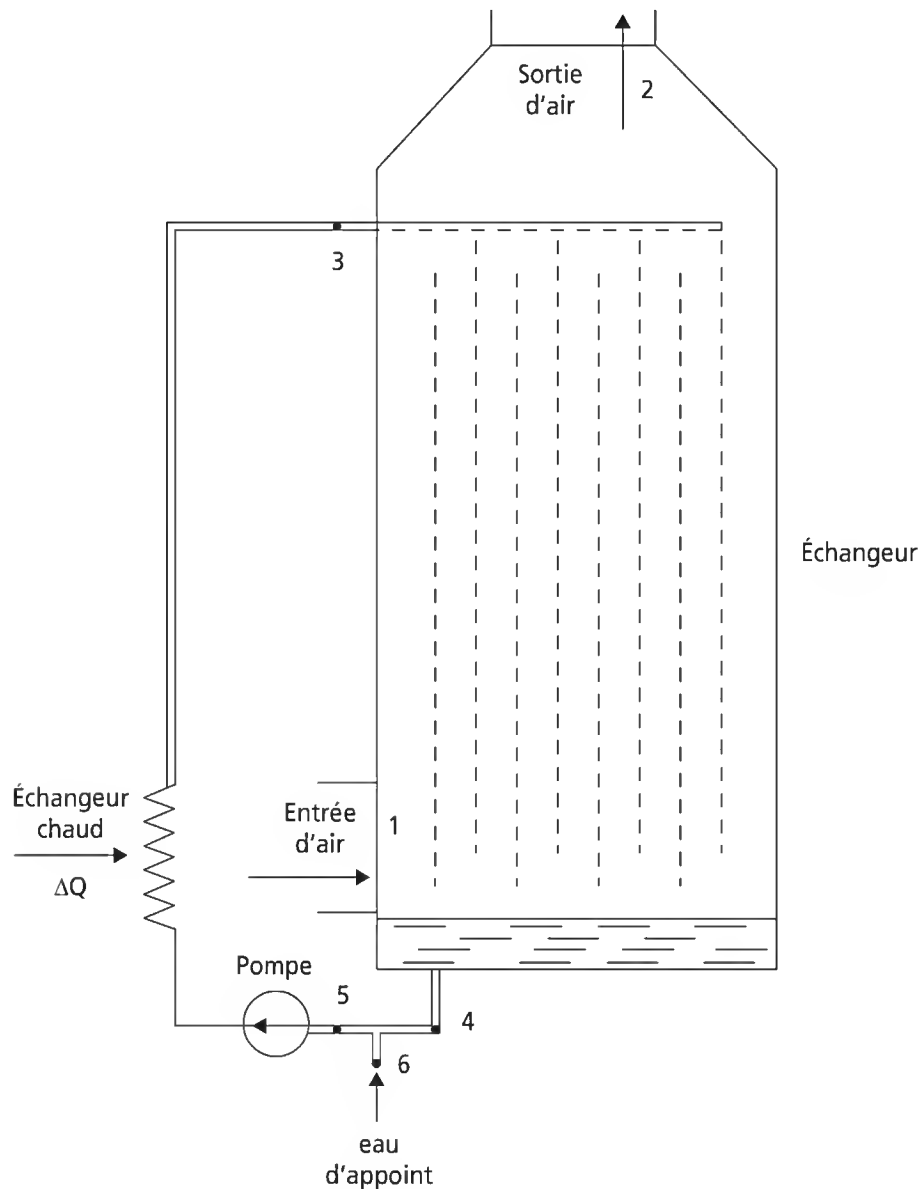


Figure 17.22 Schéma d'un échangeur air-eau

La connaissance du débit massique d'air sec cyclé  $D_a$  permet alors de déterminer le débit d'eau d'appoint nécessaire, qui correspond au débit d'évaporation  $D_e$  :

$$D_e = D_a (\omega_2 - \omega_1).$$

Dans cet exemple, on suppose connue la quantité de chaleur  $\Delta Q$  à évacuer au niveau de l'échangeur chaud, ainsi que dans les conditions correspondantes le débit total d'eau  $D_{Te}$ . On a donc :

$$\Delta Q = D_{Te} (T_3 - T_5)$$

$$\rightarrow \Delta Q = D_{Te} (T_3 - T_4) + D_e (T_4 - T_6)$$

$$D_{Te} \cdot T_5 = (D_{Te} - D_e) T_4 + D_e T_6$$



en supposant  $C_p$  de l'eau constant égal à 1 kcal/kg. K dans le domaine de températures considérées.

D'autre part, en sortie au point 2, on suppose l'air saturé en eau ( $\varepsilon_2 = 1$ ), ce qui est souvent vérifié pratiquement.

Le bilan énergétique sur la tour permet alors d'écrire en supposant les échanges de chaleur parfaits :

$$D_a(h_2 - h_1) = D_{Te}(T_3 - T_4) + D_e T_4$$

D'où :

$$h_2 - h_1 = \frac{\Delta Q}{D_a} + \frac{D_e}{D_a} T_6 = \frac{\Delta Q}{D_a} + (\omega_2 - \omega_1) T_6$$

La connaissance de  $T_6$  permet de déterminer  $h_2$ , d'où le point 2 sur le diagramme  $(h, \omega)$ .

Enfin, on peut en déduire la température de l'eau en fin de refroidissement

$T_4 = \frac{D_{Te}}{D_{Te} - D_e} T_3 - \frac{D_a}{D_{Te} - D_e} (h_2 - h_1)$  si on connaît la température  $T_3$  de l'eau à refroidir.

Caractérisons enfin l'efficacité de l'échangeur ou facteur de qualité :

$$f = \frac{t_3 - t_4}{t_3 - t_L}$$

expression dans laquelle  $t_L$  représente la température minimum de refroidissement possible pour l'eau. Cette température correspond à la température de l'isotherme humide dont le prolongement passe par le point 1 relatif à l'air sec.

### Application numérique

Dans un réfrigérant, le débit total d'eau est de 2 500 m<sup>3</sup>/h. La quantité de chaleur à évacuer est  $\Delta Q = 21$  millions de kcal/h. Le débit d'air sec à l'entrée est de 2,4 millions de kg/h pour une température sèche de 15 °C et une température humide de 10,5 °C.

Enfin la température de l'eau  $t_3 = 33,7$  °C en entrée de réfrigérant, alors que la température de l'eau d'appoint  $t_6$  vaut 10 °C.

Le point 1 est alors complètement connu sur le diagramme  $(h, \omega)$ .

$$t_1 = 15 \text{ °C} \quad \varepsilon_1 = 0,60 \quad \omega_1 = 0,006 \quad h_1 = 7,65 \text{ kcal/kg d'air sec.}$$



La connaissance de  $h_2$  par :

$$h_2 - h_1 = 8,75 + (\omega_2 - \omega_1) \cdot 10 \quad (\text{origine des enthalpies pour } t = 0^\circ\text{C})$$

permet de placer le point 2 pour lequel  $\varepsilon_2 = 1$ .

$$t_2 \approx 23^\circ\text{C} \quad \varepsilon_2 = 1 \quad \omega_2 \approx 0,0180 \quad h_2 \approx 16,4 \text{ kcal/kg d'air sec.}$$

(on suppose pour ce faire le terme  $(\omega_2 - \omega_1) \cdot 10$  négligeable devant 8,75, ce que l'on vérifie *a posteriori* puisque  $(\omega_2 - \omega_1) \cdot 10 = 0,12 \text{ kcal/kg}$ . D'où la correction sur  $h_2 = 16,5 \text{ kcal/kg d'air sec}$ .

Débit d'eau évaporée, correspondant au débit d'appoint nécessaire :

$$D_e = 27\,300 \text{ kg/h ou } 27,3 \text{ m}^3/\text{h}$$

Température de l'eau en fin de refroidissement dans le bac de récupération :

$$t_4 = 25,5^\circ\text{C}.$$

D'où la température du mélange en entrée de pompe  $t_5 = 25,3^\circ\text{C}$ .

La connaissance de la température limite du refroidissement  $t_L$  que permet l'état de l'air humide d'entrée en 1  $t_L = 10,5^\circ\text{C}$ , fournit alors la valeur correspondante du facteur de qualité de l'échangeur :

$$f = \frac{33,7 - 25,5}{33,7 - 10,5} = 0,35$$

### *Prolongement au problème*

Si l'on ne connaît pas  $t_3$ , il n'est alors possible que de déterminer la différence

$$T_3 - T_4 ; \text{ moyennant l'hypothèse que } \frac{D_e}{D_{Te}} T_4 \text{ est négligeable devant } \frac{D_a}{D_{Te}} (h_2 - h_1).$$

$$T_3 - T_4 = \frac{D_a}{D_{Te}} (h_2 - h_1)$$

(le réfrigérant sera d'autant plus efficace que  $T_3$  et  $T_4$  séparément seront faibles).

Pour le réfrigérant donné recherchons l'influence des caractéristiques de l'air en entrée 1. ( $\Delta Q, D_a, D_{Te}$ , et  $T_6$  données ; mêmes valeurs que précédemment).

Influence de la température :  $t_1$  pour  $\varepsilon_1 = 0,6$  (tableau 17.2)

Il ressort de ces calculs que  $D_e$  est une fonction croissante de  $t_1$ , alors que parallèlement la différence des températures  $t_2 - t_1$  diminue. Cela s'explique par une diminution de l'influence de la transmission de chaleur par conduction et convection dans la tour lorsque  $t_1$  augmente.

Influence de l'humidité relative de l'air  $\varepsilon_1$  pour  $t_1 = 15^\circ\text{C}$  (tableau 17.3)

TABLEAU 17.2

1 $\varepsilon_1 = 0,6$			2 $\varepsilon_2 = 1$			$\omega_2 - \omega_1$	$D_e$	$t_3 - t_4$
$t_1$	$\omega_1$	$h_1$	$t_2$	$\omega_2$	$h_2$			
0°C	0,002	1,4 kcal/kg	15°C	0,011	10,2 kcal/kg	0,009	21 m <sup>3</sup> /h	8,3°C
5	0,003	3,1	17,2	0,013	11,9	0,010	23	8,2
10	0,005	5,2	20	0,015	14,0	0,010	25	8,2
15	0,006	7,7	22,9	0,018	16,4	0,012	27,5	8,2
20	0,009	10,2	25,8	0,021	19,0	0,012	29,5	8,2
25	0,012	13,5	29	0,025	22,3	0,013	32	8,2

TABLEAU 17.3

1 $t_1 = 15^\circ\text{C}$			2 $\varepsilon_2 = 1$			$\omega_2 - \omega_1$	$D_e$	$t_3 - t_4$
$\varepsilon_1$	$\omega_1$	$h_1$	$t_2$	$\omega_2$	$h_2$			
0,5	0,005	7 kcal/kg	22,1°C	0,017	15,7 kcal/kg	0,012	28 m <sup>3</sup> /h	8,2°C
0,6	0,006	7,7	22,9	0,018	16,4	0,012	27,5	8,2
0,7	0,008	8,2	23,5	0,019	17,0	0,011	26,5	8,2

Il transparaît alors sur le tableau que toutes choses égales par ailleurs lorsque  $\varepsilon_1$  augmente, le débit d'eau décroît faiblement.

## 17.4 ÉTUDES DE CAS SUR LA VAPEUR D'EAU ET L'AIR HUMIDE

### 17.4.1 Production et utilisation de la vapeur d'eau

Une centrale industrielle de cogénération doit produire :

- 5 t/h de vapeur à 180 °C et 5 bars.
- 1 t/h de vapeur à 1,5 bar.
- 1,10 MW de puissance mécanique.

La chaudière fonctionne sous 12 bars. La puissance mécanique provient de deux turbines. La turbine haute pression est alimentée en vapeur surchauffée par la chaudière et rejette de la vapeur à 180 °C sous 5 bars.

Une partie de la vapeur est prélevée pour satisfaire la condition a) ; le reste est envoyé dans un échangeur surchauffeur de la chaudière d'où elle sort à 260 °C, avant d'être admise dans la turbine basse pression. En sortie de cette turbine, on prélève

1 t/h de vapeur sous 1,5 bar, pour satisfaire la condition b) ; le reliquat est envoyée au condenseur.

En supposant un fonctionnement isentropique des turbines, et des transformations isobares hormis dans les turbines et la pompe d'alimentation de chaudière, ainsi qu'une alimentation en eau d'appoint, à même température que celle provenant du condenseur (échangeur économiseur), on réalise successivement :

1. Un diagramme schématique de l'installation, en indiquant la circulation, la nature et l'état des différents fluides.
  2. La représentation du cycle en diagramme  $T, S$ .
  3. La représentation du cycle sur le diagramme  $(h, s)$ .
  4. La détermination de la température de la vapeur sortant sous 1,5 bar de la turbine basse pression.
  5. Le calcul du débit d'eau d'alimentation de chaudière.
  6. Le calcul du flux de chaleur qui doit être fourni à la chaudière.
- Température de la vapeur sortant sous 1,5 bar.  
Lecture avec diagramme : 125 °C.

Voir figures 17.23, 24, 25.

Débit d'eau d'alimentation à la chaudière. Soit  $X$  ce débit en kg par seconde.

Le passage d'1 kg d'eau dans la turbine haute pression fournit :

$$723 - 678 = 45 \text{ kcal.}$$

Par seconde, la turbine haute pression fournit donc :  $45X$  kcal.

On prélève alors 5 000 kg/heure = 1,39 kg/s.

Le passage d'1 kg d'eau dans la turbine basse pression fournit :

$$713 - 652 = 61 \text{ kcal.}$$

Par seconde, la turbine basse pression fournit donc :  $61(X - 1,39)$  kcal.

Or l'ensemble des deux turbines doit fournir 1 500 CV, soit :

$$1\,500 \times 176 = 268\,000 \text{ calories/secondes} = 268 \text{ kcal/s.}$$

La relation qui permet de calculer  $X$  est :  $45X : 61(X - 1,39) + 268$ .

Soit  $X = 3,36$  kg d'eau/seconde.

Débit de chaleur apportée à la chaudière par seconde.

Chauffage de l'eau de complément soit :

$$1,39 \times (112 - 20) = 127,8 \text{ kcal/s} + 0,278(112 - 20) = 25,6 \text{ soit } 153,4 \text{ kcal/s.}$$

b) Chauffage de l'eau recyclée additionnée de l'eau de complément de 112 °C à 187 °C soit :  $3,36(723 - 187) = 252 \text{ kcal/s.}$

c) Vaporisation et surchauffage de  $X$  à 283 °C :  $3,36(723 - 187) = 1\,800 \text{ kcal/s.}$

d) Surchauffe de  $(3,36 - 1,39)$  kg d'eau/sec de 180 °C à 260 °C :

$$(3,36 - 1,39) (713 - 678) = 1,97 \times 35 = 69 \text{ kcal/s.}$$

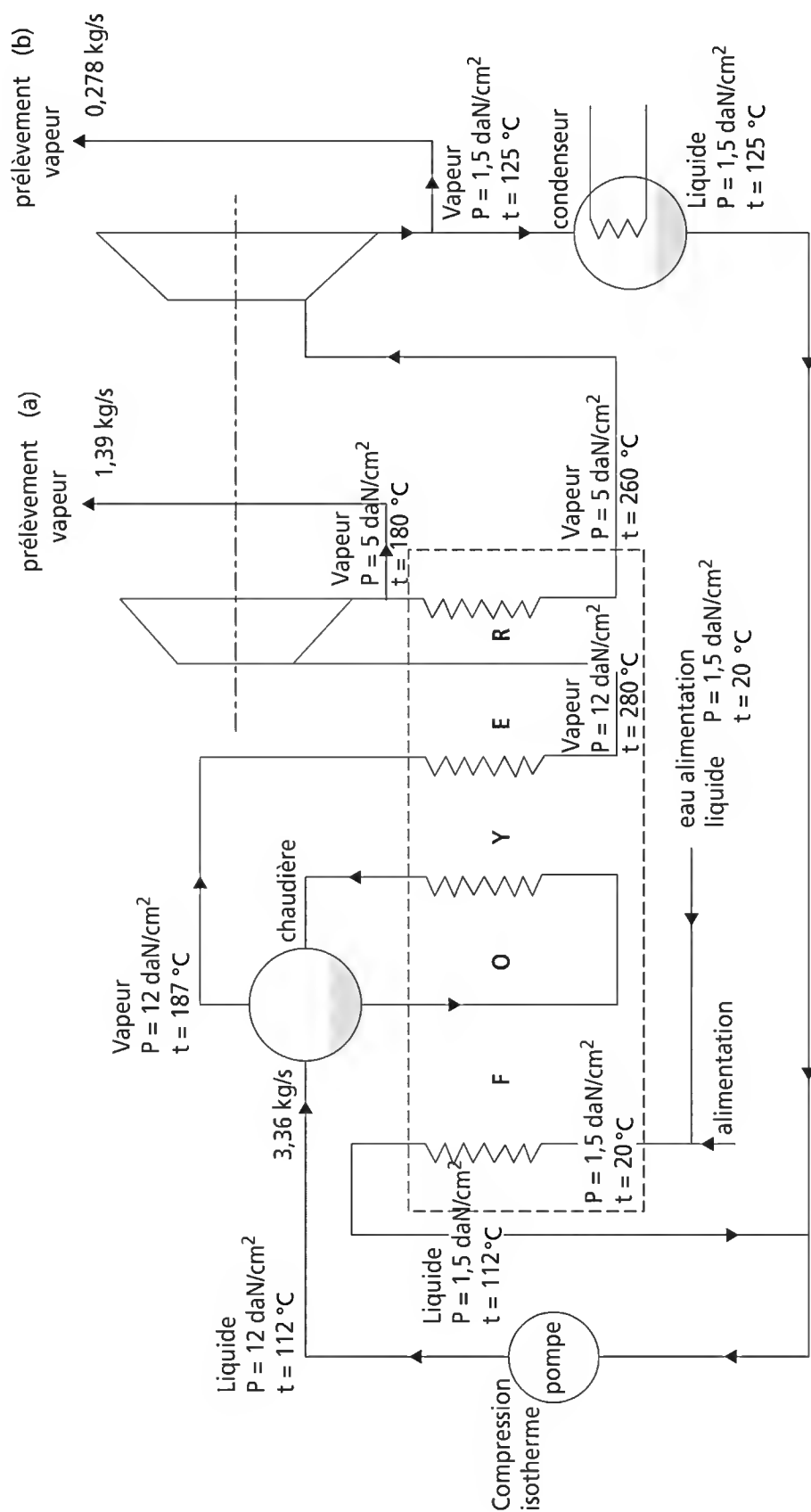


Figure 17.23

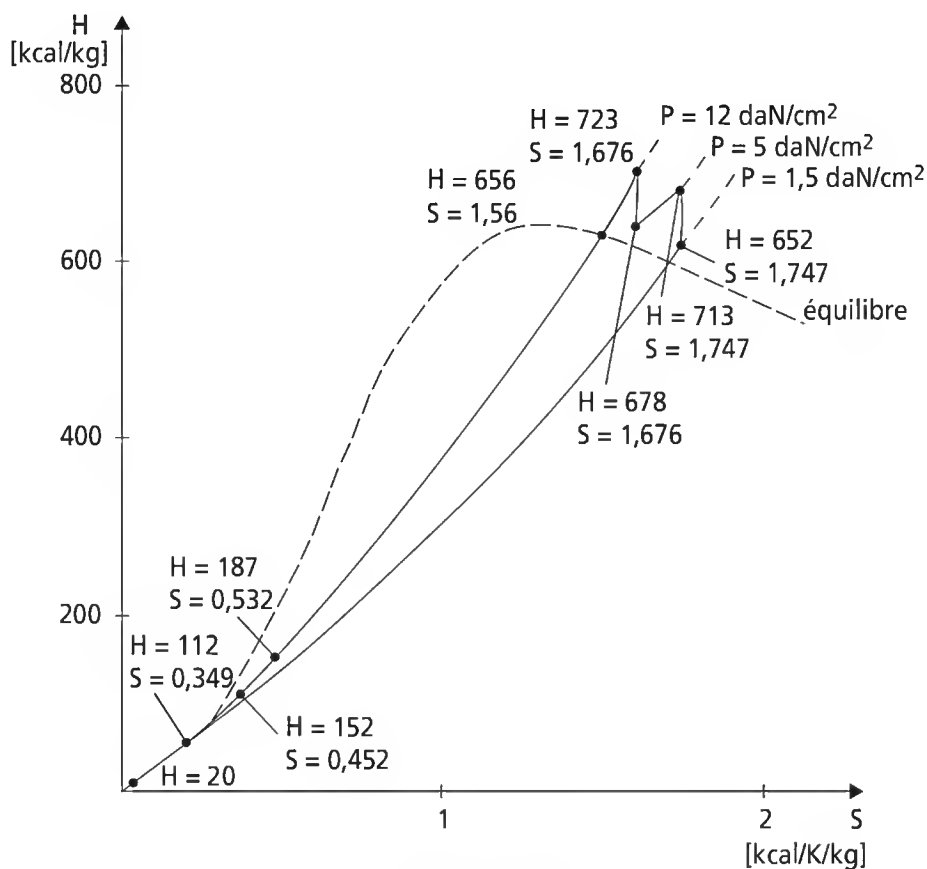


Figure 17.24

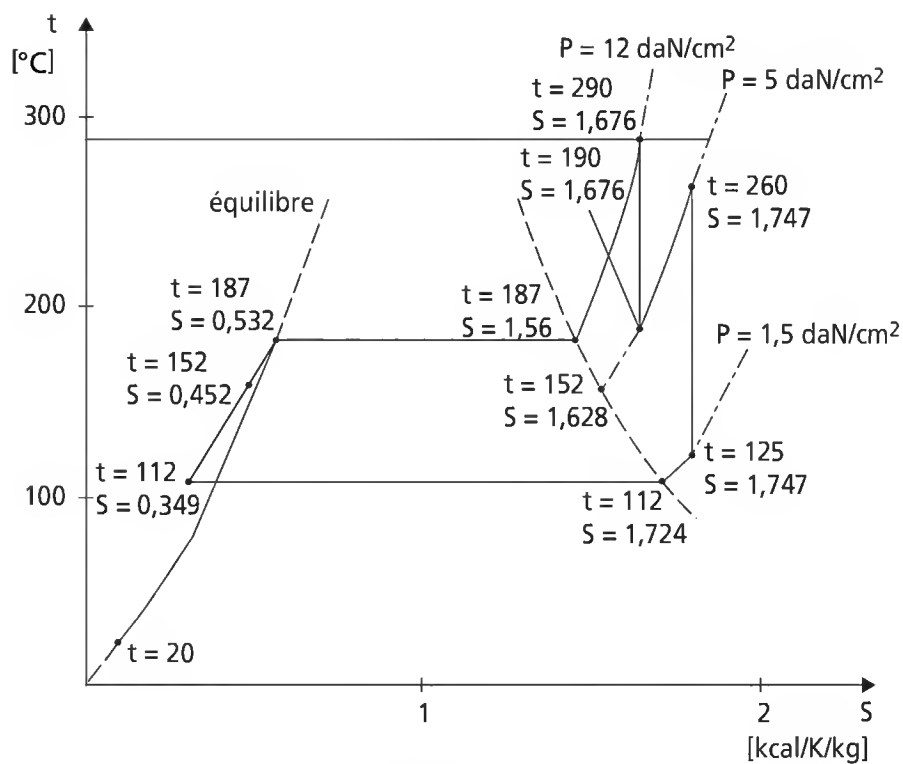


Figure 17.25

Débit total de chaleur à la chaudière :  $a + b + c + d = 2\,248,8 \text{ kcal/s} + 25,6 = 2\,274,4 \text{ kcal/s}$ .

**Remarque :** Lorsqu'on ajoute l'eau de complément, la chaudière doit fournir  $153,4 \text{ cal/s}$ , or on peut récupérer au condenseur :

$$(652 - 112) (3,36 - 1,39 - 0,278) = 540 \times 1,692 = 912 \text{ kcal/s}.$$

Donc on peut envoyer directement l'eau de complément à  $20^\circ\text{C}$  dans le condenseur où elle se mélange à l'eau qui se condense ; la chaleur nécessaire pour élever l'eau de complément à  $112^\circ\text{C}$  étant fournie par la condensation de l'eau sortant de la turbine basse pression, on économise ainsi  $153,4 \text{ kcal/s}$  et le débit de chaleur à la chaudière n'est plus que de  $2\,121 \text{ kcal/s}$ .

### 17.4.2 Mélange d'air humide

On mélange une masse  $m_1 = 150 \text{ kg}$  d'air saturé à  $t_1 = 15^\circ\text{C}$  avec une masse  $m_2 = 300 \text{ kg}$  d'air humide à  $t_2 = 30^\circ\text{C}$  et  $90\%$  d'humidité relative.

1. On précise l'état du mélange et, s'il y a condensation, la masse d'eau qui condense.
2. On détermine la quantité de chaleur qu'il faut fournir au mélange pour l'amener à saturation et celle nécessaire pour amener à une humidité relative de  $70\%$  le même mélange.

Les mélanges se font sous la pression atmosphérique supposée constante.

Mélange d'air humide

1. Positionnement des points sur le diagramme

$$t_1 = +15^\circ\text{C} \quad \varepsilon_1 = 1,00 \quad \omega_1 = 0,0107 \text{ kg/kg air sec}$$

$$t_2 = +30^\circ\text{C} \quad \varepsilon_2 = 0,90 \quad \omega_2 = 0,0247 \text{ kg/kg air sec}$$

$m_{a1}, m_{a2}$  masses d'air sec dans  $m_1$  et  $m_2$

M, point de mélange  $\Rightarrow$  règle des segments proportionnels inverses.

$$\frac{m_{a1}}{m_{a2}} = \frac{\overline{M2}}{\overline{1M}}$$

$$\text{avec : } m_{a1} = \frac{m_1}{1 + \omega_1}, m_{a2} = \frac{m_2}{1 + \omega_2}.$$

$$\Rightarrow \frac{m_{a1}}{m_{a2}} = \frac{\overline{M2}}{\overline{1M}} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{1 + \omega_2}{1 + \omega_1} = \frac{150}{300} \cdot \frac{1,0247}{1,0107} = \frac{1}{1,973}$$

d'où l'application numérique :

$$\frac{\overline{M2}}{1M} = \frac{\omega_2 - \omega_M}{\omega_M - \omega_1} \quad \omega_M = \omega_2 - \frac{\omega_2 - \omega_1}{1,973} = 0,0177 \text{ kg/kgas}$$

Conclusion :

- le point M est dans la zone de brouillard ;
- la température  $t_M$  du mélange correspond à la température de saturation (lue sur le diagramme : 22,5 °C) ;
- l'humidité absolue correspondante à saturation vaut : 0,0174 kg/kgas ( $\omega_3$ ) ;
- la masse condensante par kgas vaut :

$$\omega_M - \omega_3 = 0,0177 - 0,0174 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg/kgas}$$

Soit pour le mélange  $(\omega_M - \omega_3)(m_{a1} + m_{a2})$

## 2. Chaleur à fournir

Déplacement à  $\omega_M = cte$  :  $MM'$   $M' = 4(t_4 = 23 \text{ °C})$

$$Q_{M4} = (m_{a1} + m_{a2})(h_4 - h_M) \text{ avec } h_4 - h_M \sim 16,4 - 16 = 0,4 \text{ kcal/kgas}$$

pour une humidité relative de 70 %  $MM''$   $M'' = 5(t_5 = 28,8 \text{ °C})$

$$Q_{M5} = (m_{a1} + m_{a2})(h_5 - h_M) \text{ avec } h_5 - h_M \sim 17,8 - 16 = 1,8 \text{ kcal/kgas}$$

On s'aidera de diagramme de l'air humide (annexe 4).

### 17.4.3 Application de l'étagement aux séchoirs

On étudie un séchoir à 3 étages permettant d'extraire  $D_e = 800 \text{ kg/h}$  d'eau, avec une température seuil pour l'air  $t_3 = 70 \text{ °C}$ .

L'air en 1 a une température sèche de 18 °C et une température humide de 13,5 °C ( $\varepsilon_1 = 0,605$ ). Les états 2, 2', 2'' correspondent à  $\varepsilon_2 = 0,9 = \varepsilon_2' = \varepsilon_2''$ .

D'où l'on déduit du diagramme

TABLEAU 17.4

Points	t °C	$\varepsilon$	$\omega$ kg/kg d'air sec	h kcal/kg d'air sec
1	18	0,605	0,0080	9,2
3	70	0,040	0,0080	21,8
2,1'	29,6	0,900	0,0242	21,8
3'	70	0,120	0,0242	32,0
2', 1''	36,9	0,900	0,0378	32,0

TABLEAU 17.4

Points	t °C	$\varepsilon$	$\omega$ kg/kg d'air sec	h kcal/kg d'air sec
3''	70	0,180	0,0378	40,5
2''	41,8	0,900	0,0498	40,5

Débit spécifique d'air :  $\frac{Da}{De_T} = \frac{1}{\omega_{2''} - \omega_1} = 23,9 \text{ kg/kg d'eau}$

Puissance calorifique spécifique :  $\frac{\sum \Delta Qi}{De_T} = \frac{h_{2''} - h_1}{\omega_{2''} - \omega_1} = 750 \text{ kcal/kg d'eau}$

Le débit d'eau à extraire étant de 800 kg/h.

Le débit d'air  $Da$  est de 19 150 kg/h et la puissance calorifique correspondante de 600 000 kcal/h ( $\Delta Q_T$ ).

Le dimensionnement des étages en résulte.

Au 1<sup>er</sup> étage :

$$D_e = Da(\omega_2 - \omega_1) = 310 \text{ kg/h}$$

$$\Delta Q = Da(h_3 - h_1) = 241\,500 \text{ kcal/h}$$

Au 2<sup>nd</sup> étage :

$$D_{e'} = Da(\omega_{2''} - \omega_2) = 260 \text{ kg/h}$$

$$\Delta Q' = Da(h_{3'} - h_2) = 195\,500 \text{ kcal/h}$$

Au 3<sup>e</sup> étage :

$$D_{e''} = Da(\omega_{2''} - \omega_{2'}) = 230 \text{ kg/h}$$

$$\Delta Q'' = Da(h_{3''} - h_{2'}) = 163\,000 \text{ kcal/h}$$

Le même séchage effectué en un seul étage aurait nécessité un débit spécifique d'air

$$\frac{Da}{D_{e_T}} = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} = 61,6 \text{ kg/kg d'eau} \text{ soit un débit d'air multiplié par 2,56, pour une puis-}$$



sance calorifique spécifique de  $\frac{\Delta Q_T}{D_{e_r}} = \frac{h_3 - h_1}{\omega_2 - \omega_1} = 778 \text{ kcal/kg d'eau}$  en augmentation de 3,8 %.

## BIBLIOGRAPHIE

- CAUDRON L., *Les réfrigérants atmosphériques industriels*, Collection DER-EDF, n° 74, Eyrolles, 1991.
- FERNANDES J.L.M., Fast evaluation of thermodynamic properties of superheated steam : a cubic equation of state, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 16, n° 1, p. 71-79, 1996.
- KNOCHE K.F., F. Bosnjakovic and his world of thermodynamic charts demonstrated for selected processes with humid air, *Proc. Of ECOS 2002*, Berlin, Germany, p. 7-13, July 3-5 2002.

## Chapitre 18

---

# Conversion et stockage d'énergie

### 18.1 INTRODUCTION

#### 18.1.1 Énergies flux – énergies stock

La conversion d'énergie thermique-mécanique à travers une combustion est la conversion la plus standard. Elle utilise des énergies fossiles : initialement, le bois (biomasse) puis les énergies fossiles de type charbon, pétrole, gaz et plus récemment les minerais nucléaires.

Toutefois, l'eau et le vent ont aussi aidé l'homme dans ses activités, grâce aux moulins.

#### 18.1.2 De la combustion à l'énergie nucléaire

La combustion, conversion de l'énergie chimique en énergie calorifique a été examinée au chapitre 16. Celle-ci est actuellement complétée dans l'usage centralisé par la conversion de la matière (défaut de masse) en énergie calorifique ; on examine ainsi dans un premier temps (paragraphe 18.2) l'énergie nucléaire, énergie fossile la plus récemment maîtrisée sous la forme fission nucléaire et avec en devenir la fusion nucléaire.

#### 18.1.3 Des énergies fossiles vers les énergies renouvelables

L'énergie solaire pourra aussi apporter un complément non négligeable en particulier sous forme thermique (paragraphe 18.3), mais pas uniquement (énergie photovoltaïque : paragraphe 18.4.2).

Le retour annoncé de l'énergie solaire différée, sous la forme d'énergie hydroélectrique et éolienne (chapitre 14) font que le développement de l'éolien est en cours, et que la mini ou micro-hydraulique devrait suivre.

Il ne faut pas oublier pour autant d'autres possibilités : la géothermie, l'énergie des océans (sous diverses formes).

### 18.1.4 Énergies flux et stockage

Les énergies flux sont très souvent diffuses et donc plus adaptées à l'utilisation dans l'habitat ; l'adaptation de la disponibilité à la demande s'impose alors et fait intervenir un stockage (paragraphe 18.5).

Le stockage le plus simple intervient à travers la biomasse (combustible bois, mais pas uniquement). C'est le cas de la filière des biocombustibles, avec son corollaire, les biocarburants pour l'application aux transports.

Le stockage des énergies constitue un enjeu important pour l'avenir, faisant appel à une problématique scientifique plus complexe que le régime dynamique stationnaire, puisque fondamentalement transitoire ; quelques illustrations en sont rapportées ici (paragraphe 18.3.2.d).

## 18.2 ÉNERGIE NUCLÉAIRE

### 18.2.1 Éléments de physique nucléaire

#### a) Noyaux atomiques

##### ► Constitution d'un noyau

Toute matière est constituée d'atomes comportant un cortège électronique entourant un noyau ; le noyau d'un atome est caractérisé par un nombre de masse  $A$ , et un nombre atomique  $Z$ . Le noyau est en effet constitué de deux espèces de nucléons : les protons ( $Z$  protons), les neutrons ( $A - Z$  neutrons).

**Exemple :**  $He_2^4$ , hélium (dit aussi particule  $\alpha$ ) :  $A = 4$  ;  $Z = 2$ .

L'expérience de Rutherford (diffusion) a permis de montrer que :

$$R = R_0 A^{1/3}$$

le volume du noyau étant proportionnel à  $A$ , avec  $R_0$ , rayon nucléaire élémentaire  $= 1,510^{-13}$  cm et  $M$ , masse du noyau :  $M = A,710^{-24}$  g

La stabilité des noyaux est assurée par des forces d'attraction nucléaire (forces à très court rayon d'action) et des forces de répulsion coulombiennes.

**Remarque :** il y a lieu de différencier l'état fondamental des états excités (isomères). Exemple :  $Li_3^7$  ;  $Li_3^{7*}$

► Unité de masse nucléaire (UM)

L'unité de masse est définie comme le  $1/12^e$  de la masse de l'isotope  $C_6^{12}$  d'un atome de carbone dans son état fondamental :

$$1UM = 1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

**Remarque 1 :** on en déduit la masse du proton  $m_p$  et du neutron  $m_n$  :

$$m_p = 1,007 \text{ UM} ; m_n = 1,008 \text{ UM} .$$

**Remarque 2 :** énergie équivalente à 1 UM

$$w = \frac{c^2}{N} = 931,494 \text{ Mev (avec } N = 6,023 \cdot 10^{23})$$

► Défauts de masse

$\Delta M$  correspond à l'énergie dégagée lors de la formation du noyau à partir de ces constituants :

$$\Delta M = Zm_p + (A - Z)m_n - M$$

Ce défaut de masse correspond à l'énergie de liaison des A nucléons :

$$W = c^2 \cdot \Delta M$$

L'énergie moyenne de liaison d'un nucléon dans le noyau peut se calculer conformément à :

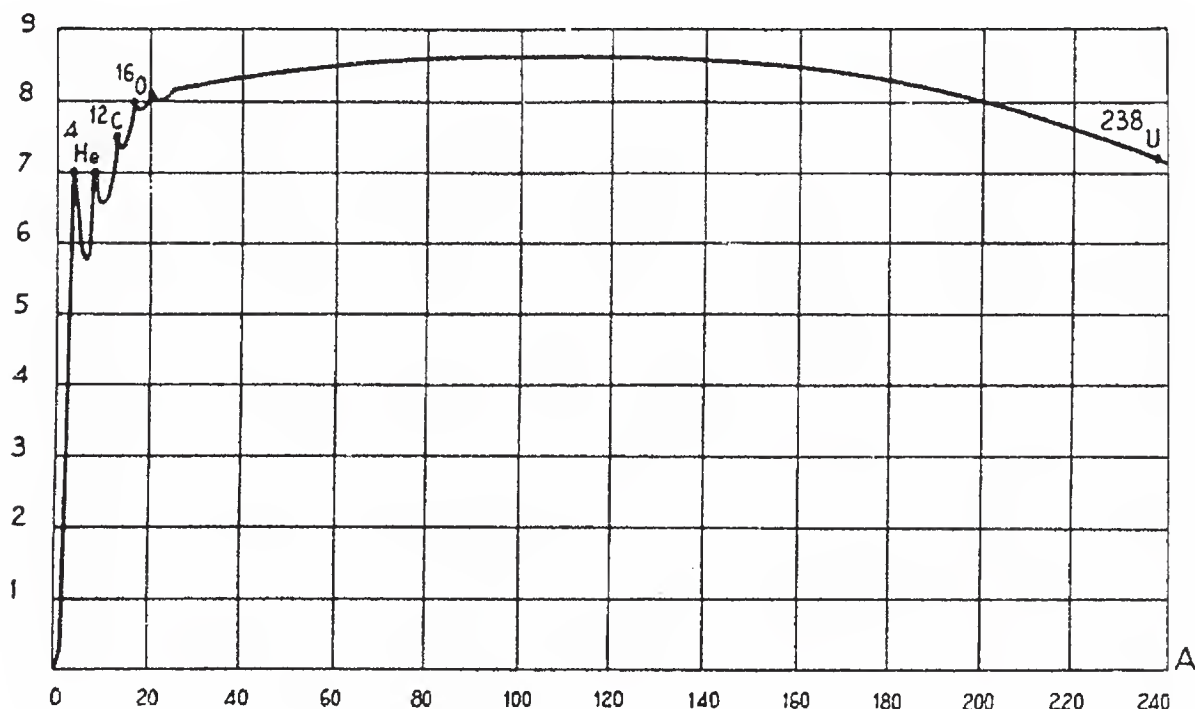
$$\bar{w} = \frac{W}{A} = 931,14 \left( 1,00898 - \frac{M + 0,00139Z}{A} \right)$$

La figure 18.1 représente l'évolution de  $\bar{w}$ , en fonction de A.

**Remarque 1 :** le noyau est d'autant plus stable que A est grand.

**Remarque 2 :** à A donné, correspond souvent un seul noyau stable.

**Remarque 3 :** si A pair, et s'il existe  $t$  noyaux stables, ils sont dits isobares.

Figure 18.1 Courbe  $\bar{w}$  en fonction de A

La figure 18.2 représente le diagramme des noyaux stables. Si  $Z < 20$ , les noyaux les plus stables correspondent à  $\frac{N}{Z}$  voisin de 1.

Si  $Z > 20$ , les noyaux ont moins de protons ; si  $\frac{N}{Z}$  est trop grand, apparaît une radioactivité  $\beta^-$  (émission d'un électron) ; si  $\frac{N}{Z}$  est trop petit apparaît une radioactivité  $\beta^+$  (capture d'un électron).

On dénombre :

- 166 noyaux stables avec A pair, dont les noyaux légers avec  $Z = N$  :  $H_1^2, Li_3^6, B_5^{10}, N_7^{14}$  (nombre impair de protons) ;
- 108 noyaux stables avec A impair : 56 avec Z pair, N impair, 52 avec Z impair, N pair.

**Remarque :** les noyaux stables impair-impair sont très rares.

Il ressort aussi des nombres dits magiques (2, 8, 20, 50, 82, 126) correspondant aux nucléons groupés par paire (proton-proton, ou neutron-neutron), associés à des noyaux très stables.

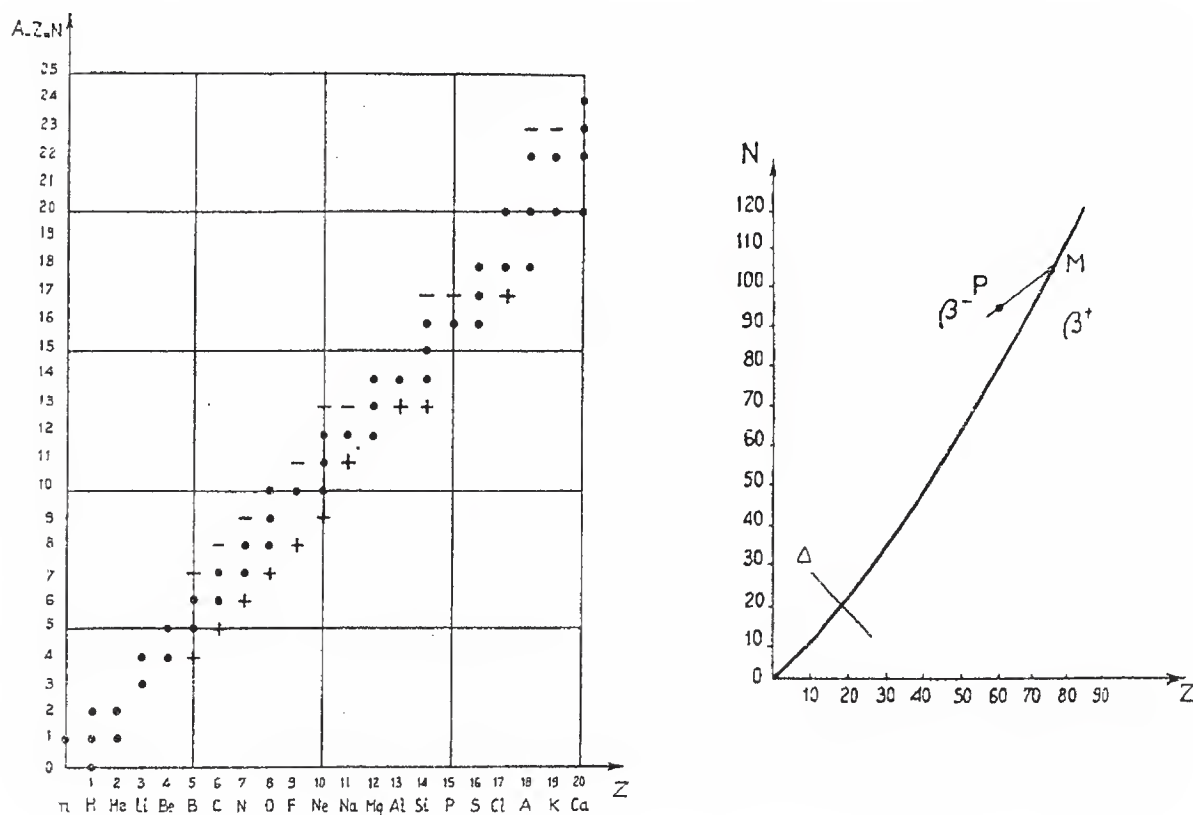


Figure 18.2 Diagrammes des noyaux stables

### ► Forces nucléaires

Les expériences de Rutherford, puis la quasi-constance de  $\frac{W}{A}$ ,  $\forall A$  (non proportionnalité à  $(A - 1)$ , pour des interactions binaires) conduisent à l'existence d'une saturation des forces nucléaires : forces d'échange.

Par extension du principe de Pauli, une orbitale est occupée par quatre nucléons (1 paire de protons, 1 paire de neutrons à spins antiparallèles).

**Exemple :**  $He_2^4$ ,  $C_6^{12}$ ,  $O_8^{16}$ , ...

### *Théorie des forces nucléaires*

Par analogie au champ électromagnétique associé aux photons, Yukawa (1935) a supposé le champ nucléaire associé à des corpuscules de masse  $m_o$  ; ces particules de masse  $m_o$  valant 200 à 300 fois celles de l'électron sont appelées mésons.

**Remarque :** les mésons  $\mu$  ont été découverts en 1937 ; les mésons  $\pi$  en 1947 (rayons cosmiques).

La force associée aux mésons est négligeable si  $d \geq 10^{-12}$  cm. Les interactions nucléaires correspondent aux mésons  $\pi$  (spin 0 ; charge  $\pm e$  ou 0,  $m_o = 237.m_{e-}$ ).

► Formule semi-empirique de la masse

Cette relation due à Weizsäcker donne l'expression du défaut de masse  $\Delta M$ , en fonction de 5 coefficients ajustés par l'expérience ; elle est valable pour 300 noyaux stables ou instables à l'état fondamental.

*Liaison du nucléon à ses proches voisins*

W proportionnel à A ;  $\Delta M_1 = a_1 A$

*Liaisons des nucléons superficiels moins fortes que les liaisons internes*

Leur nombre est proportionnel à  $R^2$ , soit  $A^{2/3}$  (R, rayon du noyau). D'où  $\Delta M_2 = -a_2 A^{2/3}$ .

**Remarque :**  $\frac{WZ}{A} \sim A^{-1/3}$  est fonction décroissante de A (courbe montante pour A faible).

*Forces de répulsion coulombienne*

Ces forces diminuent l'énergie de liaison de  $\frac{1}{Z} \sum_Z qV$ . L'approximation de  $W_3$  suppose la charge Ze uniformément répartie sur la sphère de rayon R :  $W_3 = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R}$ . D'où :  $\Delta M_3 = -a_3 Z^2 A^{-1/3}$ .

**Remarque :**  $\frac{W_3}{A} \sim -Z^2 A^{-1/3}$  ; il correspond à ce terme une allure descendante de la courbe à A grand.

*Excès de neutrons des noyaux moyens et lourds*

Cet excès conduit à une diminution de la force coulombienne et de l'énergie de liaison (N – Z neutrons sur orbitales, à défaut de protons) :  $\Delta M_4 = -a_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A}$ .

**Remarque :** ce terme s'annule pour A = 2Z ou N = Z.

*Présence des nucléons célibataires*

Cette présence liée à la parité de A, Z, N se traduit par un effet de spin du noyau, représenté par  $\delta(A, Z)$ , avec :

$\delta(A, Z) = 0$ , si A impair ;

$\delta(A, Z) > 0$ , si Z, N pairs ;

$\delta(A, Z) < 0$ , si Z, N impairs ;

Au final,  $\Delta M = a_1 A - a_2 A^{2/3} - a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_4 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta(A, Z)$

Avec  $M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - \Delta M$

L'ajustement sur les expériences fournit :

$$M(A, Z) = 0,99391A - 0,00139Z + 0,0140A^{2/3} + 0,00627 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 0,0207 \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta(A, Z)$$

avec  $\delta(A, Z) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ impair} \\ (-1)^Z \cdot 0,036 A^{-3/4} & \text{si } A \text{ pair} \end{cases}$

**Remarque 1 :** cette relation est précise si  $A > 15$ .

**Remarque 2 :**  $\Delta M$  correspond à  $W$  exprimé en Mev sous la forme :

$$W_{\text{Mev}} = 14,0A - 13,05A^{2/3} - 0,585Z^2 A^{1/3} - 19,3Z(A-2Z)^2 A^{-1} + (-1)^Z 33,5A^{-3/4}$$

### b) La radioactivité

Les transformations radioactives traduisent le phénomène nucléaire lié à l'instabilité du noyau (passage d'un noyau instable à un noyau stable) ; la transformation spontanée d'un radioélément se produit avec émission de rayonnement (particules  $\alpha$ ,  $\beta$ , photons  $\gamma$ ).

La radioactivité naturelle a été découverte par H. Becquerel (1896) avec l'uranium, puis Pierre et Marie Curie (1898), pour le thorium, polonium, radium (radium :  $Z = 88$ ,  $A = 226$ ).

Les particules émises sont les particules  $\alpha$  et  $\beta^-$ .

Les radioéléments artificiels résultent de transmutations (alchimie !). Leur découverte est due à Frédéric et Irène Joliot-Curie (1932).

Les particules émises sont des  $\beta^+$  essentiellement.

Les familles radioactives dont les éléments radioactifs naturels se répartissent en trois grandes familles :

Famille du radium  $Ra_{88}^{226}$ , avec  $A = 4n + 2$

Famille de l'actinium  $Ac_{89}^{227}$ , avec  $A = 4n + 3$

Famille du thorium  $Th_{90}^{232}$ , avec  $A = 4n$

On notera que chaque famille a pour origine un élément radioactif naturel faible, successivement ( $U_{92}^{238}$  pour le radium ;  $U_{92}^{235}$  pour l'actinium ;  $Th_{90}^{232}$  pour le thorium). Les radioéléments artificiels correspondent à  $A = 4n + 1$ . L'élément final stable est un isotope du plomb.

Sur le tableau périodique (tableau 18.1), une flèche horizontale correspond à une désintégration  $\alpha$ , une flèche oblique à une désintégration  $\beta^-$ . Le tableau pourrait être complété pour les éléments transuraniens ( $Z > 92$ ).



**Remarque :** il existe des gaz radioactifs isotopes de l'élément  $Z = 86$  (famille des gaz rares) : radon  $Rn_{86}^{222}$ , émanation du radium ; actinon  $An_{86}^{219}$ , émanation de l'actinium ; thoron  $Tn_{86}^{220}$ , émanation du thorium.

### ► Constante radioactive et période

En appelant  $\lambda$  la constante radioactive de l'élément considéré, sa désintégration entre  $t$  et  $t + dt$  est donné par :

$$dn = -n.\lambda.dt$$

$\lambda$  s'exprime en  $s^{-1}$ .

Par intégration, on obtient le nombre de noyaux à l'instant  $t$  :

$$n = n_0 e^{-\lambda t}$$

La probabilité  $P$  de désintégration d'un atome pendant  $dt$  vaut  $P = \lambda dt$ . Elle est supposée constante  $\forall t$ .

*Durée de vie moyenne  $\tau$ , d'un atome radioactif*

Cette durée de vie est déterminée conformément à :

$$\tau = \frac{1}{n_0} \int_0^{\infty} t.dn$$

L'expression finale de  $\tau$  est :

$$\tau = \int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda}$$

*Période  $T$  d'un élément radioactif*

$T$  est le temps au bout duquel une masse donnée a été réduite de moitié.

$$\text{Ainsi } T = \tau \ln 2 = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Exemples : pour  $U_{92}^{238}$ ,  $T = 4,610^6$  années

Radium,  $T = 1\,620$  ans

Radon,  $T = 3,82$  jours

$$Po_{84}^{212}, T < 10^{-6} s$$

D'autres valeurs figurent dans le tableau 18.1.

*Équilibre radioactif*

Cette notion d'équilibre intervient pour des désintégrations en chaîne. Exemple : désintégration en chaîne du radium.



TABLEAU 18.1

Tl 81	Pb 82	Bi 83	Po 84	At 85	Em 86	Fr 87	Ra 88	Ac 89	Th 90	Pa 91	U 92
208 3,01 m	208 Stable	212 3.10 <sup>-7</sup> s	212 1 h		(Thoron) 220 54,5 s		224 3,64 j		228 1,90 a		
	212 10,6 h	216 0,14 s					228 6,13 h	228 6,7 a	232 1,39 10 <sup>10</sup> a		
FAMILLE DU THORIUM A = 4 n											
207 4,76 m	207 Stable	211 5.10 <sup>-13</sup> s	211 2,16 m		(Actinon) 219 3,92 s		223 11,4 j		227 18,9 j		
	211 36,1 m	215 2.10 <sup>-3</sup> s					227 13,5 a	227 13,5 a	232 3,2 10 <sup>4</sup> a		
FAMILLE DE L'ACTINIUM A = 4 n + 3											
	206 Stable	(Polonium) 210 140 j	210 5 j								
	210 22 a	214 1,5 10 <sup>-4</sup> s	214 19,7 m		(Radon) 222 3,83 j		226 1620 a		(Ionium) 230 8,3 10 <sup>4</sup> a		
210 1,32 m	214 26,8 m	218 3,05 m							234 12,7 10 <sup>5</sup> a		
FAMILLE DU RADIUM A = 4 n + 2											
									234 1,14 m		
									234 24, 1 j		
										238 4,56 10 <sup>9</sup> a	

On supposera à  $t = 0$ , un récipient clos contenant Ra, sans émanation (conditions initiales).

À un instant  $t \neq 0$ , on a  $n$  noyaux de Ra, et  $n'$  noyaux de radon.

Pour le radon pendant  $dt$ , il vient :

$$dn_1' = -dn = n\lambda dt \quad (\text{création})$$

$$dn_2' = -n'\lambda' dt \quad (\text{disparition})$$

D'où la variation  $dn'$  du nombre d'atomes de radon :

$$dn' = dn_1' + dn_2' = (n\lambda - n'\lambda')dt$$

Soit :

$$\frac{dn'}{dt} + n'\lambda' = \lambda n_0 e^{-\lambda t}$$

Par intégration, il vient avec les conditions initiales imposées :

$$n' = \frac{\lambda n_0}{\lambda' - \lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda' t})$$

où :

$$\frac{n'}{n} = \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} [1 - e^{-(\lambda' - \lambda)t}]$$

$$\text{à temps long : } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n'}{n} = \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda} = \frac{T'}{T - T'}$$

L'émanation est en équilibre avec son élément radioactif.

**Remarque :**  $\frac{n'}{n}$  est un rapport de masses mesurable ; si  $T'$  est facilement mesurable, on en déduit  $T$ .

**Exemple :** dans le cas du radium  $\frac{n'}{n}$  à temps long  $= \frac{T'}{T}$  ; la masse de radon en équilibre avec 1 g de radium vaut  $6 \cdot 10^{-6}$  g (1 curie) ; l'équilibre est atteint à  $10^{-3}$  près en un mois.

### ► Étude succincte des rayonnements

#### Rayonnement $\alpha$

Il est mis en évidence par l'existence des raies de l'hélium (spectroscopie) et (ou) un rapport  $\frac{q}{m} He_2^4$  double de  $\frac{q}{m} He_1^2$  (spectroscopie de masse).

La vitesse d'émission des particules  $\alpha$  varie selon les éléments radioactifs entre 14 000 et 25 000 km/s (3 à 10 Mev).

En fin de parcours, les particules  $\alpha$  sont transformées en atome d'hélium et participent à l'agitation thermique des molécules gazeuses ; l'énergie cinétique dissipée sous forme de chaleur représente 90 % de l'énergie de désintégration (le complément provient des rayons  $\beta$  et  $\gamma$ ).

*Modèle de désintégration  $\alpha$* 

La réaction s'écrit :  $X_Z^A \rightarrow X_{Z-2}^{A-4} + He_2^4$

Elle est possible si :  $MX_Z^A > MX_{Z-2}^{A-4} + MHe_2^4$

ou :  $\Delta M_{A-4} + \Delta M_{He} - \Delta M_A > 0$ .

Cette condition est vraie pour les noyaux lourds.

*Radioactivité  $\beta$* 

Elle fait intervenir des électrons dont la vitesse est comprise entre 0,4 et 0,8 c.

La radioactivité  $\beta^+$  suppose  $M_i - M_f > m_o$ , avec  $m_o$ , masse de l'électron ( $9.10^{-31}$  kg).

**Remarque :** dans certaines configurations, il peut y avoir capture d'un électron du cortège électronique (en particulier la couche interne K).

*Radioactivité  $\gamma$* 

$\lambda = 10^{-2}$  ou  $10^{-3}$  Å est une longueur d'onde typique de ce rayonnement dur.

L'énergie associée est de l'ordre du Mev, conformément à

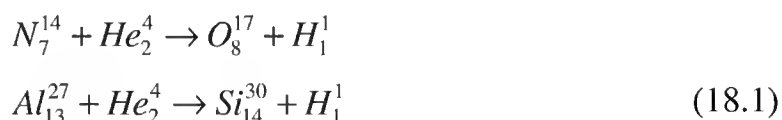
$E = h\nu$  ( $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J.s, constante de Planck).

**Remarque :** par comparaison, les rayons X (0,1 Mev) et visibles (2 ev) sont beaucoup moins énergétiques.

*c) Les réactions nucléaires**► Différentes réactions**Transmutation par rayon  $\alpha$* 

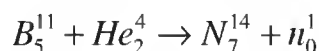
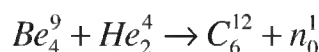
Ces réactions correspondent aux expériences de Rutherford ; elles se produisent dans les accélérateurs de particules (cyclotron, synchrocyclotron, accélérateur linéaire). Elles conservent la somme des A et la somme des Z.

Exemples :

*Réactions avec neutrons*

Ces réactions ont tout particulièrement été mises en œuvre par Chadwick.

Exemples :



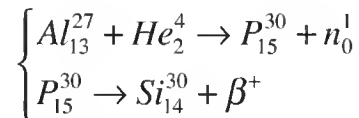
Les neutrons peuvent être rapides ou lents, associés à des états excités, thermiques (ou thermalisés), ou provenir de réaction  $\beta^-$  (période 10 min).

La masse du neutron  $m_n$  (1,00898) est supérieure à la masse du proton  $m_p$  (1,00759) augmentée de la masse de l'électron  $m_{e^-}$  (0,00055).

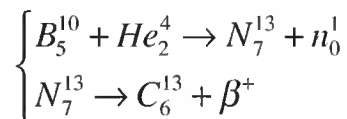
### Éléments radioactifs artificiels

Ceux-ci ont été introduits par Irène Curie et Frédéric Joliot (1933).

Exemples :



Cette réaction en chaîne est en place de (18.1).



Cette réaction en chaîne est en place de (18.2).

On généralise les exemples précédents sous la forme :

$$a + A \rightarrow B + b$$

où

$$A(a,b)B$$

avec a particule incidente ; b, particule émergente.

### Diffusion élastique, inélastique

$$a + A \rightarrow A + a$$

La diffusion élastique (choc élastique) conserve l'énergie cinétique et la quantité de mouvement.

La diffusion inélastique (choc mou) conserve la quantité de mouvement, mais pas l'énergie cinétique : perte d'énergie cinétique conformément à la relation suivante  $(M_{A^*} - M_A)c^2$ , avec :

$$a + A \rightarrow A^* + a$$

### ► Énergie de réaction nucléaire ; bilan

#### Conservation de l'énergie (de la masse) totale

Conformément aux relations générales précédentes, cette conservation s'écrit :

$$M_a + M_A + w_a + w_A = M_b + M_B + w_b + w_B$$

$M_i$  sont les masses au repos

$w_i$  sont les énergies cinétiques.

L'énergie de la réaction nucléaire  $Q$  s'exprime alors sous la forme :

$$Q = (w_B + w_b) - (w_a + w_A)$$

Exemple : soit la réaction  $Li_3^7 + H_1^1 \rightarrow He_2^4 + H_2^4$

$$\Delta M = [(M_a + M_A) - (M_B + M_b)] = [7,01639 + 1,00759 - 2 \times 4,00278] = 0,01842$$

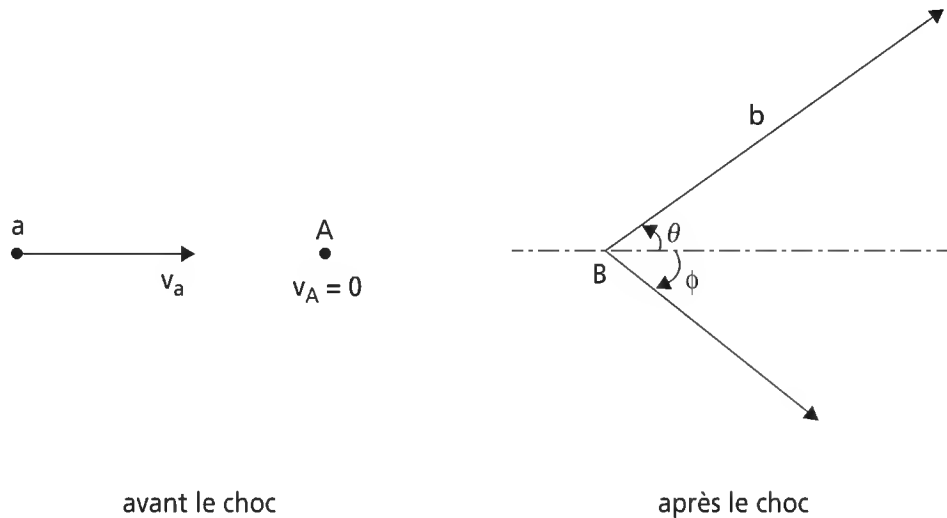
$$Q = c_0^2 \cdot \Delta M = 931,14 \Delta M = 17,18 \text{ Mev}$$

*Cas du noyau cible immobile*

Dans ce cas :

$$Q = w_B + w_b - w_a \quad (18.3)$$

La figure 18.3 représente les particules avant et après le choc.



**Figure 18.3** Choc sur noyau cible immobile ( $w_A = 0$ ).

Dans l'approximation newtonienne, il vient :

$$\begin{cases} M_a v_a = M_B v_B \cos \varphi + M_b v_b \cos \theta \\ M_B v_B \sin \varphi = M_b v_b \sin \theta \end{cases}$$

Par élimination de  $\varphi$ , il vient :

$$M_B^2 v_B^2 = M_a^2 v_a^2 + M_b^2 v_b^2 - 2M_a M_b v_a v_b \cos \theta$$

où :

$$M_B w_B = M_a w_a + M_b w_b - 2\sqrt{M_a M_b w_a w_b} \cdot \cos \theta$$

Cette relation permet d'éliminer  $w_B$  dans (18.3) qui s'écrit :

$$Q = w_b \left( 1 + \frac{M_b}{M_B} \right) - w_a \left( 1 - \frac{M_a}{M_B} \right) - \frac{2}{M_B} \sqrt{M_a M_b w_a w_b} \cdot \cos \theta$$

$Q$  est une fonction mesurable de  $v_a, v_b, \theta$ .

Le seuil d'une réaction endoénergétique ( $Q < 0$ )  $w_s$  correspond pour la particule incidente à  $\min w_a$ , tel que  $w_b = 0$  ; soit :

$$w_s = |Q| \frac{M_B}{M_B - M_a}$$

### Section efficace, absorption et libre parcours moyen

La section efficace  $\sigma$  d'une réaction est fournie conformément à :

$$\frac{dN}{N} = \sigma n_1$$

avec :

$n_1 = ndx$ , nombre de noyaux cible A par unité de surface

$n$ , nombre de noyaux cible par unité de surface

$N$ , nombre de particules incidentes a sur la lame cible par unité de surface et par unité de temps

$dN$ , nombre de particules ayant donné lieu à réaction.

La conséquence est l'absorption du faisceau de particules. En termes de flux I, il vient :

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dN}{N} = -\sigma ndx$$

Soit :

$$I = I_0 e^{-\sigma nx} \quad (18.4)$$

L'atténuation du faisceau est exponentielle.

Le nombre de particules de parcours compris entre  $x$  et  $x + dx$  vaut :

$$dN = N_0 \sigma n e^{-\sigma nx} dx$$

Le libre parcours moyen des particules s'en déduit conformément à :

$$\bar{x} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty x dN = \frac{1}{\sigma \cdot n}$$

En reportant dans (18.4), on trouve :

$$I = I_0 e^{-x/\bar{x}}$$

En conséquence, la mesure de l'atténuation fournit  $\bar{x}$  ; la connaissance de  $n$  fournit  $\sigma$ .

**Remarque 1 :** l'unité de  $\sigma$  est le barn qui vaut :  $10^{-24} \text{ cm}^2$ .

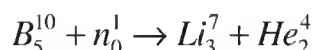
**Remarque 2 :**  $\sigma$  peut être une composée de plusieurs réactions  $k$ , conformément à :  $\sigma = \sum_k \sigma_k$ .

Réactions avec neutrons lents : les neutrons lents ont une énergie cinétique  $w_n$  inférieur à 1 keV (à 15 °C,  $\frac{3}{2}kT = 0,0372\text{eV}$ ).

Si  $Q \gg w_n$ , la loi de Fermi (1935) permet d'exprimer  $\sigma$  sous la forme :

$$\sigma_{\text{barns}} = f\left(\frac{1}{v}\right)$$

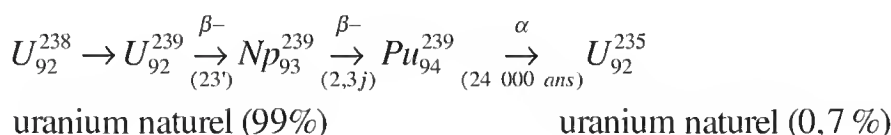
Exemple :



avec :  $\sigma = 4 \sqrt{\frac{10^3}{w_{n_{\text{ev}}}}}$ .

**Remarque :** la capture radiative a lieu avec les noyaux lourds ; l'absorption du neutron se fait souvent avec émission  $\gamma$ .

**Exemple de capture neutronique :**



## 18.2.2 Fission et énergie nucléaire

### a) La fission nucléaire

La fission nucléaire est le mécanisme qui conduit d'un noyau lourd à deux noyaux moyens, par une réaction exoénergétique.

L'énergie de réaction correspondante est approchée par :

$$Q \sim \frac{A - \varepsilon}{2} \cdot 8,5\text{Mev} + \frac{A + \varepsilon}{2} \cdot 8,5\text{Mev} - A \cdot 7,6\text{Mev} = 0,9A$$

**Exemple :** Pour  $A = 236$ , il correspond  $Q \sim 210 - 220\text{Mev}$  (valeur très grande).

#### ► Fission spontanée

La fission spontanée se produit par effet tunnel ; le mécanisme correspondant est illustré sur la figure 18.4 par analogie avec le modèle de la goutte.

**Exemple :**  $U_{92}^{238}$  ; cet atome connaît une fission spontanée pour  $2 \cdot 10^6$  désintégrations  $\alpha$ .

#### ► Fission provoquée par neutrons lents

Cette réaction se produit sur des éléments lourds ( $U_{92}^{235}, U_{92}^{233}, Pu_{94}^{239}$ ) ; 10 kg d'uranium (220 MeV) équivalent à la combustion d'environ 30 000 t de charbon.



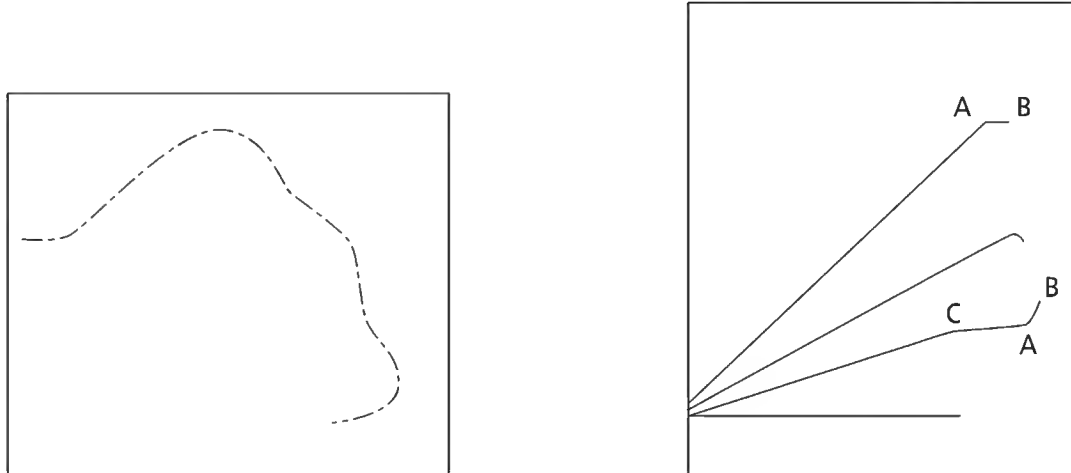
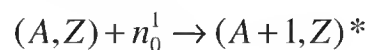


Figure 18.4 Fission ; mécanisme.

*Mécanisme de fission provoquée*

La réaction se représente sous la forme :



Soit d'un point de vue énergétique :

$$M_{A+1}^* = M_A + m_n + \frac{w}{c_o^2}$$

Il en résulte l'énergie d'excitation  $E = c_o^2(M_{A+1}^* - M_A)$ , qui peut s'écrire sous la forme :

$$E = W(A+1, Z) - w(A, Z) + w$$

avec  $w(Ai, Zi)$  fournis par la formule de Weizsäcker (paragraphe 18.2.1.a).

Si A impair, Z pair ( $U_{92}^{235}$ ),  $[w(236, 92) - w(235, 92)] = 6,5 \text{ Mev}$  ; en conséquence,  $E$  est toujours supérieur à 6 Mev ; la fission est toujours possible, même avec des neutrons thermiques.

Si A pair, Z impair ( $U_{92}^{235}$ ),  $[w(239, 92) - w(238, 92)] = 5,5 \text{ Mev}$  ;  $E$  est de l'ordre de 5 Mev +  $w$  ; il faut des neutrons rapides de faible valeur de  $\sigma$ .

Si A impair, Z impair ; ce cas n'est pas favorable à la fission.

En conclusion, les noyaux fissiles par des neutrons lents sont des noyaux à A impair et Z pair, peu abondants dans la nature ( $U_{92}^{235}$ ) ou produits artificiellement ( $Pu_{94}^{239}, U_{92}^{233}$ ).

*Réactions en chaîne*

Les réactions de fission sont couramment des réactions en chaîne ; en moyenne, une fission libère 2,5 neutrons. Cela a des conséquences dans la conception des réacteurs : réflecteur pour éviter la perte de neutrons (graphite), modérateur pour ther-

maliser les neutrons (augmente  $\sigma$ ) et éviter l'emballement de réaction (graphite, eau lourde).

### b) Les réacteurs à fission aujourd'hui

Les applications de la fission relèvent soit du domaine militaire, soit du domaine civil. On citera la bombe atomique, qui nécessite une masse critique de 10 kg d' $U^{235}$ .

Dans le domaine civil, les applications vont du domaine médical au domaine scientifique (datation par exemple).

Nous n'envisagerons ici que les applications dans les réacteurs nucléaires pour la production d'énergie électrique. Les réacteurs utilisent essentiellement l'uranium naturel et l'uranium enrichi ; le plutonium Pu est un sous-produit.

Plusieurs filières existent pour la production d'énergie électrique ; chaque filière est caractérisée tout particulièrement par :

- le combustible (uranium métallique ; MOX, oxyde mixte d'uranium et de plutonium) ;
- le modérateur (graphite, eau ordinaire, eau lourde qui a de meilleures qualités modératrices, mais est plus chère) ;
- le fluide caloporteur : eau lourde, eau ordinaire ; gaz carbonique, hélium ; sodium fondu.

### ► Les filières de réacteurs à neutrons thermiques

Les réacteurs les plus anciens sont des réacteurs modérés au graphite.

Les réacteurs modérés à l'eau lourde : l'eau lourde permet l'utilisation d'uranium naturel. L'économie de neutrons obtenue autorise une irradiation deux fois supérieure à celle des réacteurs à graphite précités.

Le rendement reste très voisin de celui de ces mêmes réacteurs, mais la puissance spécifique est beaucoup plus grande.

Ce type de réacteur est développé industriellement par le Canada sous le nom de filière CANDU (refroidissement par eau lourde  $D_2O$  sous pression) ; en Europe la centrale roumaine de Cernadova fonctionne sur ce principe.

Les réacteurs modérés à l'eau ordinaire : l'utilisation d'uranium enrichi et d'eau ordinaire (moins favorable du point de vue neutronique) conduit à des réacteurs plus simples et de petites dimensions. Typiquement, l'uranium est enrichi faiblement (3 à 4 %) sous forme d' $UO_2$ .

L'eau assure à la fois le rôle de modérateur et de réfrigérant. Il existe deux techniques pour le refroidissement avec des performances équivalentes ; ces deux techniques sont développées industriellement et correspondent à environ 80 % des centrales en activité.

La figure 18.5 représente un schéma d'une telle centrale, comportant un réacteur à eau bouillante (dit BWR).

On voit sur cette figure la cuve et la boucle de circulation forcée de chaudière ; la vapeur en provenance du réacteur est radioactive, soit directement, soit par contamination et nécessite une protection sur la turbine (rendement 35 %).

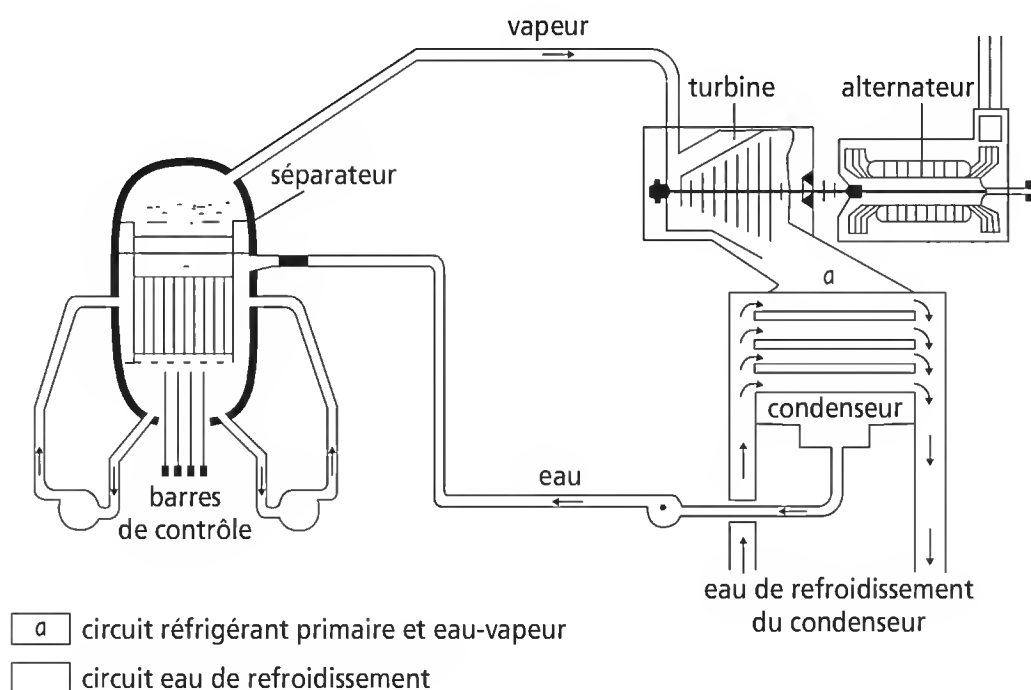


Figure 18.5 Schéma d'un réacteur à eau bouillante.

D'où la deuxième technique développée ci-après : les réacteurs à eau pressurisée (REP ou PWR).

### Réacteur à eau sous pression (REP)

Ce type de réacteur est le plus courant en usage en France actuellement. Il va être décrit en détail ; la figure 18.6 donne le schéma de principe d'une telle centrale.

Dans une centrale REP (réacteur à uranium enrichi modéré par de l'eau sous pression), le réfrigérant est maintenu à une pression supérieure à la pression de vapeur saturante et communique sa chaleur à de l'eau qui est transformée en vapeur dans un circuit distinct.

Circuit primaire : enfermé dans une grande cuve en acier, le cœur du réacteur constitue la source d'énergie. La partie active est formée d'assemblages combustibles : 264 crayons combustibles sous forme de pastilles d'oxyde d'uranium faiblement enrichi contenues dans un tube en zircaloy + 24 tubes guides pour la rigidité et un tube central pour l'instrumentation. Il y a 157 assemblages pour une tranche de 900 MW et 193 pour une tranche de 1 300 MW.

La réaction nucléaire est modérée par de l'eau ordinaire sous une pression d'environ 155 bars assurée par le pressuriseur, petite chaudière électrique contenant un mélange eau-vapeur en équilibre thermodynamique. La mise en œuvre de chauffefrettes électriques ou de dispositifs d'aspersion permet de régler la température du fluide, donc la pression exercée sur l'ensemble du circuit primaire. Ce circuit

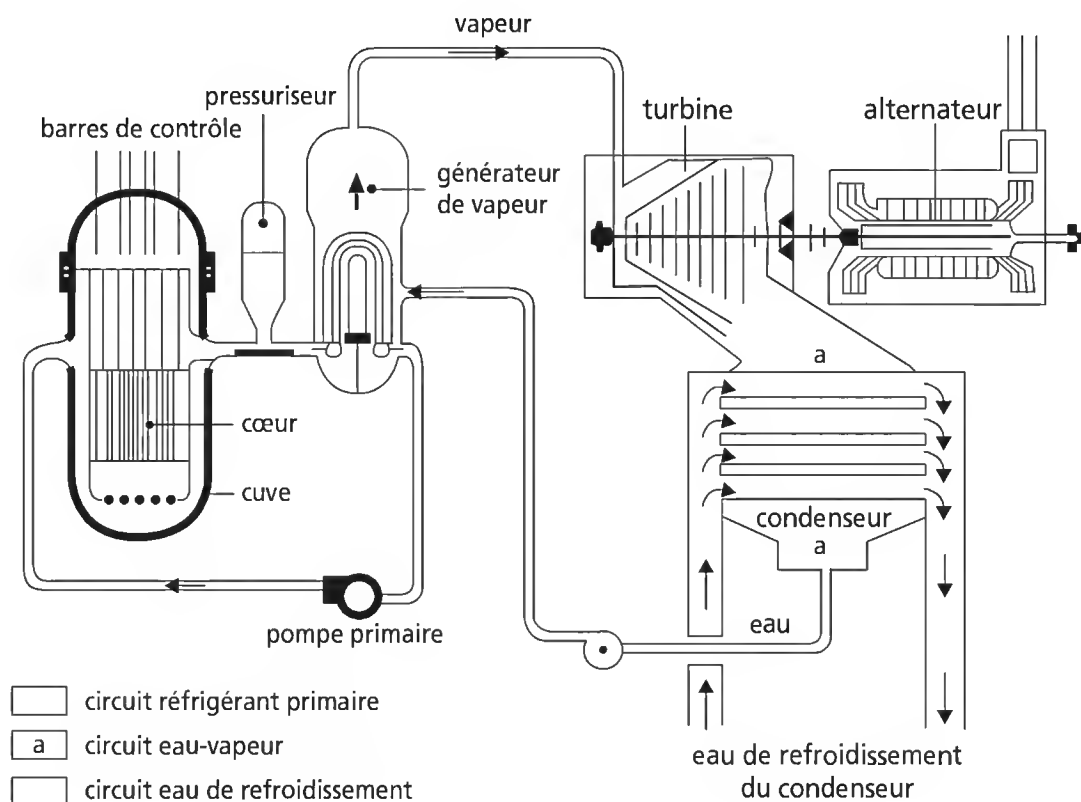


Figure 18.6 Schéma de principe d'une centrale à eau sous pression.

primaire comprend également les générateurs de vapeur dans lesquels la chaleur est transmise au circuit secondaire et les pompes primaires assurant la circulation de l'eau. Il comprend 3 boucles de refroidissement pour une tranche de 900 MW et 4 boucles pour une tranche de 1 300 MW. L'ensemble du circuit primaire est enfermé dans une enceinte en béton.

Dans le circuit secondaire, l'eau introduite dans les générateurs de vapeur y est vaporisée sous une pression de 56 bars environ et la vapeur produite est envoyée à la turbine principale qui entraîne l'alternateur. Après condensation, elle est reprise dans un poste d'eau d'où elle retourne aux générateurs de vapeur. Ce condenseur est refroidi par de l'eau prise directement dans une rivière ou provenant d'une tour de refroidissement (figure 18.7).

**Remarque :** hormis la cuve et le circuit primaire, la configuration des centrales nucléaires ne diffère pas des centrales à turbines à vapeur classiques (voir chapitre 17).

### Filière des réacteurs à neutrons rapides (RNR)

Les réacteurs à eau n'utilisent qu'environ 2 % du potentiel énergétique de l'uranium naturel ; dans les réacteurs à neutrons rapides (surgénérateurs), la totalité de l'uranium naturel peut être utilisée. C'est le premier avantage de ce type de réacteur

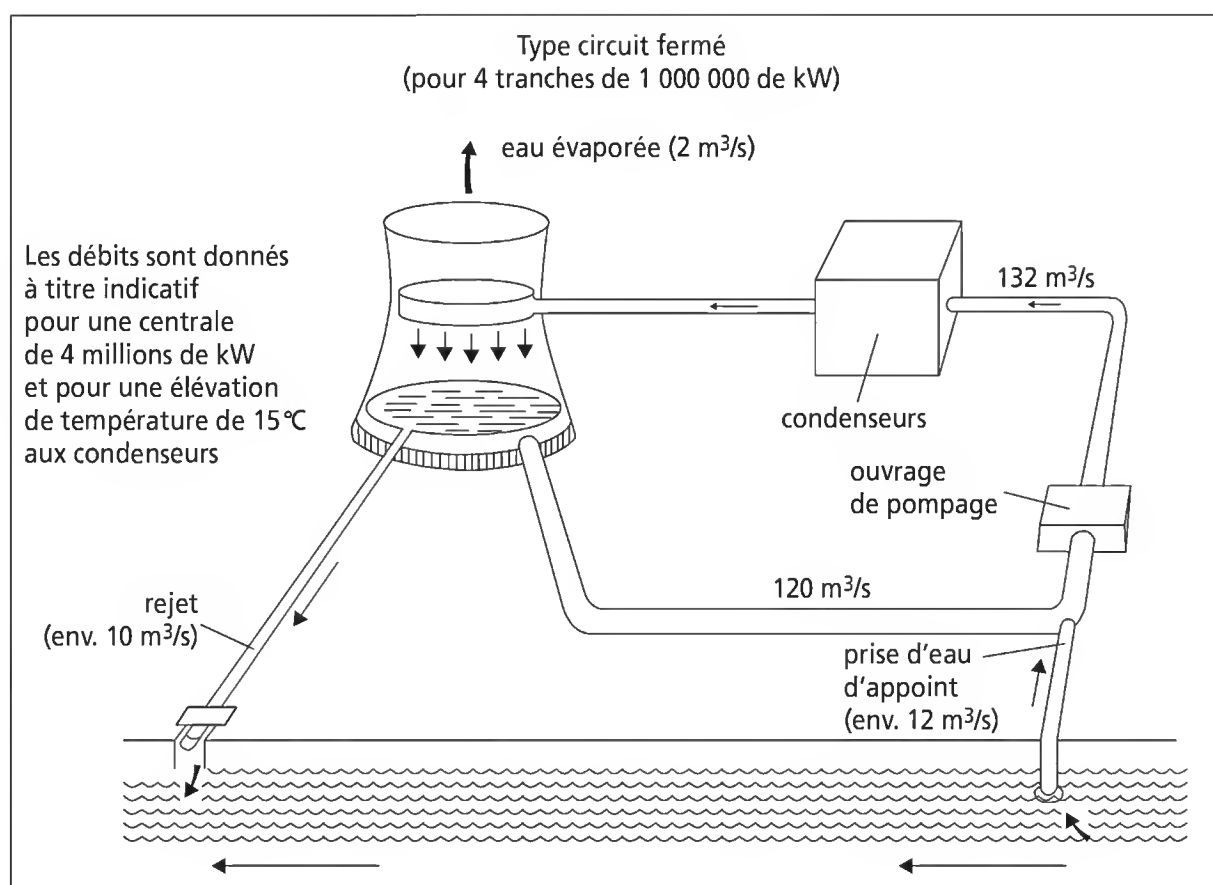
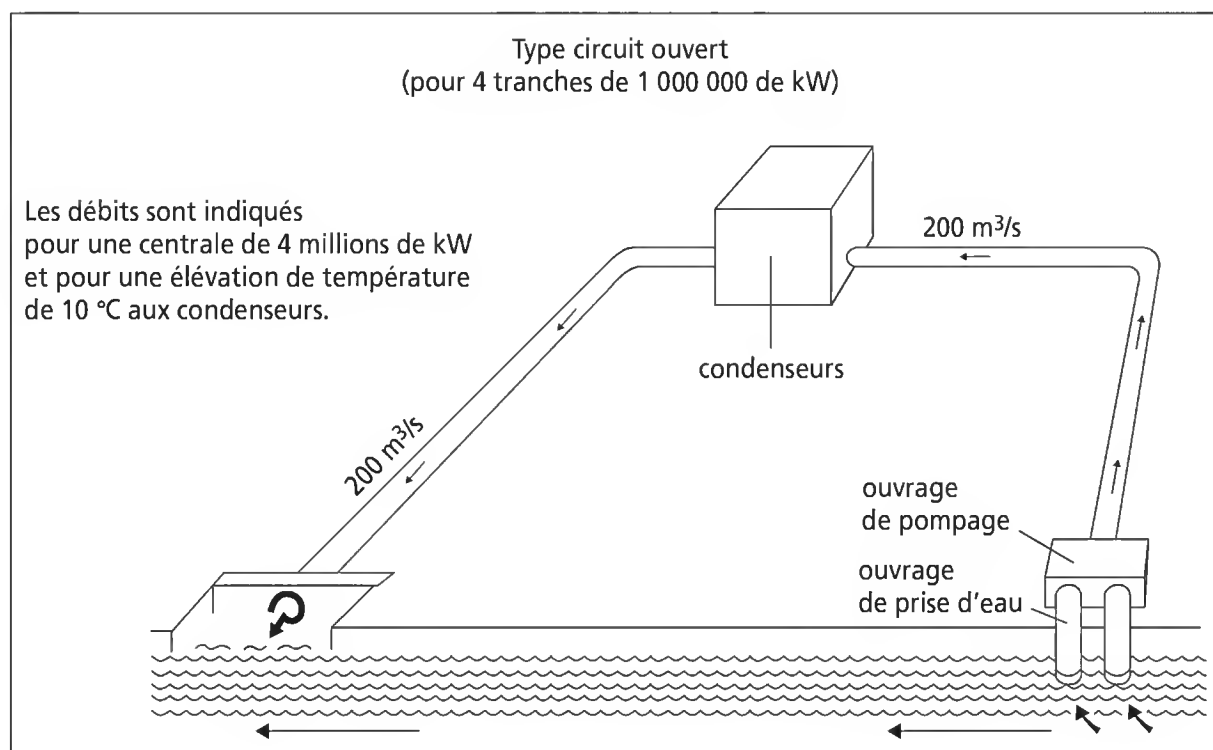


Figure 18.7 Schémas des circuits d'eau de refroidissement des condenseurs.

et en conséquence le coût du cycle de combustible est plus faible que celui des autres réacteurs. Un autre avantage est l'utilisation du plutonium formé par les réacteurs à eau et qui autrement constituerait un déchet gênant. Enfin, la pollution thermique est plus faible grâce à l'excellent rendement du cycle thermodynamique permis par les températures élevées atteintes avec ce type de réacteur. Contrairement aux réacteurs à neutrons thermiques, les réacteurs à neutrons rapides ne doivent pas comporter de modérateur. De là découle une série de conséquences.

Le réacteur ne peut être critique qu'avec un combustible très enrichi car il faudra, pour entretenir la réaction, offrir aux neutrons rapides des cibles beaucoup plus denses que celles qui suffiraient aux neutrons thermiques ; par contre, les neutrons rapides risquent moins d'être capturés sans provoquer de fission et ils sont également capables de provoquer la fission de noyaux d'uranium 238 en les transformant en  $^{239}\text{Pu}$  (surgénération). Le combustible le mieux approprié est le plutonium 239 sous forme d'oxyde  $\text{UO}_2 - \text{PuO}_2$  d'enrichissement 20 à 25 % en  $\text{PuO}_2$ . L'utilisation de cet oxyde mixte présente l'avantage d'être un produit réfractaire stable dans les conditions d'utilisation. Le matériau fertile est de l'uranium 238 et on utilise de l'uranium naturel ou de l'uranium appauvri en  $^{235}\text{U}$  qui constitue un déchet des usines d'enrichissement.

Le fluide de refroidissement doit ralentir le moins possible les neutrons rapides, ce qui élimine l'emploi de l'eau. Il doit également permettre une élimination rapide et efficace des importantes quantités de chaleur qui prennent naissance dans les éléments combustibles. Cela implique une bonne conductivité thermique et une capacité calorifique importante tout en étant compatible avec les éléments combustibles et la cuve. Le sodium, qui a un pouvoir modérateur très faible, convient particulièrement aux réacteurs à neutrons rapides. Il est utilisable à l'état liquide de 98 °C à 883 °C (à pression atmosphérique) et aux températures auxquelles il est utilisé (500 °C) sa densité et sa viscosité sont voisines de celles de l'eau. Son principal défaut est de s'enflammer spontanément à l'air et son contact avec l'eau peut donner lieu à une réaction très violente. Par ailleurs, il s'active sous l'action du flux de neutrons ; on remédie en partie à ces inconvénients en faisant surmonter la surface libre du sodium liquide par un gaz inerte et en utilisant un circuit secondaire de sodium.

Dans un réacteur à neutrons rapides, le flux neutronique est environ 100 fois plus grand qu'au sein d'un réacteur à eau sous pression et la chaleur produite par unité de volume du cœur environ quatre fois plus grande. Le taux d'irradiation ou taux de combustion (quantité de chaleur obtenue par tonne de combustible durant toute la durée du séjour dans le réacteur) est également beaucoup plus élevé ( $5,7 \cdot 10^{14} \text{ J/t}$  au lieu de  $1,8 \cdot 10^{14}$  pour REP). La puissance thermique spécifique élevée et l'emploi du sodium permettent de produire de la vapeur à des températures et pressions élevées et d'obtenir des rendements thermodynamiques (42 %) supérieurs à ceux des centrales classiques (38 %) ou des autres centrales nucléaires (30 à 32 %).

**Surgénération :** dans un réacteur à neutrons rapides, on forme  $^{239}\text{Pu}$  à partir de  $^{238}\text{Pu}$ . Le cœur est très concentré et les fuites vers l'extérieur, relativement importantes, sont récupérées en entourant le cœur d'une couverture en uranium appauvri (en  $^{235}\text{U}$ )

qui se trouve être la principale source de  $^{239}\text{Pu}$ . On définit le temps de doublement comme le temps nécessaire pour reformer l'équivalent de la première charge de plutonium. Pour un taux de régénération de 1,24, ce temps est d'environ 20 ans. En améliorant les structures du cœur de façon à optimiser les réactions de capture, on peut porter le taux de régénération à environ 1,40 (doublement 10 à 15 ans) et par l'emploi de carbure de plutonium au lieu d'oxyde, on devrait pouvoir ramener ce temps à environ 8 ans. En France, après le réacteur expérimental Phénix (250 MWe), une centrale à neutrons de 3 000 MW thermiques et 1 200 MWe a été réalisée (Superphénix).

### c) Les réacteurs de demain

#### ➤ Le réacteur EPR (*European Pressurized Reactor*)

Ce réacteur n'est pas réellement nouveau, c'est une évolution du réacteur REP, qui comporte l'ensemble des perfectionnements suivants :

- Une extension de puissance de tranche de 1 300 à 1 600 MW avec une possibilité de réduction d'échelle à 100 MW ; l'effet d'échelle couplé à l'augmentation de la pression du circuit secondaire (78 bars) permet d'augmenter le rendement de 33 % à 36 %.
- Pour le combustible, le taux de combustion élevé (70 MWj/kg U au lieu de 60) permet à même production électrique une diminution de la consommation d'uranium de 15 %, et par voie de conséquence des déchets. De plus, l'utilisation de MOX peut être étendue de 30 % à 50 % de la charge ; des études sont en cours pour fonctionner à 100 % en MOX.
- La maintenance peut s'effectuer sans arrêt du réacteur ; la disponibilité de celui-ci passe donc de 82 % actuellement à 92 % en théorie.
- L'économie du réacteur est basée sur une durée de vie de 60 ans, au lieu de 30 ans (40 ans) pour les centrales actuelles ; l'électricité produite devrait être 10 % moins chère.
- Le risque d'accident (sûreté) serait divisé par dix avec cette nouvelle configuration.

Actuellement, la Finlande a un projet en cours d'un tel réacteur ; en France, le projet de Flammanville est prévu pour une mise en service en 2012-2013 (avec quelques retards).

#### ➤ Le réacteur à haute température (HTR)

Ce réacteur n'est pas réellement nouveau, puisqu'il a existé un prototype aux États-Unis dans les années 1970-80. Toutefois, il bénéficie des progrès technologiques dans le domaine des turbines à gaz et des matériaux : cette technologie envisage le passage des températures d'entrée de turbine de 400 °C à 850 °C (des températures de 1 000 °C sont même envisagées).

Le combustible se présente sous forme de microbilles dans une matrice graphite (modérateur) ; la température de cet ensemble peut atteindre 2 000-2 500 °C, sans dommage.

L'empilement compact permet la circulation d'hélium, gaz caloporteur, à une pression d'environ 50 bars. Le gaz étant moins favorable que l'eau, la gamme de



puissance visée est de 100 à 500 MWe, avec un bon rendement vu les niveaux de température. La figure 18.8 donne le schéma de principe d'une centrale hélium graphite ; on retrouve ici une configuration à cycle de Joule fermé.

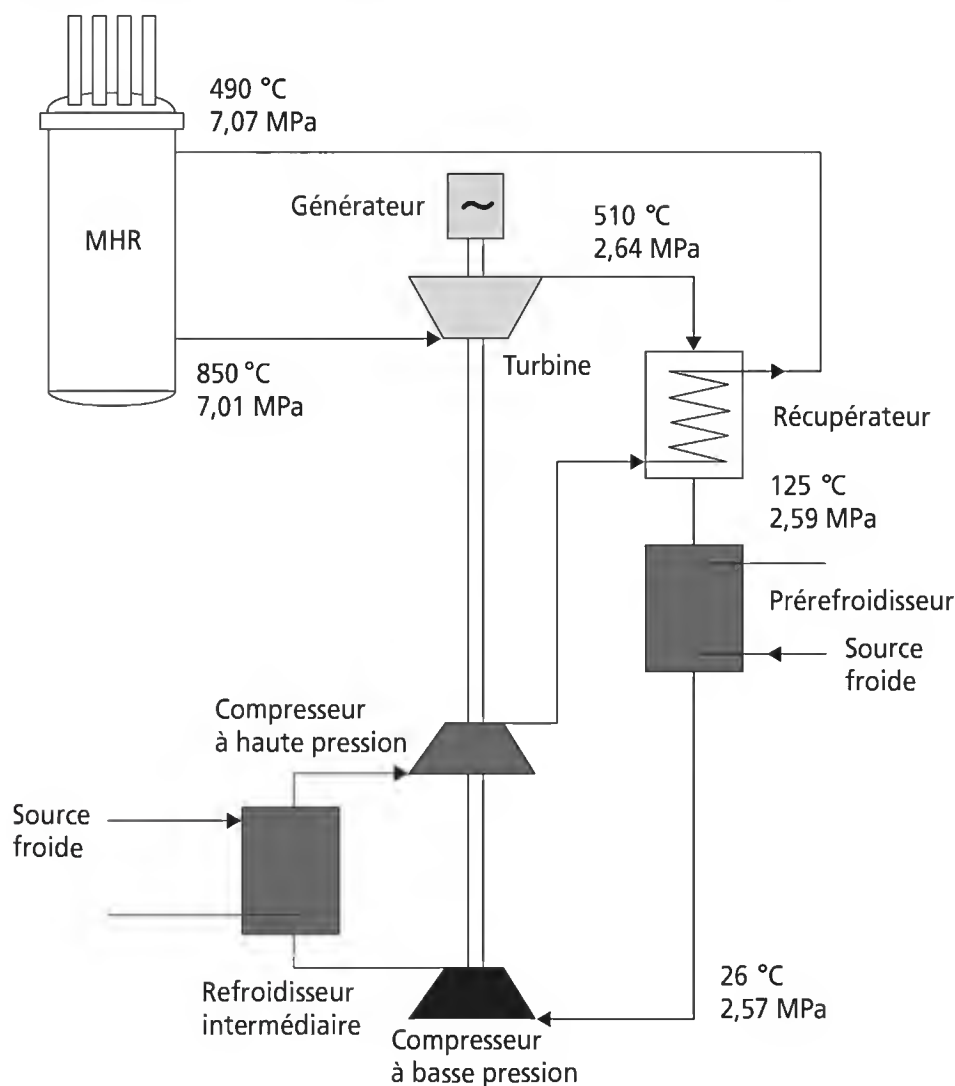


Figure 18.8 Schéma de principe d'une centrale (HTR).

En Europe existe un projet dit GTMHR (*Gas Turbine Modular High temperature Reactor*) de 300 MWe.

Au bon rendement s'ajoute la possibilité de cogénération, voire de production d'hydrogène par dissociation, une meilleure utilisation du combustible (4 à 10 fois selon les estimations), mais s'il y a peu de déchets secondaires, le retraitement mérite une considération approfondie.

#### ► Les réacteurs de génération IV

Ces réacteurs s'appuient sur de nouveaux concepts et sont supposés se développer à l'échelle de 20 à 50 ans.



On rappelle à cette occasion la surrégénération utilisant comme caloporteur le sodium (le plomb) pour ces qualités thermique et nucléaire ; en France il s'agit des expériences Phénix et Superphénix.

### *Réacteurs à sels fondus*

Dans ces réacteurs, le combustible se présente sous la forme de sel liquide à température  $T$  élevée (600 °C) ; il sert aussi de caloporteur. Les sels sont des sels de fluor F et chlore Cl.

Le contrôle et la régulation sont possibles en continu à travers la composition du combustible. La sûreté est assurée par vidangeage. En France existe un projet dit AMSTER commun à EDF et au CEA, dont la production serait sept fois celle d'un REP.

### *Réacteurs hybrides*

Ces réacteurs sont aussi appelés ADS (*Accelerator Driven System*). Comme proposé par C. Rubbia en 1950, ils combinent un accélérateur de particule et un réacteur.

Les neutrons sont produits par une réaction de spallation. Un exemple d'une telle réaction est donné sur la figure 18.9.

**Définition :** La réaction de spallation est une réaction nucléaire dans laquelle une particule légère de quelques centaines de MeV d'énergie entre en collision avec un noyau lourd. La réaction s'effectue en deux étapes : dans la première, la particule incidente entre en collision avec des nucléons de la cible en un temps de  $10^{-23}$  s, laissant le noyau lourd dans un état excité. Dans une seconde étape, ce noyau se désexcite avec des temps plus longs, de l'ordre de  $10^{-20}$  s, en émettant essentiellement (on emploie le mot « évaporation ») des neutrons et des protons.

La puissance instantanée est régulée en jouant sur l'intensité du faisceau d'accélérateur (qq's 10-100 mA) ; le bilan d'un réacteur hybride est positif avec un prélèvement de 10 % pour le fonctionnement de l'accélérateur. Son arrêt est immédiat.

L'intérêt de cette configuration hybride est qu'elle permet le traitement des déchets radioactifs par transmutation, en même temps que la production d'électricité ; en effet, en plus du combustible fissile, on peut adjoindre des éléments dont on veut se débarrasser. En France, le groupement GEDEON (Gestion des déchets par des options nouvelles) s'occupe de cette alternative pour développer la consommation des déchets à vie longue, au profit de déchets à vie courte.

En Europe, les accélérateurs envisagés sont des accélérateurs linéaires à cavité supraconductrice.

## LA SPALLATION NUCLÉAIRE

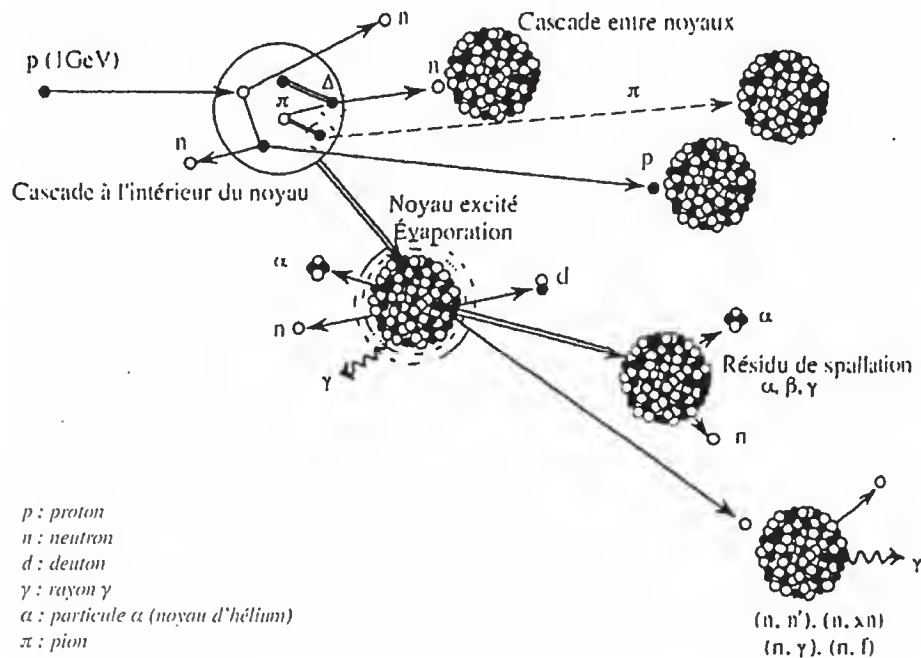


Figure 18.9 Réaction de spallation.

### ► Cas particulier d'une centrale à sodium liquide

Les aiguilles cèdent leur chaleur au sodium primaire. Celui-ci rétrocède cette chaleur au sodium secondaire qui circule dans les tubes des échangeurs intermédiaires immergés dans la cuve. Le sodium secondaire provoque la vaporisation de l'eau dans le générateur de vapeur.

### Exemple d'un échangeur sodium liquide – sodium liquide

Caractéristiques de l'échangeur :

2 400 tubes en acier inoxydable au molybdène :  $\lambda = 30 \text{ kcal/h.m.}^\circ\text{C}$

diamètre 12/15

débit de sodium primaire  $910,5 \text{ m}^3/\text{h}$

débit de sodium secondaire  $890 \text{ m}^3/\text{h}$

1. Puissance thermique du réacteur expérimental 24 MW.

Détermination du flux de chaleur  $\phi$  en kcal/h que doit récupérer le sodium primaire et de la température du sodium à la sortie du réacteur.

2. Corrélation pour les métaux liquides convectant en régime turbulent.

$$Nu = 0,625 Re^{0,4} Pr^{0,4}$$

Détermination du coefficient de convection  $h_i$  relatif au sodium circulant à l'intérieur des tubes (sodium secondaire).

3. Sachant que le coefficient de convection externe (côté sodium primaire) peut être pris égal à 12 200 kcal/h.m<sup>2</sup>.°C, détermination du coefficient de transfert global  $U$  (ramené à la surface interne du tube échangeur).

4. Détermination du type de fonctionnement nécessairement utilisé pour cet échangeur. Évaluation de  $\Delta\theta_{ml}$ .

5. Détermination de la surface totale d'échange nécessaire et longueur des tubes de cet échangeur plongeant dans le sodium primaire. Caractéristiques des fluides aux températures moyennes d'utilisation : tableau 18.2.

TABLEAU 18.2 CARACTÉRISTIQUES DES FLUIDES AUX TEMPÉRATURES MOYENNES D'UTILISATION.

	S-L	Eau
$\rho$ kg/m <sup>3</sup>	857	1 000
$L$ kcal/h.m.°C	61,3	0,5
$\mu$ (v. Dynamique) PI	$0,2810^{-3}$	$10^{-3}$
$C_p$ kcal/kg.°C	0,301	1

1. Puissance thermique  $\phi = 24 \text{ MW} = 2,07 \cdot 10^7 \text{ kcal/h}$

Température du sodium à la sortie du réacteur

$$\phi = q_v \rho C_p \Delta\theta \quad \Delta\theta = \theta_s - \theta_e = 88 \text{ °C} \quad \theta_s = 405 + 88 = 493 \text{ °C}$$

2. Débit dans un tube

$$q_{uv}' = \frac{q_v'}{N}$$

Vitesse du sodium secondaire circulant dans les tubes

$$u' = \frac{q_{uv}'}{S} = \frac{4q_{uv}'}{\pi di^2} = 0,9 \text{ m/s} \quad Re = \frac{\rho u' di}{\mu} = 33 \text{ 400}$$

$$Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda} = 4,95 \cdot 10^{-3}$$

d'où  $h_i = 24\,500 \text{ kcal/h.m}^3.\text{°C}$ .

3.  $u_i$

$$\frac{1}{u_i} = \frac{1}{h_i} + \frac{di \ln \frac{de}{di}}{2\lambda m} + \frac{1}{he} \cdot \frac{di}{de} \Rightarrow u_i = 6\,620 \text{ kcal/h.m}^3.\text{°C}$$

4. Bilan global sur l'échangeur

$$q_c(\theta_e - \theta_s) = q'_c(\theta'_s - \theta'_e) \quad \theta'_s = 475 \text{ °C} > \theta_s \Rightarrow$$

fonctionnement cocourant impossible ; donc nécessairement contre-courant.

$$\begin{array}{l} 493 \rightarrow 405 \\ 475 \leftarrow 385 \end{array} \quad \Delta\theta_m = \frac{20 - 18}{\ln \frac{20}{18}} = 19 \text{ °C}$$

5. Surface totale d'échange nécessaire  $S_i$

$$\phi = u_i s_i \Delta\theta_m \Rightarrow s_i = 164 \text{ m}^2 = n\pi diL \text{ d'où } L = 1,8 \text{ m}$$

### Exemple de dimensionnement d'un condenseur

Caractéristiques du condenseur (contrecourant)

375 tubes en acier inoxydable :  $\lambda = 30 \text{ kcal/h.m.°C}$

diamètre 20/23

$L = 2,5 \text{ m}$

$T_{ev}$  vapeur en entrée = 200 °C

$T_{sv}$  condensat en entrée = 30 °C

Eau de refroidissement prélevée en rivière à une température moyenne annuelle de 11 °C. L'arrêt de rejet d'eau autorise une élévation de température de 10,5 °C.

$h_i$  (côté eau) = 4 800 kcal/h.m<sup>3</sup>. °C

$h_e$  (côté vapeur) = 7 500 kcal/h.m<sup>3</sup>. °C

Dans son passage dans le condenseur la vapeur libère 650 kcal/kg.

Détermination du débit minimal d'eau à prélever, puis du débit maximal de vapeur admissible dans le condenseur.

Condenseur (approximation monophasique)

$$u_i : \frac{1}{u_i} = \frac{1}{2700} \text{ kcal/h.m}^3.\text{°C}$$

$$s_i = n\pi diL = 58,9 \text{ m}^2$$

$$200\text{ }^{\circ}\text{C} \rightarrow 30\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$21,5\text{ }^{\circ}\text{C} \leftarrow 11\text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta\theta_{ml} = \frac{19 - 178,5}{\ln \frac{19}{178,5}} = 71,2$$

$$MAX\phi = u_i s_i \Delta\theta_{ml} = 1,13 \cdot 10^7 \text{ kcal/h}$$

$$\text{débit d'eau à prélever } q'_v : \phi = q'_v \rho' C' (\theta'_s - \theta'_e) \Rightarrow q'_v = 1078 \text{ m}^3/\text{h} = 0,3 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{débit maximum de vapeur : } q_v = \frac{\phi}{650} = 17,4 \cdot 10^3 \text{ kg/h}$$

### 18.2.3 Cycle de combustible et retraitement

#### a) Cycle du combustible uranium

Le comportement du combustible en réacteur est une étape des transformations du combustible depuis son extraction jusqu'au stockage des déchets et au recyclage des matières fissiles récupérées.

Ce cycle est assez bien connu pour l'uranium ; il est représenté figure 18.10.

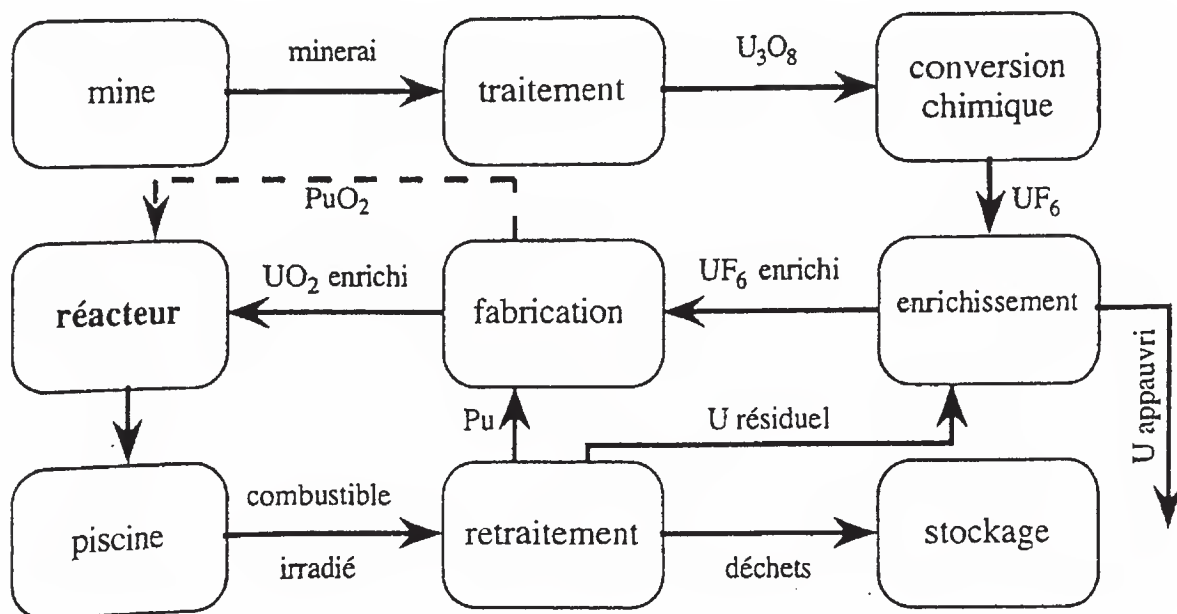


Figure 18.10 Opérations effectuées sur le combustible au cours du cycle de l'uranium



### ► Extraction et conversion du minerai

L'uranium est un métal lourd, relativement abondant et que l'on trouve dans la nature sous forme d'oxydes ou de sels. Comme l'uranium extrait des mines n'est que faiblement concentré, le minerai doit être purifié. On obtient alors l'oxyde  $U_3O_8$  constitué de trois isotopes :  $^{238}U$ ,  $^{235}U$  (0,72 %) et  $^{234}U$  (teneur négligeable). Après ce traitement, l'activité du combustible reste faible puisque  $^{238}U$  est débarrassé de tous ses descendants (à l'exclusion de  $^{234}U$ ). L'oxyde est ensuite transformé en un composé gazeux ( $UF_6$ ) nécessaire à la séparation isotopique (si l'on veut disposer d'uranium enrichi).

### ► Enrichissement de l'uranium

Les procédés industriels actuels sont la diffusion gazeuse et la centrifugation. Comme les masses moléculaires sont très voisines (349 et 352), la séparation isotopique est difficile. Dans le premier cas, le facteur d'enrichissement est très petit ( $\epsilon \sim 0,0043$ ) ce qui nécessite un grand nombre d'étages (1 300 environ pour produire de l'uranium enrichi à 3 %) alors que dans le second cas, il est environ dix fois plus élevé ( $\epsilon \sim 0,05$ ), ce qui réduit d'autant le nombre d'étages nécessaires. D'autres procédés d'enrichissement existent (séparation par laser, séparation par effet aérodynamique dans une tuyère), mais ils sont moins développés sur le plan industriel.

### ► Fabrication des éléments combustibles

Dans la plupart des réacteurs, l'uranium est utilisé sous forme d'oxyde  $UO_2$  qui possède une température de fusion plus élevée que l'uranium métallique. On transforme tout d'abord  $UF_6$  en poudre d'oxyde, puis on fabrique des pastilles par compression à haute température, ces pastilles étant ensuite introduites dans des tubes en zircaloy (alliage de zirconium). Le transport et le stockage du combustible non irradié ne pose aucun problème car son activité est faible.

### ► Stockage provisoire des éléments irradiés

Contrairement au combustible neuf, le combustible irradié ne peut être manipulé qu'à distance et en présence d'écrans de protection du fait de la forte activité des produits de fission. Après extraction du cœur, il est stocké dans une piscine de désactivation assurant le refroidissement et servant de blindage contre les émissions. Après environ un an (élimination des produits de fission à courte période), l'activité résiduelle est encore de 3 à 4 Mci/tonne (cas d'une centrale REP) et le transport doit s'effectuer dans des containers en plomb ou en acier.

### ► Retraitement et stockage

Son but est de récupérer la matière fissile encore utilisable (uranium résiduel et plutonium formé), d'éliminer les produits de fission et d'isoler certains sous-produits intéressants. Les déchets se retrouvent alors sous forme de solutions et sont soit stockés dans des cuves en acier à double fond placées dans du béton, soit vitrifiés.

### b) Le stockage des déchets radioactifs

#### ► L'histoire de la gestion des déchets radioactifs en France

Cette histoire commence réellement avec la première centrale nucléaire à Chinon en 1963. En 1976, la Cogema (Compagnie générale des matières nucléaires) est chargée du traitement des combustibles usés (recyclage de l'uranium et du plutonium dans l'usine de La Hague).

En 1991 est mis en place un programme de recherche sur 15 ans pour la gestion des déchets, qui a abouti à ce jour aux résultats qui vont être évoqués ci-après.

En 1997, le premier démantèlement d'une centrale est abordé (Brennilis) ; il s'étalera sur 20 ans en générant 1 500 t de déchets.

Enfin, en 2000, a été initiée une recherche dans un laboratoire souterrain à Bure en Haute-Marne.

#### ► La filière des déchets radioactifs aujourd'hui

##### *La production des déchets*

La fission qui utilise classiquement des barres d'uranium, après usage fait apparaître des produits de fission dont le plutonium et des actinides.

Les barres usagées sont mises à refroidir pendant 2 à 4 ans dans la piscine de la centrale (stockage en piscine), avant transfert vers l'usine de retraitement de la Hague.

Dans 1 kg d'uranium, apparaissent 10 g de plutonium, 40 g de produits de fission divers, 1 g d'actinides mineurs.

L'essentiel de la production des déchets provient de EDF, de la Cogema et du CEA, mais il faut aussi considérer les hôpitaux et la recherche.

##### *Le traitement des déchets*

Le traitement des déchets ne commence qu'après 2 ans de stockage en piscine. Il fait intervenir un traitement chimique, avec récupération d'uranium et de plutonium (pour réinjection dans du combustible neuf MOX) ; les résidus hautement radioactifs restant sont vitrifiés et confinés dans des fûts.

On voit ici apparaître la notion de types de déchets radioactifs ; il y a cinq catégories principales :

- hautement radioactifs à vie longue (1 % en volume ; 96 % de la radioactivité) : déchets C ;
- moyennement radioactifs : déchets B conditionnés dans des matrices en bitume ou béton dans des fûts en acier ;
- faiblement radioactifs à vie longue ;
- faiblement radioactifs à vie courte ;
- très faible radioactivité à vie longue.

L'ANDRA (Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs : [www.andra.fr](http://www.andra.fr)) a pour vocation la gestion des déchets à long terme.

**Remarque :** au traitement s'ajoute un contrôle par l'ASN, Autorité de sûreté nucléaire.

### ► Traitement et stockage des déchets radioactifs demain

Deux critères essentiels interviennent dans la gestion des déchets radioactifs : le niveau d'activité radioactif, la durée de vie.

Après les recherches de ces quinze dernières années, il apparaît en fonction de ces deux critères trois voies complémentaires plus que concurrentes.

#### *La séparation par transmutation (poussée)*

Ce point a été abordé à l'occasion des réacteurs à neutrons rapides RNR de génération IV. Il permettrait de transmuter 1 % des déchets émetteurs de 96 % de radiotoxicité, en éléments moins toxiques et à vie plus courte. Mais il suppose le recours à des accélérateurs de neutrons *ad hoc* ou aux lasers de puissance. Cette perspective est à l'horizon 2040-2050.

#### *L'entreposage de longue durée en surface*

Cet entreposage consistera à placer les déchets conditionnés dans des lieux sûrs, de façon à pouvoir les reprendre ultérieurement pour un nouveau traitement adapté à l'évolution des technologies (tenue dans le temps des bétons, gestion des flux de chaleur).

C'est ce que l'on pratique actuellement et cela devrait perdurer en l'état sur une période d'environ 10 ans, avant de mettre en place de nouvelles procédures pour le stockage de longue durée.

#### *Le stockage en couches géologiques profondes*

Le stockage en couche géologique profonde (de l'ordre de – 500 m) consiste à confiner les déchets dans un milieu géologique adéquat ; la couche géologique doit être stable et abriter en toute sécurité à très long terme des déchets hautement radioactifs.

Le laboratoire souterrain de Haute-Marne a pour but, entre autres, de vérifier que la mise en place de la structure ne modifie pas la qualité des roches argileuses, et d'étudier l'influence de la température sur le comportement de l'argile ; par ailleurs la prise en compte de l'évacuation de l'hydrogène généré par la corrosion est à intégrer. L'ANDRA s'occupe en France de la gestion à long terme des déchets. Ces études devraient déboucher à moyen terme (20 ans).

**Remarque :** des études complémentaires existent hors de France dans des milieux granitiques.

Le lecteur intéressé peut se référer au site Internet de la CPDP sur la gestion des déchets radioactifs ([www.debatpublic-dechets-radioactifs.org](http://www.debatpublic-dechets-radioactifs.org)).

#### *c) Le cycle du thorium*

Une autre façon d'aborder le problème consiste à reconsidérer l'usage exclusif de l' $U^{235}$ , vu la nature des déchets générés ainsi que son épuisement probable.

Il apparaît que le thorium est naturellement environ 3 fois (2 à 4 selon les auteurs) plus abondant naturellement que l'uranium du réacteur ; mais il n'est pas naturelle-



ment fissile. De ce fait, il nécessite un démarrage pour le transformer en uranium 233 :  $Th^{232} \rightarrow U^{233}$ .

L'aménagement des réacteurs à uranium est envisageable en ce sens. Le thorium est plus favorable du point de vue neutronique (2,38 neutrons/neutron primaire) que l' $U^{235}$  (2,07 neutrons/neutron primaire) ou l' $U^{238}$  (2,11 neutrons/neutron primaire).

Le combustible à base de thorium fait intervenir une chimie plus complexe que celle de l'uranium (composés chlorés et fluorés) ; il nécessite aussi retraitement et recyclage sous forme de combustibles mixtes.

La radiotoxicité à long terme serait moindre (300 fois selon certaines estimations) que la référence actuelle (REP).

En guise de conclusion sur ce débat qui est ouvert et sur la fission qui fait l'objet de nombreuses recherches, on peut dire que le potentiel de développement de cette forme de conversion d'énergie n'a pas terminé sa phase exploratoire ; on peut même envisager le couplage du cycle de thorium avec des réacteurs hybrides. Si de plus la température de caloporteur en sortie de réacteur est portée de 320 °C à 600 °C, le rendement au sens du premier principe passerait de 33 % à 50 %.

### 18.2.4 La fusion thermonucléaire

#### a) De la fusion thermonucléaire naturelle à la fusion thermonucléaire contrôlée

##### ► La fusion dans les étoiles

Les réactions thermonucléaires sont monnaie courante dans l'Univers à l'échelle astronomique ; toute étoile est un réacteur thermonucléaire naturel.

L'étoile la plus proche de nous, le Soleil, en est l'exemple le plus accessible. La température au cœur de l'étoile est ainsi voisine de 10 à 20  $10^6$  K (température superficielle de corps noir équivalent pour le Soleil 6 000 K, seulement ; voir le paragraphe 18.3). Ainsi, le cycle de l'étoile est pour l'essentiel dépendant de la fusion de l'hydrogène pour produire de l'hélium. Cette fusion est exothermique et convertit une faible quantité de matière en énergie.

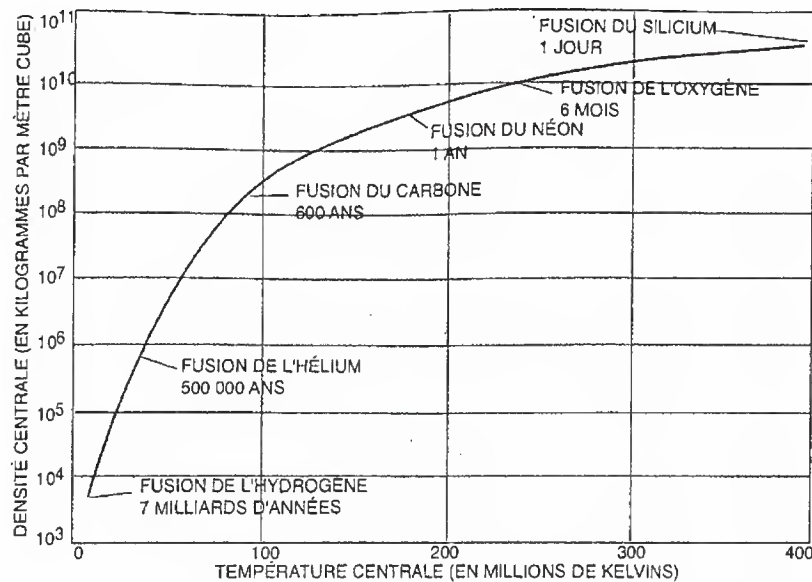
La figure 18.11 représente l'évolution d'une étoile dont la masse vaut 25 masses solaires (supernova).

**Remarque :** les températures sont souvent exprimées dans ce domaine en keV (ou MeV) : 1 keV correspond à  $1,6 \cdot 10^{-14}$  J. La température de  $10^7$  K correspond à 1 keV.

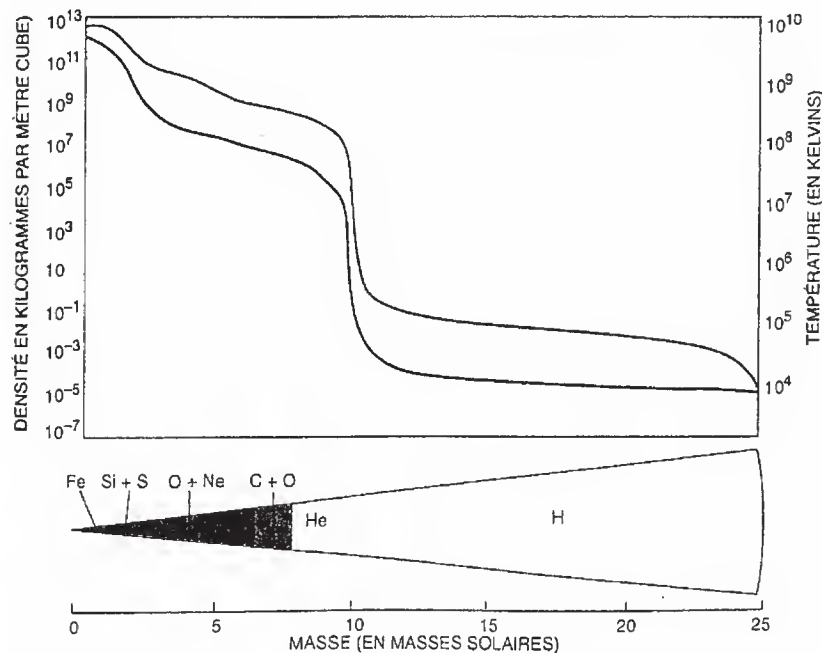
L'énergie de fusion fait intervenir des noyaux légers (2) et se traduit par une réaction propre.

##### ► La fusion thermonucléaire contrôlée

Bien que la première application dérivée par l'homme soit la bombe thermonucléaire (bombe H), l'application sous forme contrôlée a été initiée en URSS au milieu du siècle dernier (tokamak). Depuis de nombreuses études se développent de



AU COURS DE L'ÉVOLUTION D'UNE ÉTOILE MASSIVE, la température et la densité de son cœur augmentent de plus en plus vite. Pendant la majeure partie de la vie de l'étoile, son énergie provient surtout de la fusion des noyaux d'hydrogène, qui forment de l'hélium. Lorsque tout l'hydrogène a été utilisé, le cœur se contracte et s'échauffe : l'hélium forme du carbone. Ce cycle se répète en s'accéléralant : le carbone fusionne et forme du néon, qui forme de l'oxygène, puis du silicium ; une ultime fusion transforme le silicium en fer. Parvenu à ce stade, le cœur ne peut plus produire d'énergie par fusion nucléaire et il s'effondre sous l'action de sa propre gravité, ce qui déclenche l'explosion de la supernova. Cette courbe montre l'évolution d'une étoile dont la masse vaut 25 masses solaires.



À LA FIN DE LEUR ÉVOLUTION, juste avant qu'elles s'effondrent sous l'effet de leur propre gravité, les étoiles massives ont une structure en oignon. Le cœur, constitué de fer, est entouré de couches successives de silicium, de soufre, d'oxygène, de néon, de carbone, d'hélium et d'hydrogène. La température et la densité diminuent du cœur de fer à la couche de carbone et d'oxygène, puis chute dans la couche d'hydrogène. La fusion n'a plus lieu dans le cœur, mais elle se poursuit entre les différentes couches de l'étoile.

Figure 18.11 Évolution thermonucléaire d'une étoile massive.

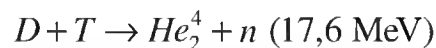
par le monde, dont le JET (*Joint European Tonus*) en Grande-Bretagne, puis Tore Supra en France.

### b) La réaction de fusion

#### ► La réaction accessible

Comme le montre la figure 18.11 les réactions de fusion sont nombreuses, mais elles sont plus ou moins facilement réalisables.

La réaction la plus accessible (et probable) pour l'homme dans l'environnement terrestre est la fusion d'un noyau de deutérium D et d'un noyau de tritium T, deux isotopes de l'hydrogène selon la réaction suivante :



Cette réaction produit un neutron de 14,1 MeV et une particule  $\alpha$  de 3,5 MeV.

**Remarque :** les isotopes de l'hydrogène sont  $H_1^1, H_1^2$  (deutérium),  $H_1^3$  (tritium) ; le deutérium existe à raison de 40 mg/l dans l'eau de mer. Il est peu coûteux à extraire.

#### ► La production de tritium

Le tritium lui n'existe pas dans la nature car il a un temps de vie court (11 ans). Il doit être produit ; on peut pour cela utiliser du lithium  $Li^6$ , en le faisant réagir avec le neutron produit par la fusion :



Au total cette réaction libère 4,8 MeV. Les produits de base pour la fusion thermonucléaire contrôlée sont donc le deutérium et le lithium 6 ; les réserves de ces combustibles s'estiment en millénaires.

Le produit de ces deux réactions est l'hélium 4, élément très stable. Un kg de deutérium et de tritium permet de produire 94 GWh (équivalent à  $10^7$  kg de charbon), du même ordre de grandeur que pour la fission de l' $U^{235}$ , mais sans les déchets radioactifs correspondants.

### c) Le confinement

#### ► Trois modes de confinement

##### *Confinement gravitationnel*

Pour fusionner, les noyaux doivent vaincre leur tendance naturelle à se repousser.

Cela est possible lorsque la matière est portée à une température très élevée ( $10^8$ K) ; les atomes sont alors séparés en leurs constituants fondamentaux (électrons, noyaux) : gaz ionisé chaud, appelé « plasma ». Les plasmas constituent l'élément majoritaire de l'univers (> 95 %).

Cependant, dans le cœur d'une étoile, le plasma a tendance à diffuser ; il est confiné par le champ gravitationnel.

### Confinement inertiel

Sur la Terre, le confinement gravitationnel n'est pas possible. Aussi, d'autres voies sont étudiées pour reproduire ces réactions.

Le confinement inertiel consiste à porter à très haute pression un petit volume pendant un temps très court ; typiquement le volume est de l'ordre du  $\text{mm}^3$ . La fusion inertielle est envisagée par faisceau laser (laser Mégajoule) sur des temps caractéristiques de  $10^{-11}$  s, des températures de  $10^8$  K, des densités très élevées par rapport à l'air ambiant ( $10^{20}/\text{m}^3$ ).

### Confinement magnétique

Pour maintenir à très haute température un plasma, une autre solution consiste à le confiner dans une chambre vide de forme torique à l'aide de champs magnétiques ; le champ magnétique intense est utilisé pour réduire la diffusion des particules vers les parois.

Typiquement les volumes correspondants sont grands ( $1\,000\,\text{m}^3$ ) ; les densités restent de l'ordre de  $10^{20}/\text{m}^3$ , les températures élevées ( $10^8$  K), les temps caractéristiques de confinement de l'ordre de 10 s, avant de perdre de l'énergie.

#### ► Critère de Lawson

##### Bilan d'énergie

Les principales pertes thermiques se font par diffusion vers les parois, rayonnement, collisions. La compensation de ces pertes thermiques peut être totale ou partielle selon les cas ; elle se fait par chauffage externe à l'aide d'ondes électromagnétiques ou par introduction de faisceau de particules neutres rapides (1 MeV). À l'état stationnaire, le flux d'énergie perdue  $\overset{\circ}{E}p$  doit être compensé par le flux d'énergie de chauffage des particules  $\alpha$   $\overset{\circ}{E}\alpha$ , et le flux d'énergie de chauffage externe  $\overset{\circ}{E}_e$  :

$$\overset{\circ}{E}p = \overset{\circ}{E}\alpha + \overset{\circ}{E}_e$$

Sachant que le flux d'énergie de fusion  $\overset{\circ}{E}f$  est cinq fois celle des particules  $\alpha$ , le gain énergétique  $G$  du cœur thermonucléaire est :

$$G = \frac{\overset{\circ}{E}f}{\overset{\circ}{E}_e} = 5 \cdot \frac{\overset{\circ}{E}\alpha / \overset{\circ}{E}p}{1 - \overset{\circ}{E}\alpha / \overset{\circ}{E}p}$$

À l'ignition du cœur  $\overset{\circ}{E}\alpha = \overset{\circ}{E}p$ ,  $G$  devient infini. La figure 18.12 montre l'évolution des diverses réalisations vers l'ignition.

##### Le critère de Lawson

En définissant par  $E_t$ , l'énergie thermique du plasma,  $T$  sa température au centre, si on admet que l'énergie  $\overset{\circ}{E}\alpha$  est proportionnelle à  $n.T.E_t$ , il vient selon (Rebut Ph.) :

$$\overset{\circ}{E}\alpha / \overset{\circ}{E}p \sim n.T.\tau$$

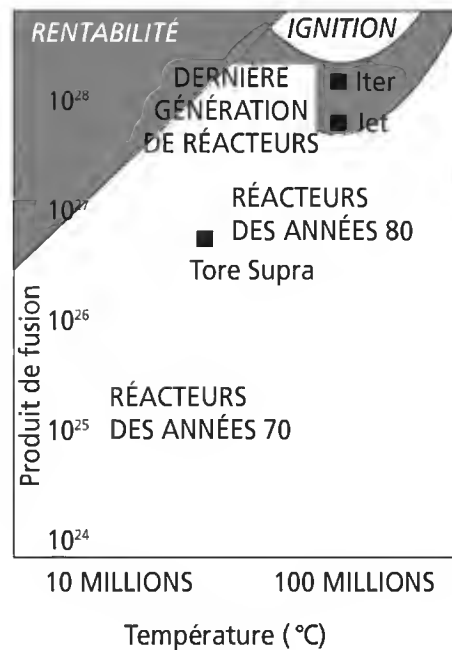


Figure 18.12 Évolution des réacteurs vers l'ignition.

$n$ , densité des ions hydrogène

$\tau$ , temps de confinement

Le critère de Lawson exprime la relation existant entre  $n$ ,  $\tau$ , et  $T$  à l'ignition. Il s'écrit de façon générale sous la forme :

$$n\tau \geq f(T)$$

Dans le cas étudié, l'ignition correspond aux conditions pour lesquelles la température du plasma est maintenue par les réactions thermonucléaires, sans apport externe :

$$T > T_{\text{ignition}} \text{ (environ } 10^8 \text{ K)}$$

$$n\tau T > 40$$

Cette dernière relation suppose  $T$  exprimé en keV,  $\tau$  en secondes,  $n$  en  $10^{20}/\text{m}^3$ .

On voit apparaître ici deux formes de fusion déjà évoquées :

- la fusion rapide sur mélange D – T, avec des densités voisines de  $n \sim 10^{31}/\text{m}^3$  et des temps caractéristiques de l'ordre  $10^{-11}$  s ; la fusion rapide correspond au confinement inertiel ;
- la fusion lente : elle correspond à des densités de l'ordre de  $10^{20}/\text{m}^3$ , et des temps caractéristiques de l'ordre de la seconde.

Dans cette configuration l'influence de la diffusion, de la dissociation et des pertes thermiques est importante.

Le confinement magnétique est assuré par des champs de 5 à 10 teslas.



#### d) Les réacteurs à fusion

##### ► Le confinement magnétique : notions

Pour réaliser le confinement magnétique d'un plasma, on utilise le fait que les particules chargées suivent des trajectoires hélicoïdales autour des lignes de champ magnétique : si celles-ci sont refermées sur elles-mêmes, les particules sont piégées.

Pour confiner les particules deux configurations magnétiques ont été étudiées : la configuration linéaire : elle est ouverte et des pertes importantes se produisent aux extrémités et la configuration toroïdale (voir figure 18.13).

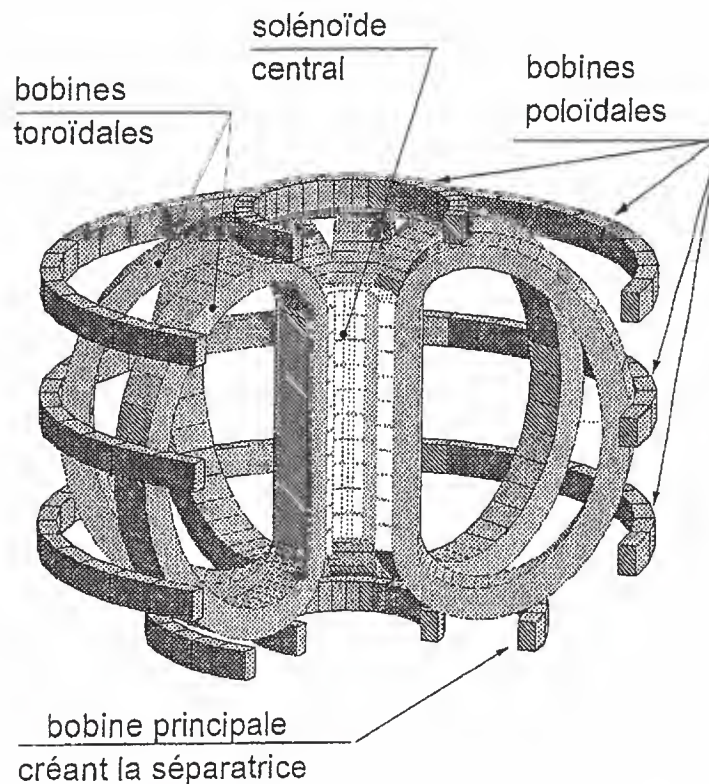


Figure 18.13 Bobinage d'une configuration tokamak

Cette configuration fermée est celle retenue ; toutefois à cause du gradient de champ magnétique et de la courbure des lignes de champ, les particules dérivent verticalement, selon leur charge.

L'ajout du champ poloïdal au champ toroïdal permet de compenser ces dérives.

##### ► Les configurations toroïdales

Cette configuration a donné lieu à plusieurs réalisations, dont on retiendra les deux plus performantes :

- Le stellarator : pour cette machine, les champs sont créés par des bobines externes. Le champ magnétique n'est pas axisymétrique ; la section du plasma varie avec la composante toroïdale.

- Le tokamak : un ensemble de bobines (figure 18.13) produit un champ magnétique dans la direction du tore, auquel vient s'ajouter le champ magnétique créé par un courant intense axial circulant dans le plasma lui-même.

Le noyau de base pour produire le courant plasma consiste à le générer par induction. On place un bobinage constitué de couches horizontales au milieu de la configuration (bobinage placé dans le « trou » du tore). Avec ce bobinage et à condition d'y faire varier le courant, on engendre par induction le courant du plasma (comme dans un transformateur électrique).

L'équilibre du plasma, sa position, sa forme, et le contrôle du courant sont assurés par les aimants horizontaux (bobines poloïdales).

### e) Les tokamaks

#### ► De JET à ITER

La vue générale d'un réacteur tokamak est représentée sur la figure 18.14.

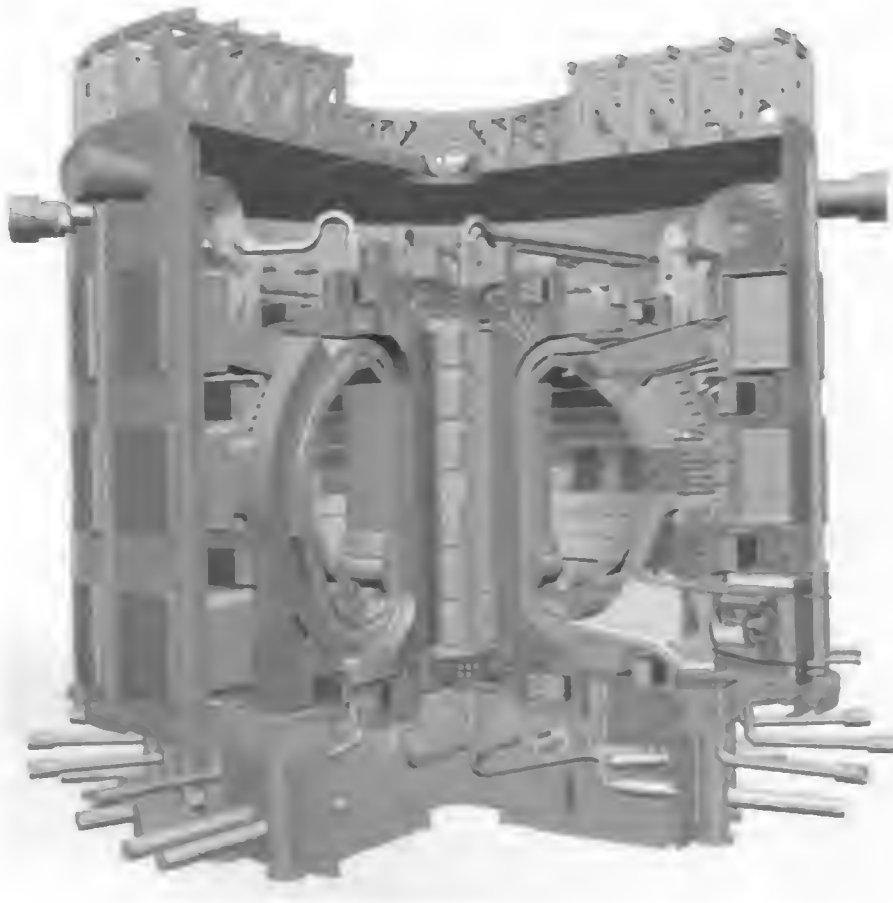


Figure 18.14 Vue générale d'un réacteur tokamak (source CEA)

Le *Joint European Torus*, construit en Grande-Bretagne en 1978, est un tokamak pulsé (temps utile : 10 s). Le volume de plasma est de  $100 \text{ m}^3$  pour un rayon de 3 m. Les bobines sont en cuivre. La température atteinte est de  $3 \cdot 10^8 \text{ K}$ , avec un gain

voisin de l'unité, pour une puissance délivrée de 1 à 16 MW pendant quelques secondes.

La construction du tokamak Tore Supra à Cadarache a duré sept ans (premier plasma en 1988) ; Tore Supra est le seul tokamak à mettre en œuvre la technologie des aimants supraconducteurs pour le champ magnétique toroïdal. Le volume de plasma est de  $20 \text{ m}^3$  pour un grand rayon de 2,38 m (petit rayon du tore : 0,78 m).

Le courant maximum induit dans le plasma est de 1,8 MA ; le champ magnétique maximum de confinement 4,5 teslas ; la puissance de chauffage externe disponible est de 15 MW (injection d'ondes haute fréquence).

Tore Supra permet l'étude des temps longs et a battu des records d'énergie extraite (0,6 GJ) ; des évolutions permettent l'étude de décharges de longue durée (1 000 s).

Le projet de réacteur ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) sera prochainement construit en France à Cadarache ; les premières expériences sont prévues pour 2015.

La température correspondante reste de  $10^8 \text{ K}$ , avec un courant maximum induit de 15 MA ; le volume de plasma prévu est de  $1\,000 \text{ m}^3$ , avec un grand rayon de 6 m. La taille de la machine conduit à une puissance de fusion de 400-500 MW, pour une durée d'environ 400 s.

Le gain étant de 10, la puissance nécessaire de chauffage est voisine de 50 MW fournie pour 2/3 par les particules  $\alpha$  et 1/3 en externe. Les bobines sont supraconductrices comme pour Tore Supra.

Les principaux problèmes à résoudre avant d'envisager un usage industriel sont relatifs aux instabilités du plasma (problème physique) et aux matériaux en relation avec le transfert de chaleur (problème technologique), l'érosion et la résistance aux neutrons de 14 MeV.

La figure 18.15 représente l'enveloppe du plasma d'un tokamak de façon schématique.

La première paroi est soumise aux interactions plasma-paroi contrôlées par le divertor ; ces interactions traduisent les pertes par confinement magnétique dues au Hors Equilibre Thermodynamique. Le contact se fait sur deux anneaux concentriques de quelques cm de large ; les flux à évacuer sont de l'ordre du  $\text{kW/cm}^2$  (3  $\text{kW/cm}^2$  sur le JET). Ces flux sont évacués par conduction-convection turbulente, d'où une épaisseur faible de paroi (de l'ordre du cm) facilitant le refroidissement.

L'érosion du matériau (*sputtering*) entraîne par ailleurs une pollution de plasma à éviter ; le béryllium et le carbone peuvent être utilisés en raison de la tolérance à ces impuretés ou le tungstène réfractaire ayant un arrachement faible.

L'évacuation de chaleur se fait par fixation sur support cuivre refroidi à l'eau (écoulement en tube de diamètre 1 mm à grandes vitesses, ou technique hypervapotron (Thomson)).

**Remarque 1 :** dans le projet ITER, la première paroi reçoit une énergie neutronique de  $0,4 \text{ MW/m}^2$ .

**Remarque 2 :** le rayonnement plasma rend compte des pertes thermiques engendrées par les impuretés.



Comme le montre la figure 18.15, la couverture du réacteur est beaucoup plus épaisse, de l'ordre de 1 m.

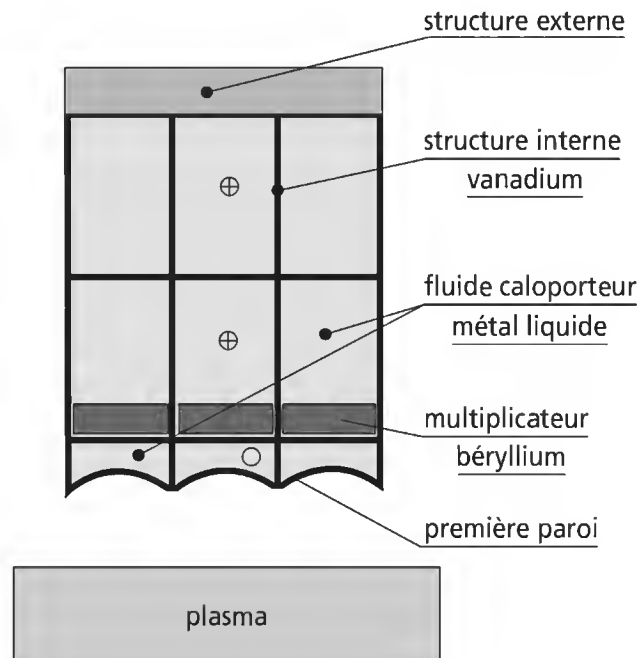


Figure 18.15 Première paroi et couverture d'un réacteur tokamak.

Elle remplit en effet trois fonctions : ralentisseur de neutrons et protection des aimants supraconducteurs ; générateur de tritium par réaction avec  $Li^6$  ; extraction de chaleur. Il existe deux types de couvertures.

Les caloporteurs ralentisseurs et titrigène : Li liquide ( $T = 186\text{ °C}$ ) ; eutectique Pb-Li ( $240\text{ °C}$ ), sels fondus.

Pour les métaux liquides, la difficulté est de les mouvoir en présence des champs magnétiques ; cette difficulté n'existe pas pour les sels fondus, mais la température de fusion est plus élevée ainsi que le risque de corrosion.

Les caloporteurs purs : eau, hélium gazeux : l'architecture correspondante est plus classique : refroidissement distribué dans un milieu solide actif (céramique d'oxyde de Li ou Be).

**Remarque 1 :** la couverture retenue pour évacuation de puissance de ITER est classique : acier-eau.

**Remarque 2 :** d'autres solutions sont envisageables, par exemple un lit fluidisé avec des billes ou particules de céramiques dans un courant d'hélium.

#### ► Les réacteurs à fusion de demain

##### *Production d'électricité par tokamak*

L'utilisation de la fusion chaude pour la production d'énergie électrique n'interviendra pas, selon toute vraisemblance, avant la fin du siècle ; en 2025-2035 devrait

être mis en place un nouveau réacteur pilote destiné à résoudre les derniers problèmes de mise en œuvre (matériaux) et aussi de taille et d'économie ; il semble actuellement que la taille physique et économique minimale d'un réacteur à ignition soit voisine d'une puissance de 5 GW.

Le principe d'une centrale à fusion diffère peu des centrales examinées précédemment, tant classique (chapitre 17) que nucléaire à fission (paragraphe 18.2.2) (figure 18.16).

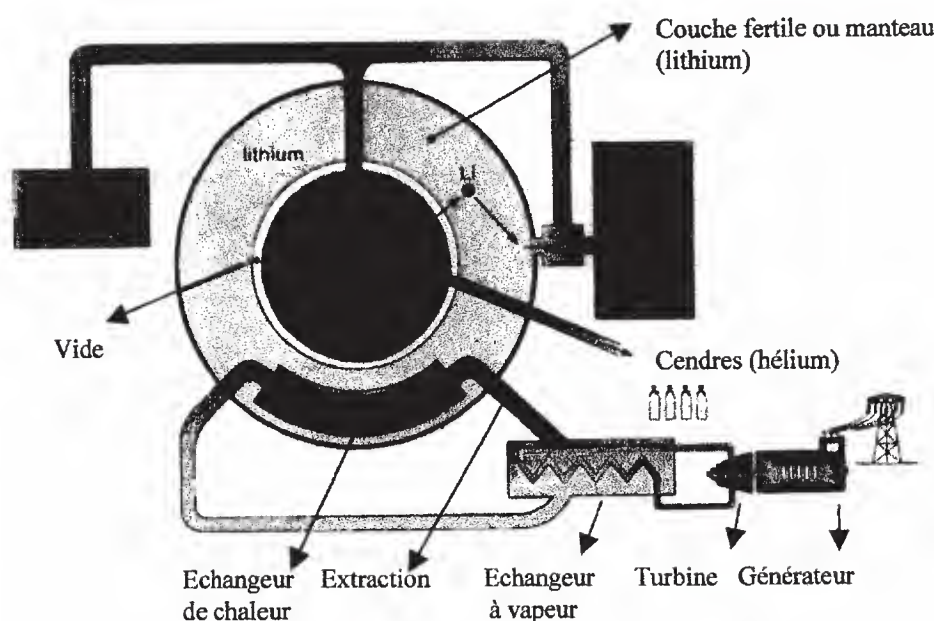


Figure 18.16 Schéma de principe d'une centrale à fusion.

### Réacteurs hybride fusion-fission

Cette configuration permettrait d'utiliser les neutrons de 14 MeV de la fusion, pour produire de l'énergie par fission d' $U^{238}$ . L'ensemble brûlant les déchets (Pu et actinides) produirait un minimum de déchets ; il est par ailleurs sous critique (pas de risque d'emballement, ni d'explosion).

Dans la couverture, le gain énergétique est de 10, dans la fusion de 5 ; en conséquence, le gain énergétique de l'hybride vaut 50 (ITER a un gain de 10) ; la puissance thermique à mettre en œuvre en hybride est estimée voisine de 5 GW. Les contraintes de matériaux seraient moindres d'un facteur 5 à 50, avec aussi une meilleure utilisation des réserves.

### En conclusion

De nombreuses études restent à réaliser et des progrès à faire avant la maîtrise de cette forme de conversion, mais beaucoup d'espoirs sont permis.

Nous n'avons par parlé de la fusion froide qui fait encore l'objet d'une controverse avancée.

Nous n'avons pas développé faute de place le modèle magnétohydrodynamique qui rend compte des écoulements de fluides conducteurs (métal liquide, plasma) en présence de champ. On voit bien néanmoins l'intérêt de ce modèle pour la problématique abordée dans ce paragraphe, en particulier l'étude des instabilités.

## 18.3 L'ÉNERGIE SOLAIRE THERMIQUE

### 18.3.1 Les énergies renouvelables

#### a) Principales formes

L'épuisement des ressources fossiles, dont le nucléaire actuel, les besoins croissants d'énergie, et la pression environnementale induisent un retour après les années 1980 vers les énergies renouvelables ; ces énergies sont essentiellement des énergies de type flux, à l'exception de la biomasse qui se présente sous une forme stockable.

Le tableau 18.2 présente un panorama succinct des énergies renouvelables dans le monde, l'Union européenne et la France.

**TABEAU 18.2** ÉNERGIES RENOUVELABLES DANS LE MONDE, L'UNION EUROPÉENNE ET LA FRANCE.

Source	Hydraul.	Biomasse	Éolien	Solaire	Géotherm.	Marées
Monde	4 %	6 %	< 1 %			0 %
Union eur.	1,8 %	3,4 %	0,1 %	0,1 %	0,2 %	0 %
France	5 %	~ 3 %	0,04 %	< 0,5 %		0,05 %
Avantages	Renouvel. Stockable  Rendement	Renouvel. Stockable	Renouvel.  Rendement	Renouvel.  Abondant Répartition	Renouvel. Stockable	Renouvel. Régulier  Rendement
Inconvénients	Ressources  Sûreté	Ressources Coût  Rendement Effet serre	Ressources Coût Intermittent	Coût Intermittent Rendement Déchets	Ressources Coût  Rendement	Ress. acc. Coût
Ressources monde	0,9 Gtep/an	2 Gtep/an	8 Gtep/an	100 000 Gtep/an	15 Gtep/an	2 Gtep/an
Pot. Europe* Pot. France*	7 %** 7 %**	13 % 12 %	7 %** (15 % élec)	100 %	2,3 %**	Hydrauliques < 3 %
		1/4 surface étendue	25 000 éoliennes	20 000 km <sup>2</sup> (4 % France)**	Toute la surface France	

\* les pourcentages sont calculés par rapport à la consommation totale d'énergie

\*\* correction rendement incluse

Ce tableau présente les six formes principales d'énergies renouvelables :

- l'hydraulique (voir chapitre 14) (cette énergie est stockable par turbinage) ;
- la biomasse ;
- l'éolien (voir chapitre 14).

On ne reprendra pas ici ces trois premières formes étudiées ci-avant comme indiqué.

On se contentera d'ajouter que la France est leader en Europe pour l'énergie hydraulique et dispose encore d'un potentiel important en microhydraulique. Pour la biomasse, la France possède en Europe une place privilégiée par son potentiel pour l'énergie bois. L'énergie éolienne est très développée en Union Européenne, leader mondial (dont l'Allemagne).

### *b) La géothermie et l'énergie des océans*

Ces deux formes d'énergie sont plus différenciées.

#### ► La géothermie

La géothermie est la chaleur provenant de la Terre. Cette énergie reste fondamentalement liée au gradient de température dans la croûte terrestre avec des anomalies liées au volcanisme.

En Europe, l'Italie est leader ; la France a pu mettre en place une centrale à Bouillante (Guadeloupe). Des expérimentations ont aussi été développées dans le bassin parisien, et différemment en Alsace.

L'énergie géothermique est stockable, et même régénérable pour les basses températures, par usage adéquat de réinjection et (ou) de pompes à chaleur. Cette énergie reste marginale en France.

Le nouveau site Internet du BRGM et de l'ADEME présente les notions de base essentielles sur la géothermie (chaleur provenant de la terre) : [www.geothermie-perspectives.fr](http://www.geothermie-perspectives.fr).

#### ► L'énergie des mers et des océans

Cette énergie se présente sous des facettes multiples ; on en distinguera trois variantes principales.

##### *L'énergie marémotrice*

Cette énergie de basse chute résulte d'un effet gravifique (attraction lunaire sur les masses fluides des océans). C'est une énergie de basse chute qui rejoint l'énergie hydraulique. En France, il existe une centrale marémotrice sur la Rance. Ce type d'usine nécessite des sites particuliers à forte amplitude de marée ; le potentiel de développement reste limité, d'autant que les conséquences écologiques des équipements d'envergure ne sont pas bien mesurées.

##### *L'énergie des vagues et des courants*

L'énergie des vagues est une variante de conversion à l'étude en Grande-Bretagne où elle connaît un certain succès. Elle se présente sous forme de variantes selon

les dispositifs de conversion : piston, flotteur, batteur appelé aussi « canard », réservoirs.

L'énergie des courants est l'équivalent en écoulement liquide (hydraulique), des écoulements gaz (éolienne, voile, voir paragraphe 14.2.3.e). Cette dernière voie est d'exploration plus récente.

### *L'énergie thermique des mers*

L'énergie thermique des mers ETM reste une idée française proposée en 1881 pour utiliser les eaux profondes et froides, comme puits de chaleur d'une machine thermique, utilisant les eaux chaudes de surface ; la différence de température faible entre source et puits conduit à un rendement de Carnot faible, compensé par des débits de fluide qui peuvent être très grands.

**Remarque :** une centrale ETM peut fonctionner dans le principe selon un cycle ouvert ou un cycle fermé avec fluide intermédiaire.

Le lecteur intéressé par l'énergie des vagues et des courants pourra consulter la référence (Brin A.) pour plus de détails.

## **18.3.2 La conversion thermique de l'énergie solaire**

On suppose dans ce paragraphe que les transferts radiatifs se font selon les lois classiques du rayonnement ; on a déjà indiqué que le Soleil se comporte comme un corps noir équivalent émettant à une température  $T_s = 5\,885\text{ K}$ .

Pour les bilans thermiques, la loi de transfert radiatif sommée selon les directions (hémisphérique) et les longueurs d'onde (globale) est suffisante ; l'émittance  $M$  correspondante du Soleil est fournie alors par la loi de Stefan :

$$M = \sigma T_s^4$$

Pour l'étude de matériau sélectif (ou la mesure radiative) la longueur d'onde ou (et) la direction du rayonnement intervient, il faut alors introduire la loi de Planck et ses corollaires (loi de Wien). Cela ne peut se faire que par la thermodynamique statistique ; nous ne l'étudierons pas dans cet ouvrage. Seuls les résultats seront utilisés selon les besoins.

### **a) Introduction à l'énergie solaire thermique**

La conversion thermodynamique de l'énergie solaire a connu un certain essor depuis les années 1970. L'utilisation centralisée de cette énergie a donné lieu à des expérimentations assez nombreuses dans le monde, pour des puissances de l'ordre de 10 MW (grand four solaire d'Odeillo : 1 000 KW). Cette conversion suppose une série de transformations à travers le système de captation (optique), l'absorbeur, le stockage et la machine thermique.

Cette dernière est constituée essentiellement de turbine à vapeur ou à gaz. La majorité des prototypes de machines fonctionnent en turbines à vapeur. Ce système solaire centralisé est caractérisé par divers rendements :

- le rendement optique du capteur ;
- le rendement optique et thermique de l'absorbeur ;
- le rendement du cycle thermodynamique ;
- le rendement du stockage thermique ;
- le rendement des auxiliaires.

À titre d'illustration, on utilise la méthode des pertes séparées pour établir l'expression du rendement global en régime dynamique stationnaire d'une centrale thermosolaire. Connaissant la puissance radiative incidente,  $E_0 \cdot S$ , où  $E_0$  représente la densité du flux incident sur la surface totale de captation  $S$ , on déduit la puissance optique disponible :

$$\dot{Q}_o = E_o S \rho F_g \quad (18.5)$$

où  $F_g$  est le facteur géométrique et  $\rho$  le facteur de réflexion des surfaces utilisées.

On notera que les pertes optiques associées peuvent varier avec l'encrassement et le vieillissement des surfaces.

La puissance radiative absorbée  $\dot{Q}_a$  vaut :

$$\dot{Q}_a = \alpha_c \dot{Q}_o \quad (18.6)$$

où  $\alpha_c$  représente l'absorptivité de la surface absorbante, d'aire  $s$ .

La puissance utile  $\dot{Q}_u$  vaut :

$$\dot{Q}_u = \dot{Q}_a - \dot{Q}_r - \dot{Q}_c \quad (18.7)$$

$\dot{Q}_r$ , représentant le flux des pertes thermiques par rayonnement, est donné par :

$$\dot{Q}_r = s \left[ (T_c + \Delta T)^4 - T_a^4 \right] \sigma \varepsilon_c \quad (18.8)$$

où :

$\varepsilon_c$  est l'émissivité de la surface absorbante  $s$

$\sigma$  est la constante de Stefan-Boltzmann

$T_a$  est la température ambiante

$T_c$  est la température du fluide caloporteur

$T_c + \Delta T$  est la température de la surface absorbante.

Le flux des pertes thermiques par convection,  $\dot{Q}_c$ , qui est donné par :

$$\dot{Q}_c = s \left[ (T_c + \Delta T) - T_a \right] h_c \quad (18.9)$$

avec  $h_c$ , le coefficient d'échange convectif de la surface  $s$ .



En supposant que le rendement du cycle thermodynamique est proportionnel au rendement de Carnot (le rendement de Carnot est la borne supérieure), et que la conversion mécanique-électrique est traduite par un facteur  $K$ , le rendement électrique  $\eta_{elec}$  de la machine est exprimé sous la forme :

$$\eta_{elec} = K \left( 1 - \frac{T_a}{T_c} \right) \quad (18.10)$$

$K$  est une constante dont la valeur est inférieure à 1.

Le rendement global du système s'exprime par la relation :

$$\eta_g = K \left( 1 - \frac{T_a}{T_c} \right) \left[ \alpha_c \rho F_g - \frac{\varepsilon_c \sigma \left[ (T_c + \Delta T)^4 - T_a^4 \right] + h_c \left[ (T_c + \Delta T) - T_a \right]}{C E_0} \right] \quad (18.11)$$

avec  $C = \frac{S}{s}$ , concentration moyenne surfacique.

L'énergie solaire étant une énergie de type flux, il semble plus judicieux de l'utiliser sous forme dispersée, par exemple dans l'habitat, par *conversion thermosolaire*. La conversion de l'énergie radiative en énergie thermique est caractérisée par le niveau de température  $T$  et la quantité de chaleur  $Q$  ou le flux de chaleur  $\dot{Q}$ . Le convertisseur thermique peut être le simple *capteur solaire plan*, dont les caractéristiques en régime dynamique stationnaire et en régime transitoire sont examinées ci-après.

Le modèle le plus connu en régime dynamique stationnaire est celui de Hottel-Whillier-Bliss, développé entre 1942 et 1959, et exprimé par la relation :

$$\dot{Q}_u = A_c F \left[ G - U_c (T - T_a) \right] \quad (18.12)$$

où  $A_c$  représente l'aire du collecteur plan ; elle correspond à  $S$ .

$F$  est le facteur (optique) d'efficacité tel que :

$$\begin{aligned} F &= 1 && \text{pour } T = T_{c,m} && (\text{température moyenne d'absorbeur}) \\ F &= F' && \text{pour } T = T_{f,m} && (\text{température moyenne du fluide}) \\ F &= F_R && \text{pour } T = T_{f,e} && (\text{température d'entrée du fluide}) \end{aligned}$$

$G$  représente l'éclairement transmis et absorbé (flux correspondant à  $\dot{Q}_a$  pour le capteur plan) ;

$U_c$  est la conductance surfacique globale de pertes thermiques ;

$F'$ ,  $F_R$  seront examinés en détail ci-après.

### b) Bilan thermique d'un collecteur plan et conductance thermique de pertes

#### ➤ Bilan thermique instantané d'un collecteur plan

Le bilan thermique instantané d'un collecteur plan se déduit directement à partir de l'approche du paragraphe 18.3.2.a, pour une transformation infinitésimale  $dt$ , à l'instant  $t$  :

$$E_o A_c \bar{\tau}_s \alpha_s = \dot{Q}_u + \dot{Q}_p + \frac{dE_c}{dt} \quad (18.13)$$

avec :

$\bar{\tau}_s$  transmittance moyenne de la couverture (souvent en verre) pour le rayonnement solaire

$\alpha_s$  absorbtance du collecteur pour le rayonnement solaire

$\dot{Q}_p$  flux de pertes thermiques

$E_c$  énergie interne du capteur.

On en déduit l'expression du rendement instantané du capteur :

$$\eta_c(t) = \frac{\dot{Q}_u(t)}{A_c E_o(t)} \quad (18.14)$$

Généralement et selon les normes, le rendement standard est moyenné sur une période de 15 à 20 minutes :

$$\bar{\eta}_c = \frac{\int_0^t \dot{Q}_u(t) dt}{A_c \int_0^t E_o(t) dt} \quad (18.15)$$

Il est alors aisé d'en déduire des rendements journaliers ou saisonniers.

#### ► Conductance thermique de pertes d'un capteur plan

L'analyse thermique linéaire conduit à l'expression du flux de pertes totales :

$$\dot{Q}_p = U_c A_c (T_c - T_a) \quad (18.16)$$

avec  $T_c$  – température moyenne du capteur.

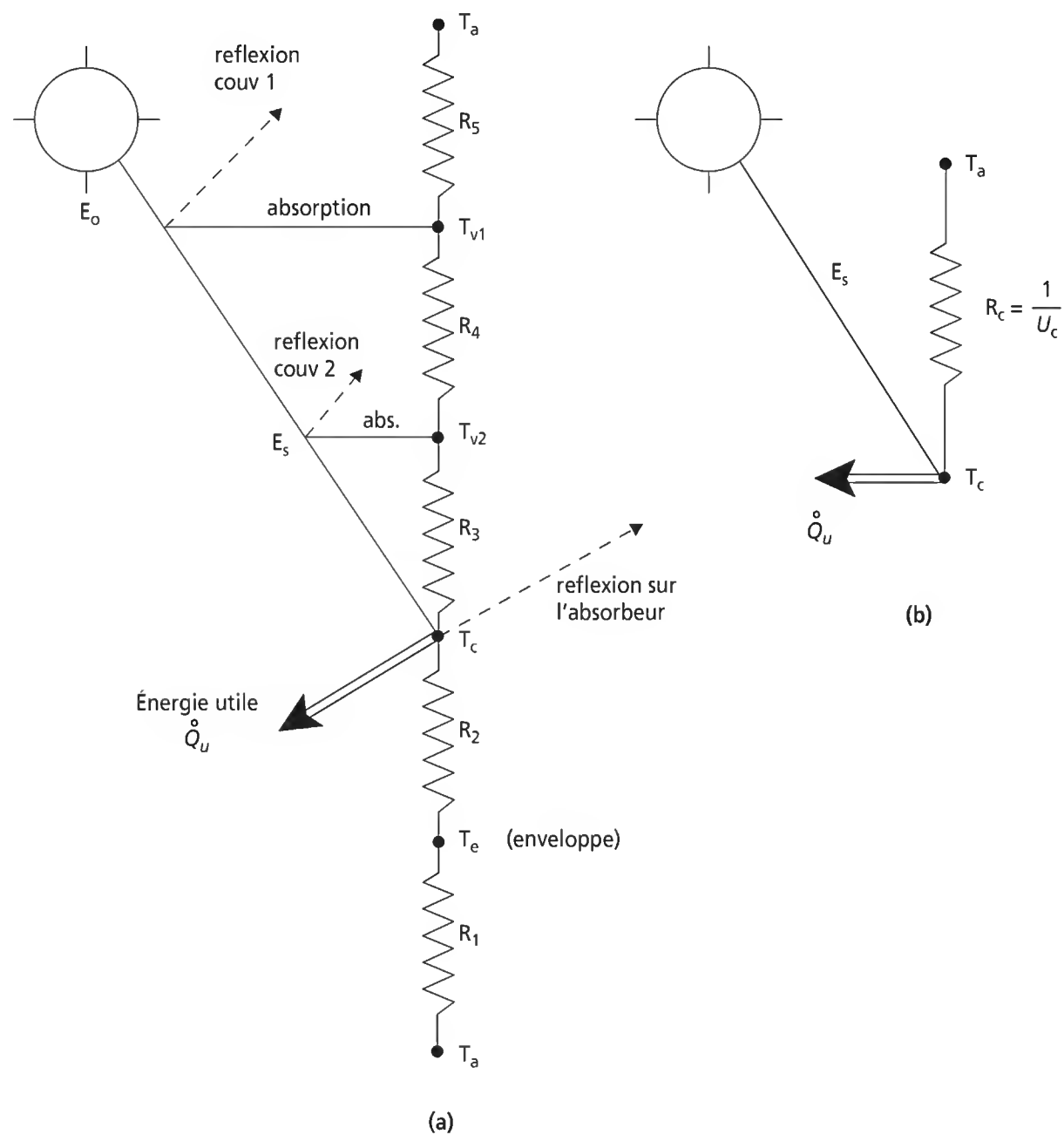
Le modèle du capteur plan est établi en supposant que :

- le champ de température de l'absorbeur est homogène (faible écart de température entre le point le plus chaud et le point le plus froid) ;
- le capteur est en régime dynamique stationnaire ( $\frac{dE_c}{dt} = 0$ ) ;
- les effets de bords sont négligeables, l'échange thermique est monodimensionnel perpendiculairement au plan du capteur ;
- l'écoulement du fluide caloporteur est uniforme ;
- le rayonnement du ciel est équivalent à celui d'un corps noir en infrarouge, à la température de ciel équivalente ;
- l'irradiation est uniforme sur le capteur.

Le schéma thermique d'un capteur plan à double vitrage est représenté par cinq résistances thermiques réparties entre six nœuds de température, comme le montre la figure 18.17.a.

Ce schéma peut être réduit à un réseau thermique équivalent représenté par la figure 18.17.b.





**Figure 18.17** Schéma thermique (a) et réseau équivalent (b) d'un capteur plan à double vitrage.

### Expression des pertes thermiques arrières du capteur plan

Ces pertes se font par conduction à travers l'isolant, de conductivité thermique  $k$  et d'épaisseur  $l$ , puis par convection vers l'ambiante.

$$R_2 = \frac{l}{k} \quad (18.17)$$

$$R_1 = \frac{1}{h_{c,e}} \quad (18.18)$$

avec  $h_{c,e}$  – coefficient d'échange convectif entre l'enveloppe et l'ambiance.

Une bonne isolation arrière suppose  $R_2 \gg R_1$ .

Si l'on néglige la résistance de convection, on peut par contre tenir compte de diverses résistances de conduction en série sous la forme :

$$u_b = \sum_i \frac{1}{R_i} = \sum_i \frac{k_i}{l_i} \quad (18.19)$$

Il en résulte le flux de pertes arrières :

$$\dot{Q}_{pb} = \frac{A_c k}{l} (T_c - T_a) \quad (18.20)$$

**Remarque :** il est possible d'effectuer une correction des effets de bord en

multipliant (18.20) par le terme  $\left[ 1 + \frac{2l_3(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \right]$ , où  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  représentent respectivement la largeur, la longueur et la profondeur du capteur.

#### Estimation des pertes thermiques avant du capteur plan

Par commodité, nous considérons le régime dynamique stationnaire ou permanent, ce qui induit des flux de pertes thermiques identiques entre  $T_c$  et  $T_{v2}$ , puis  $T_{v2}$  et  $T_{v1}$ .

Le flux perdu entre  $T_c$  et  $T_{v2}$  s'écrit :

$$\dot{Q}_{pa} = A_c h_{c2} (T_c - T_{v2}) + \frac{\sigma A_c (T_c^4 - T_{v2}^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{ci}} + \frac{1}{\varepsilon_{v2i}} - 1} \quad (18.21)$$

avec :

$h_{c2}$  coefficient de convection entre l'absorbeur et le second vitrage ;

$\varepsilon_{ci}$  émissivité infrarouge de l'absorbeur ;

$\varepsilon_{v2i}$  émissivité infrarouge du second vitrage.

Cette relation est couramment *linéarisée* sous la forme :

$$\dot{Q}_{pa} = (h_{c2} + h_{r2}) A_c (T_c - T_{v2}) = \frac{T_c - T_{v2}}{R_3} \quad (18.22)$$

avec :

$$h_{r2} = \frac{\sigma (T_c + T_{v2}) (T_c^2 + T_{v2}^2)}{\frac{1}{\varepsilon_{ci}} + \frac{1}{\varepsilon_{v2i}} - 1} \quad (18.23)$$

De la même manière, on exprime le flux de pertes entre les vitrages :

$$\dot{Q}_{pa} = (h_{c1} + h_{r1}) A_c (T_{v2} - T_{v1}) = \frac{T_{v2} - T_{v1}}{R_4} \quad (18.24)$$

avec :

$$h_{r1} = \frac{\sigma(T_{v1} + T_{v2})(T_{v1}^2 + T_{v2}^2)}{\frac{1}{\varepsilon_{v1i}} + \frac{1}{\varepsilon_{v2i}} - 1} \quad (18.25)$$

et  $h_{c1}$  – coefficient de convection entre les deux vitrages.

### Résistance thermique entre le vitrage 1 et l'ambiance

Elle est due à l'échange par convection libre ou forcée entre la vitre et l'ambiance et au transfert radiatif entre la vitre et le ciel. Ces échanges se caractérisent par les températures  $T_{v1}$  et  $T_a$ , respectivement celle de la vitre et de l'ambiance prise égale à celle du ciel, et par les coefficients linéaires associés  $h_{c\infty}$  et  $h_{r\infty}$

$$\dot{Q}_{pa} = (h_{c\infty} + h_{r\infty})(T_{v1} - T_a) = \frac{T_{v1} - T_a}{R_5} \quad (18.26)$$

avec :

$$h_{r\infty} = \varepsilon_{v1i} \sigma(T_{v1} + T_c)(T_{v1}^2 + T_c^2) \left[ \frac{T_{v1} - T_c}{T_{v1} - T_a} \right] \quad (18.27)$$

$T_c$  est la température du ciel.

### Conclusions

L'ensemble des résistances thermiques ( $R_1$  à  $R_5$ ) étant connu d'après le paragraphe précédent, on en déduit aisément  $U_c$  :

$$U_c = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4 + R_5} \quad (18.28)$$

Il y a lieu de remarquer toutefois que l'approximation linéaire induit un calcul itératif, mais qui converge en général rapidement vers la solution, comme pourra le vérifier le lecteur.

### c) Analyse thermodynamique des collecteurs plans à absorbeur plan

La connaissance de la conductance de pertes par unité de surface est un préalable à la détermination du comportement thermohydraulique du capteur ; les flux de chaleur sont en effet nécessairement dépendants des gradients de température, supposés toutefois suffisamment faibles pour considérer  $U_c$  comme une constante, quel que soit le point de l'absorbeur :

$$\dot{Q}_p'' = U_c [T_c(x, y) - T_a] \quad (18.29)$$

#### ➤ Effet d'ailette entre deux canaux fluides

La figure 18.18 représente un élément du collecteur avec deux canaux fluides longitudinaux, et les grandeurs géométriques associées.

Si l'on suppose que la conduction de chaleur dans la direction  $x$  est négligeable par rapport à celle de la direction  $y$ , le bilan d'énergie sur un élément de longueur unitaire et à une distance  $x$ , s'écrit :

$$\alpha_c E_c dy - U_c (T_c - T_a) dy + kt \left. \frac{dT_c}{dy} \right|_{y+dy, x} - kt \left. \frac{dT_c}{dy} \right|_{y, x} = 0 \quad (18.30)$$

avec :

$k$ , conductivité de l'absorbeur supposée constante ;

$t$ , épaisseur de l'absorbeur supposée constante.

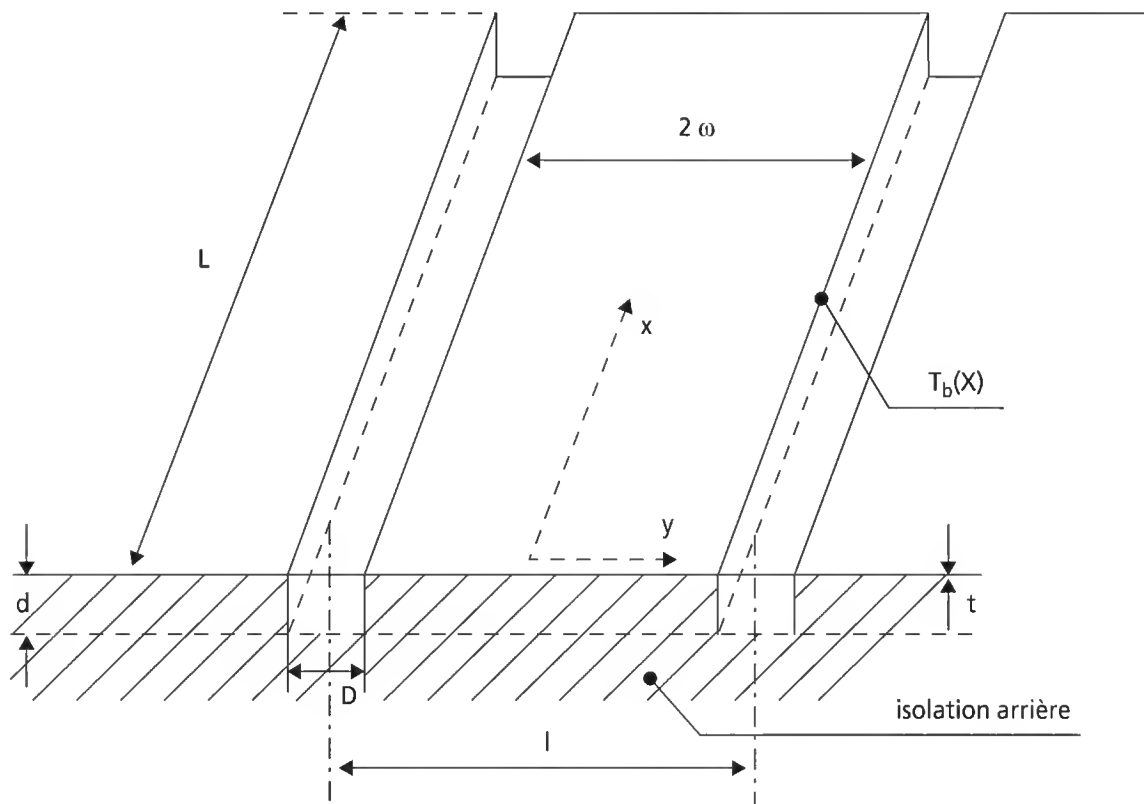


Figure 18.18 Schéma de l'élément du collecteur à deux canaux fluides.

Après réarrangement, il vient :

$$\frac{d^2 T_c}{dy^2} = \frac{U_c}{kt} \left[ T_c - \left( T_a + \frac{\alpha_c E_c}{U_c} \right) \right] \quad (18.31)$$

L'intégration de cette équation différentielle suppose la connaissance de deux conditions aux limites :

$$\forall x, y = 0 : \frac{dT_c}{dy} = 0 \quad (18.32)$$

$$y = \omega = \frac{l - D}{2} : T_c = T_b(x) \quad (18.33)$$

où  $T_b(x)$  est la température de base de l'ailette entre deux tubes.

En faisant le changement de variable :

$$\Phi = T_c - \left( T_a + \frac{\alpha_c E_c}{U_c} \right) \quad (18.34)$$

il vient :

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} = m^2 \Phi \quad (18.35)$$

avec :

$$y = 0 : \frac{d\Phi}{dy} = 0 \quad (18.36)$$

$$y = \omega : \Phi = T_b(x) - \left( T_a + \frac{\alpha_c E_c}{U_c} \right) \quad (18.37)$$

$$m^2 = \frac{U_c}{k t} \quad (18.38)$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$\Phi(y) = C_1 \sinh my + C_2 \cosh my \quad (18.39)$$

L'utilisation des conditions aux limites conduit à la solution suivante :

$$\frac{T_c - \left( T_a + \frac{\alpha_c E_c}{U_c} \right)}{T_b(x) - \left( T_a + \frac{\alpha_c E_c}{U_c} \right)} = \frac{\cosh my}{\cosh m\omega} \quad (18.40)$$

On en déduit le flux thermique par unité de largeur  $x$  dissipé de l'ailette vers un canal :

$$\dot{Q}(x) = -kt \frac{dT_c}{dy} \Big|_{y=\omega} = \frac{1}{m} \left[ \alpha_c E_c - U_c (T_b(x) - T_a) \right] \tanh m\omega \quad (18.41)$$

Pour la surface du collecteur comprise entre deux canaux, il vient :

$$\dot{Q}_{total}(x) = 2\omega \left[ \alpha_c E_c - U_c (T_b(x) - T_a) \right] \frac{\tanh m\omega}{m\omega} \quad (18.42)$$

Si la conductivité  $k$  est très grande, le flux dissipé tend vers une valeur maximale obtenue par passage à la limite dans l'équation (18.42) :

$$\text{Max } \dot{Q}_{total}(x) = 2\omega \left[ \alpha_c E_c - U_c (T_b(x) - T_a) \right] \quad (18.43)$$

L'ailette, formée par la surface du collecteur entre deux canaux, aura pour efficacité :

$$\eta_a = \frac{\tanh m\omega}{m\omega} \quad (18.44)$$

Il y a lieu d'ajouter la contribution de l'énergie directement incidente sur la conduite de fluide dans le canal :

$$\dot{Q}_{\text{conduit}}(x) = D \left[ \alpha_c E_c - U_c (T_b(x) - T_a) \right] \quad (18.45)$$

La densité linéique d'énergie utile, dans la direction d'écoulement  $x$ , est obtenue en additionnant les contributions (18.42) et (18.45) :

$$\dot{Q}_u(x) = (D + 2\omega\eta_a) \left[ \alpha_c E_c - U_c (T_b(x) - T_a) \right] \quad (18.46)$$

#### ► Transfert d'énergie au fluide de travail

Pour le calcul de la densité de flux linéique transmise au fluide on suppose que les résistances thermiques de conduction à travers le métal du canal et entre le tube et l'absorbeur sont négligeables.

Il ne subsiste alors que la résistance de transfert convectif, représentée par le coefficient de convection interne  $h_{ci}$  :

$$\dot{Q}_u(x) = 2(D + d) h_{ci} [T_b(x) - T_f(x)] \quad (18.47)$$

#### Efficacité thermique de l'absorbeur

L'efficacité thermique de l'absorbeur,  $F'$ , est définie par référence à la température du fluide à l'abscisse  $x$  :

$$\dot{Q}_u(x) = F' l \left[ \alpha_c E_c - U_c (T_f(x) - T_a) \right] \quad (18.48)$$

Par élimination de  $T_b(x)$  entre les deux relations précédentes on obtient après calcul :

$$F' = \frac{1/U_c}{l \left[ \frac{1}{U_c(D + 2\omega\eta_a)} + \frac{1}{h_{ci}(2D + 2d)} \right]} \quad (18.49)$$

L'efficacité  $F'$  est donné par le rapport de la résistance thermique entre le collecteur et l'ambiante, à la résistance thermique entre le fluide et l'ambiante.

L'efficacité  $F'$  est une fonction de  $U_c$ ,  $h_{ci}$ ,  $\eta_a$  et de la géométrie ; elle dépend peu des températures.  $F'$  est croissante de  $t$  et  $k$ , décroissante de  $l$ .

#### Facteur d'extraction de chaleur

Ce facteur rend compte de l'accroissement de la température du fluide,  $T_f(x)$  dans la direction de l'écoulement en passant de  $T_{fe}$ , température d'entrée, à  $T_{fs}$ , température de sortie.

Le bilan énergétique sur un élément de longueur  $dx$  de canal s'écrit :

$$\dot{m} c_p [T_f(x + dx) - T_f(x)] = \dot{Q}_u(x) dx \quad (18.50)$$

où :

$\dot{m} c_p$  représente le débit calorifique dans le canal ;

$c_p$  est la chaleur spécifique massique, supposée constante.

Connaissant  $\dot{Q}_u(x)$ , à partir de l'équation (18.48), on a :

$$\dot{m} c_p \frac{dT_f(x)}{dx} = F' l [\alpha_c E_c - U_c (T_f(x) - T_a)] \quad (18.51)$$

De cette équation différentielle, en supposant  $U_c$  et  $F'$  constants, l'intégration entre l'entrée ( $x = 0$ ,  $T_f(0) = T_{fe}$ ) et la sortie ( $x = L$ ,  $T_f(L) = T_{fs}$ ) conduit à :

$$\frac{T_{fs} - \left(T_a + \frac{\alpha_c E_c}{U_c}\right)}{T_{fe} - \left(T_a + \frac{\alpha_c E_c}{U_c}\right)} = \exp\left[-\frac{U_c F' l L}{\dot{m} c_p}\right] = \exp\left[-\frac{U_c F' A_c}{\dot{m} c_p}\right] \quad (18.52)$$

Le facteur d'extraction de chaleur  $F_R$  est défini, comme le rapport entre le flux de chaleur réel transféré au fluide et le flux de chaleur limite transférable au fluide sous un écart de température minimum entre le fluide et l'environnement (optimum thermodynamique correspondant à un fluide de température constante, dont la vitesse moyenne débitante tend vers l'infini) :

$$F_R = \frac{\dot{m} c_p (T_{fs} - T_{fe})}{[\alpha_c E_c - U_c (T_{fe} - T_a)] A_c} \quad (18.53)$$

En combinant les deux équations précédentes, il vient :

$$F_R = \frac{G c_p}{U_c} \left[ 1 - \frac{\frac{\alpha_c E_c}{U_c} - (T_{fs} - T_a)}{\frac{\alpha_c E_c}{U_c} - (T_{fe} - T_a)} \right] \quad (18.54)$$

où  $G = \frac{\dot{m}}{A_c}$  est la vitesse massique (18.55).

On en déduit facilement :

$$F_R = \frac{G c_p}{U_c} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{U_c F'}{G c_p}\right) \right] \quad (18.56)$$

$$\dot{Q}_u = A_c F_R [\alpha_c E_c - U_c (T_{fe} - T_a)] \quad (18.57)$$

L'expression de  $\dot{Q}_u$  est très commode, car elle ne dépend que des paramètres d'entrée et de conception du capteur solaire.

#### d) Comportement en régime transitoire des capteurs plans

L'analyse du comportement en régime transitoire des capteurs plans est la règle pour les systèmes solaires, dû au caractère transitoire des données météorologiques

(énergie, flux) et à l'inertie thermique du capteur : les transitoires thermiques étant généralement longs, surtout pour les systèmes à eau, par opposition aux systèmes à air.

### ► Un modèle du transitoire thermique

Un modèle simple est proposé pour l'étude du comportement transitoire du capteur plan. Ce modèle est basé sur les hypothèses suivantes : l'absorbeur, le fluide et l'isolation arrière sont supposés isothermes, à la même température moyenne  $\bar{T}_p$ , de l'absorbeur plan et les pertes arrières sont négligées.

On peut alors écrire le bilan énergétique d'un capteur à simple vitrage, ne délivrant pas d'énergie :

$$(M c_p)_p \frac{d\bar{T}_p(t)}{dt} = A_c \alpha_c E_c + A_c U_p [\bar{T}_v(t) - \bar{T}_p(t)] \quad (18.58)$$

où  $(M c_p)_p$  – capacité thermique totale (absorbeur, fluide, isolant).

Le bilan énergétique de la couverture :

$$(M c_p)_v \frac{d\bar{T}_v(t)}{dt} = A_c U_p [\bar{T}_p(t) - \bar{T}_v(t)] - A_c U_\infty [\bar{T}_v(t) - T_a] \quad (18.59)$$

où :

$(M c_p)_v$  est la capacité thermique du vitrage ;

$U_p$ , la conductance thermique surfacique entre l'absorbeur à  $\bar{T}_p$  et le vitrage à  $\bar{T}_v$  ;

$U_\infty$  la conductance thermique surfacique entre le vitrage et l'ambiance ( $U_\infty = h_{c\infty} + h_{r\infty}$ )

Dans ces équations  $T_a$  est supposée constante.

L'intégration des deux équations différentielles simultanées est simplifiée en considérant comme en régime permanent l'hypothèse de proportionnalité des pertes du collecteur et du vitrage :

$$U_\infty [\bar{T}_v(t) - T_a] = U_c [\bar{T}_p(t) - T_a] \quad (18.60)$$

Par différentiation, il vient :

$$\frac{d\bar{T}_v(t)}{dt} = \frac{U_c}{U_\infty} \frac{d\bar{T}_p(t)}{dt} \quad (18.61)$$

La combinaison des deux équations différentielles précédentes conduit alors à l'équation suivante pour la température de l'absorbeur :

$$\left[ (M c_p)_p + \frac{U_c}{U_\infty} (M c_p)_v \right] \frac{d\bar{T}_p(t)}{dt} = [\alpha_c E_c - U_c (\bar{T}_p(t) - T_a)] A_c \quad (18.62)$$

Si  $E_c$  et  $T_a$  sont connus, par exemple constants par morceau, et si  $T_{pe}$  est la température initiale de l'absorbeur, il vient :



$$\bar{T}_p(t) - T_a = \frac{\alpha_c E_c}{U_c} - \left[ \frac{\alpha_c E_c}{U_c} - (T_{pe} - T_a) \right] \exp \left[ - \frac{U_c A_c t}{(M c_p)_p + \frac{U_c}{U_\infty} (m c_p)_v} \right] \quad (18.63)$$

La constante de temps du capteur est donnée par :

$$\tau = \frac{(M c_p)_p + \frac{U_c}{U_\infty} (M c_p)_v}{U_c A_c} \quad (18.64)$$

Une faible constante de temps traduit la durée des transitoires et suppose de minimiser les inerties thermiques  $(M c_p)_p$ ,  $(M c_p)_v$  et de maximiser dans le même temps les conductances  $U_c$  et  $U_\infty$ .

### ► Conclusions

Le présent paragraphe a montré l'importance de la prise en compte de la nature fluctuante du gisement solaire, mais aussi de la température ambiante.

Le modèle introduit a permis de dégager une caractéristique principale, à savoir, la constante de temps. Celle-ci est indispensable à une bonne conception des systèmes solaires en vue de l'élaboration de modèles plus robustes de contrôle – commande pour une gestion optimale de l'énergie.

Le lecteur intéressé trouvera des compléments d'information dans la thèse (Merzouk M.) où l'accent est mis sur le comportement en régime transitoire de capteur solaire évacué.

### e) Sélectivité héliothermique

#### ► Bilan thermique radiatif

La conversion héliothermique suppose des déperditions thermiques sur la surface de captage qui assure l'absorption du rayonnement solaire, mais doit aussi limiter les pertes thermiques vers l'avant.

Un convertisseur héliothermique comprend classiquement : un absorbeur, une couverture, un fluide caloporteur et l'échangeur associé, une isolation arrière et latérale, un châssis support.

Les paramètres d'utilisation sont :  $T$ , la température de fonctionnement du capteur (absorbeur) et la puissance thermique du capteur.

Les hypothèses utilisées ci-dessous sont les suivantes :

- la température de l'absorbeur est supposée uniforme et égale à celle du fluide caloporteur ;
- l'environnement est équivalent à un corps noir à la température  $T_E$  ;
- on ne tient pas compte à priori de l'effet de serre qui constitue une forme de sélectivité ;

- l'isolation thermique arrière et latérale est supposée parfaite ;
- le régime de fonctionnement est dynamique stationnaire ;
- la surface de l'absorbeur est diffuse ;
- le rayonnement solaire est assimilé à celui d'un corps noir à la température  $T_s$ .

► Bilan thermique radiatif

Température limite d'équilibre radiatif,  $T_L$

Le bilan thermique radiatif s'exprime comme suit :

$$\Phi_S = \Phi_P \quad (18.65)$$

avec :

$\Phi_S$  puissance captée

$\Phi_P$  puissance de pertes.

La puissance captée est donnée par l'équation :

$$\Phi_S = \alpha I^* + \alpha' \sigma T_E^4 \quad (18.66)$$

où :

$I^*$  puissance radiative incidente

$\alpha$  absorptivité totale hémisphérique du spectre solaire

$\alpha'$  absorptivité totale hémisphérique de l'environnement.

On note que  $\alpha' \neq \alpha$ .

La puissance de pertes est donnée par l'équation :

$$\Phi_P = \varepsilon \sigma T^4 + P_C \quad (18.67)$$

où :

$\varepsilon$  émissivité totale hémisphérique de l'absorbeur

$T$  température d'équilibre de l'absorbeur thermique

$P_C$  pertes par convection naturelle ou forcée et par conduction dans l'air et les matériaux.

D'où :

$$\varepsilon \sigma T^4 + P_C = \alpha' \sigma T_E^4 + \alpha I^* \quad (18.68)$$

Pour une surface diffuse et noire  $\alpha = \alpha' = \varepsilon = 1$ ; on a :

$$I^* = \sigma (T^4 - T_E^4) + P_C \quad (18.69)$$

La température  $T_E$  est donnée par deux corrélations :

$$T_E = 0,0552 T_{air}^{1,5} \quad \text{Schwirbank 1963 (M. Feidt et al.)} \quad (18.70)$$

$$T_E = T_{air} - 6 \quad \text{Whillier 1967 (M. Feidt et al.)} \quad (18.71)$$

Une approximation courante consiste à supposer  $T_E \approx T_{air}$ , ou si le convertisseur possède une couverture à la température  $T_E = T_v$ , température de cette ouverture.

La température maximum d'équilibre thermique est obtenue à l'équilibre radiatif :  $P_C = 0$  (dans le vide) et vaut pour le corps noir :

$$T_L' = \sqrt[4]{\frac{I^* + \sigma T_E^4}{\sigma}} \quad (18.72)$$

Rendement de conversion ou rendement thermique : si  $\Phi_u$  est la puissance utile extraite du convertisseur, le bilan calorifique est exprimé par :

$$\Phi_S = \Phi_P + \Phi_u \quad (18.73)$$

$$\Phi_u + \varepsilon \sigma T^4 + P_C = \alpha' \sigma T_E^4 + \alpha I^* \quad (18.74)$$

Le rendement de conversion  $\eta$  est défini par la relation :

$$\eta = \frac{\Phi_u}{I^*} = \alpha + \frac{\alpha' \sigma T_E^4}{I^*} - \frac{\varepsilon \sigma T^4}{I^*} - \frac{P_C}{I^*} \quad (18.75)$$

Rendement radiatif : le rendement radiatif  $\eta_R$  correspondant à  $P_C = 0$  en résulte :

$$\eta_R = \alpha + \frac{\alpha' \sigma T_E^4}{I^*} - \frac{\varepsilon \sigma T^4}{I^*} \quad (18.76)$$

$$\eta_R = \alpha \left\{ \left[ 1 - \frac{\varepsilon \sigma (T^4 - T_E^4)}{\alpha I^*} \right] - \frac{\varepsilon - \alpha'}{\alpha I^*} \sigma T_E^4 \right\} \quad (18.77)$$

$$\eta_R \approx \alpha \left[ 1 - \frac{\varepsilon \sigma (T^4 - T_E^4)}{\alpha I^*} \right] \quad \text{si} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \alpha'} \gg \frac{T_E^4}{T^4 - T_E^4} \quad (18.78)$$

### ► Sélectivité d'un absorbeur solaire

#### Définition

L'absorbeur étant un corps gris diffus opaque ( $\tau_\lambda = 0$ ) dont les propriétés radiatives obéissent à la loi de Kirchhoff :

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda = 1 - \rho_\lambda \quad (18.79)$$

où :

$\rho_\lambda$  facteur de réflexion monochromatique de l'absorbeur

$\tau_\lambda$  facteur de transmission monochromatique de l'absorbeur

$\alpha$  et  $\varepsilon$  dépendent donc des propriétés optiques de la surface de l'absorbeur. De plus,  $\varepsilon$  dépend fortement de  $T$ .

L'accroissement du rendement radiatif suppose, en particulier, une diminution du rapport  $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ , à absorptivité  $\alpha$  donnée. Il faut donc que la surface possède un faible facteur de réflexion pour le spectre solaire, mais plus élevé pour un rayonnement infrarouge correspondant à l'émission d'un corps noir pour la température  $T$  donnée.

La surface est alors optiquement sélective ; ses propriétés optiques diffèrent selon le domaine spectral envisagé comme le montre la figure 18.19 relative au chrome noir.

Gallet et Papini ont proposé une modélisation des absorbeurs sélectifs réels (figure 18.20). Celle-ci suppose la surface grise et diffuse sur deux domaines I et II

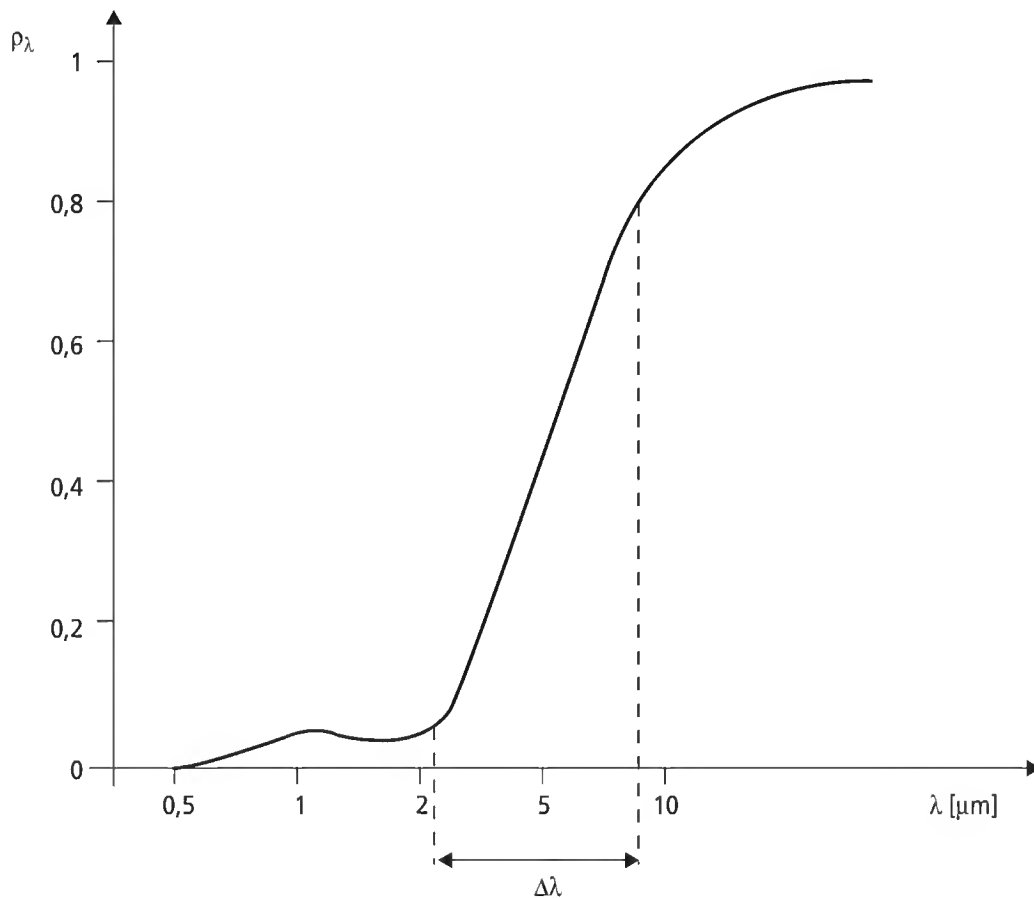


Figure 18.19 Facteur monochromatique de réflexion d'un chrome noir.

séparés par une longueur d'onde de coupure  $\lambda_c$ . Compte tenu des caractéristiques du spectre solaire ( $T_s = 5\,885\text{ K}$  ;  $0,25\text{ }\mu\text{m} \leq \lambda \leq 2,5\text{ }\mu\text{m}$ ),  $\lambda_c$  sera voisine de  $2,5\text{ }\mu\text{m}$ .

Par définition on a alors :

$$\varepsilon = \frac{1}{\sigma T^4} \left[ A \int_0^{\lambda_c} m_\lambda(\lambda, T) d\lambda + E \int_{\lambda_c}^{\infty} m_\lambda(\lambda, T) d\lambda \right] \quad (18.80)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sigma T_s^4} \left[ A \int_0^{\lambda_c} m_\lambda(\lambda, T_s) d\lambda + E \int_{\lambda_c}^{\infty} m_\lambda(\lambda, T_s) d\lambda \right] \quad (18.81)$$

$$\alpha' = \frac{1}{\sigma T_E^4} \left[ A \int_0^{\lambda_c} m_\lambda(\lambda, T_E) d\lambda + E \int_{\lambda_c}^{\infty} m_\lambda(\lambda, T_E) d\lambda \right] \quad (18.82)$$

où  $m_\lambda(\lambda, T_i)$  est l'émittance monochromatique du corps noir à la température  $T_i$ .

En utilisant la fraction d'énergie émise  $k_i$  :

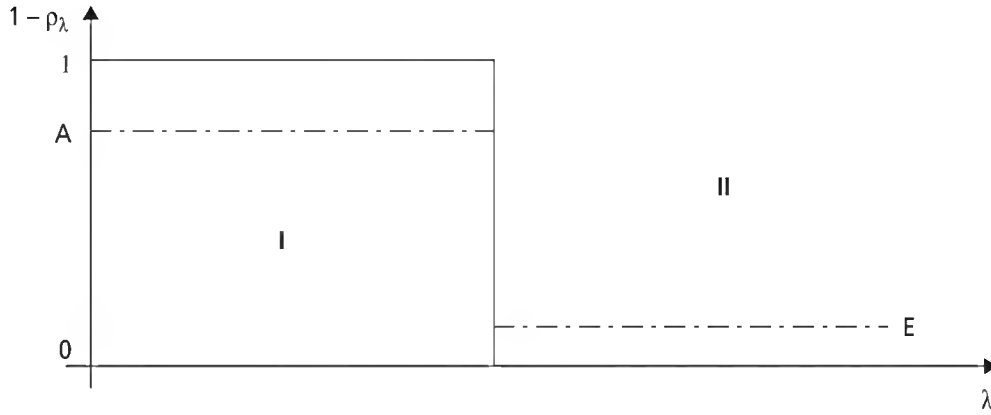


Figure 18.20 Facteur d'absorption monochromatique de surface sélective.

$$k_i = \frac{\int_0^{\lambda_c} m_\lambda(\lambda, T_i) d\lambda}{\sigma T_i^4} = \int_0^{\lambda_c} \frac{C_1}{\sigma T_i^4 \lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp \frac{C_2}{\lambda T_i} - 1} \quad (18.83)$$

en faisant le changement de variable  $x_i = \lambda T_i$

$$k_i = \frac{1}{\sigma} \int_0^{x_i} \frac{\lambda^5 m(x_i)}{x_i^5} dx_i \quad (18.84)$$

On en déduit :

$$\alpha = (A - E) k_S + E \quad (18.85)$$

$$\alpha' = (A - E) k_E + E \quad (18.86)$$

$$\varepsilon = (A - E) k + E \quad (18.87)$$

et

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{\left(\frac{A}{E} - 1\right) k_S + 1}{\left(\frac{A}{E} - 1\right) k + 1} \quad (18.88)$$

où  $\frac{\alpha}{\varepsilon}$  est l'indice de performance de la surface, fonction du rapport  $\frac{A}{E}$  et implicitement de la température  $T$  exprimée par  $k$ .

Si  $T$  est faible et  $\lambda_c \cong 2,5 \mu\text{m}$ , les fractions d'énergie prennent les valeurs  $k_S \cong 1$  et  $k \cong 0$ , d'où :

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} \cong \frac{A}{E} \quad (18.89)$$

De même, si  $T$  est faible et  $\lambda_c < 2,5 \mu\text{m}$   $k \cong 0$  et

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} \approx \left(\frac{A}{E} - 1\right) k_S + 1 \quad (18.90)$$

La température de stagnation  $T_L$  est déterminée à l'équilibre thermique dans le vide ( $P_C = 0$ ) pour un rendement radiatif nul ( $\eta_R = 0$ ) :

$$\sigma (T_L^4 - T_E^4) = \frac{\alpha}{\varepsilon} I^* \quad (18.91)$$

*Influence de la sélectivité d'un absorbeur solaire sur le rendement radiatif de surface. Coefficient de performance*

Le rendement radiatif défini par la relation (18.77) est donné en fonction des paramètres  $A$ ,  $s$ ,  $\lambda_C$  et  $T$  par la relation :

$$\eta_R = A \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{1}{s} \right) k_S + \frac{1}{s} \right] - \left[ \left( 1 - \frac{1}{s} \right) k + \frac{1}{s} \right] \sigma \frac{T^4 - T_E^4}{I^*} \right\} = f(A, s, \lambda_C, T) \quad (18.92)$$

avec :

$s = \frac{A}{E}$  est le facteur de sélectivité.

En se donnant  $A$  et  $s$ , le rendement  $\eta_R$  est fonction de  $\lambda$ , par l'intermédiaire de  $k_S$  et  $k$ , il passe par un maximum pour une longueur d'onde de coupure d'autant plus faible que  $T$  augmente.

L'approximation faite sur le rendement radiatif se traduit par :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \alpha'} \gg \frac{T_E^4}{T^4 - T_E^4} \quad (18.93)$$

où

$$\frac{(s-1)k+1}{(s-1)(k_S - k_E)} \gg \frac{T_E^4}{T^4 - T_E^4} \quad (18.94)$$

$$\eta_R = A \left[ K_1 - \frac{K_2}{s} \right] \quad (18.95)$$

avec :

$$K_1 = k_S - k \sigma \frac{T^4 - T_E^4}{I^*} \quad (18.96)$$

$$K_2 = -(1 - k_S) + (1 - k) \sigma \frac{T^4 - T_E^4}{I^*} \quad (18.97)$$

Cas particuliers : corps gris  $s = \frac{A}{E} = 1$  et corps noir  $A = E = 1$ .

$$\eta_R' = 1 - \sigma \frac{T^4 - T_E^4}{I^*} = K_1 - K_2 \quad (18.98)$$

Le rendement radiatif maximum est obtenu pour  $s \rightarrow \infty$

$$\eta_{Rmax} = A K_1 \quad (18.99)$$

Pour les cas réels,

$$\eta_R = \gamma \eta_{Rmax} \quad \gamma \text{ est coefficient de performance} \quad (18.100)$$

$$\gamma = 1 - \frac{K_2}{K_1} \frac{1}{s} \Rightarrow s(1 - \gamma) = \frac{K_2}{K_1} \quad (18.101-18.102)$$

d'où :

$$\gamma = 1 - \frac{1}{s} \left[ 1 - \frac{1 - \frac{\sigma(T^4 - T_E^4)}{I^*}}{k_s - k \frac{\sigma(T^4 - T_E^4)}{I^*}} \right] \quad (18.103)$$

Le coefficient de performance  $\gamma$  dépend des propriétés thermiques de l'absorbeur ( $s, \lambda_C, T$ ), du gisement et de l'utilisation ( $I^*, T_E$ ),  $T: \gamma = f(s, \lambda_C, T, T_E, I^*)$ .

### ► Optimisation d'une surface absorbante sélective

#### *Optimisation de la longueur d'onde de coupure*

L'optimisation du rendement radiatif par rapport à  $\lambda$  est conduite à partir des relations :

$$\left( \frac{\partial \eta_R}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_C} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\partial k_s}{\partial \lambda_C} \right) = \frac{\partial k}{\partial \lambda_C} \cdot \sigma \frac{T^4 - T_E^4}{I^*} \quad (18.104)$$

En posant  $x_i = \lambda T_i$  on obtient :

$$\frac{\partial k_i}{\partial \lambda} = T_i \frac{\partial k_i}{\partial x_i} = \frac{C_1 T_i}{\sigma x_i^5 \cdot \left[ \exp \frac{C_2}{x_i} - 1 \right]} \quad (18.105)$$

D'où :

$$\frac{1}{T_s^4} \left[ \exp \frac{C_2}{\lambda_{C0} T} - 1 \right] = \left[ \sigma \cdot \frac{T^4 - T_E^4}{I^*} \right] \frac{1}{T^4} \left( \exp \frac{C_2}{\lambda_{C0} T_s} - 1 \right) \quad (18.106)$$

On remarque que  $\lambda_{C0}$  ne dépend pas de  $s$  ; la longueur d'onde de coupure optimum sera solution de l'équation précédente (18.106) :  $\lambda_{C0} = f(T, T_E, I^*)$ . Les constantes intervenant dans les relations (18.105) et (18.106) sont :  $C_1 = 11,9088 \cdot 10^7 \text{ W} \cdot \mu\text{m}^4 \cdot \text{m}^{-2}$  et  $C_2 = 1,4388 \cdot 10^4 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ .

À titre d'exemple, la figure 18.21 donne l'évolution de  $T$  en fonction de  $I^*$  à une longueur d'onde de coupure  $\lambda_{C0} = 2,5 \mu\text{m}$  pour  $T_E = 300 \text{ K}$ .

La figure 18.22 montre par ailleurs comment  $\lambda_{C0}$  évolue en fonction de  $I^*$ , pour diverses valeurs de  $T$ .

L'absorption maximale du spectre solaire correspond à  $\lambda_C = 2,5 \mu\text{m}$  ; si  $\lambda_C < 2,5 \mu\text{m}$  une partie de l'énergie incidente ne sera pas collectée, il en résulte une diminution de  $\eta_R$  n'apparaissant pas dans le calcul.

Pour  $\lambda_C > 2,5 \mu\text{m}$ , la valeur de  $\lambda_{C0}$  intervient peu, compte tenu du flux solaire négligeable dans la bande de longueur d'onde correspondante.

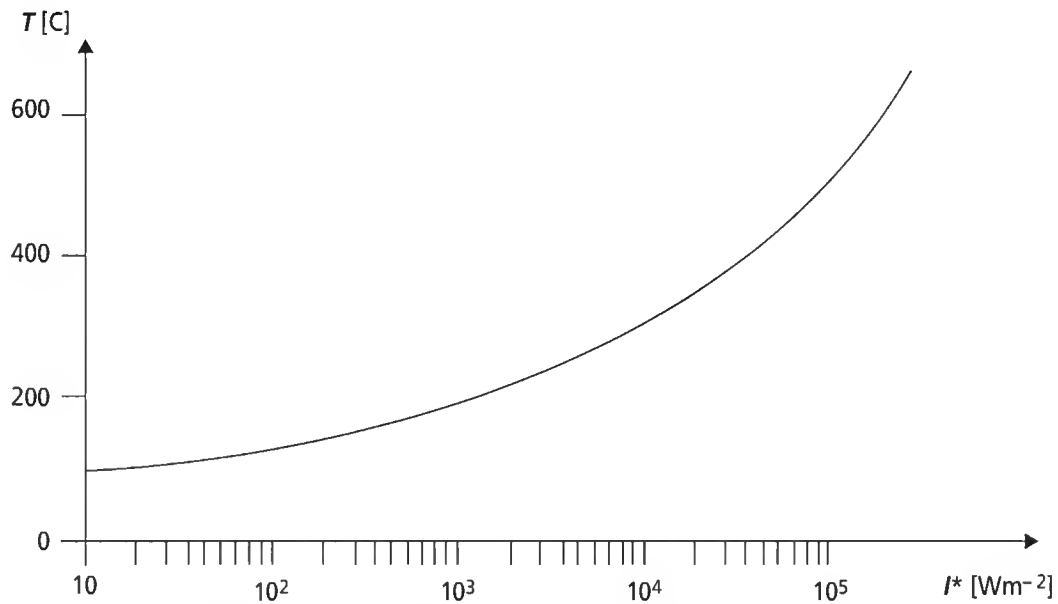


Figure 18.21 Variation de  $T$  en fonction de  $I^*$  pour  $T_E = 300$  K .

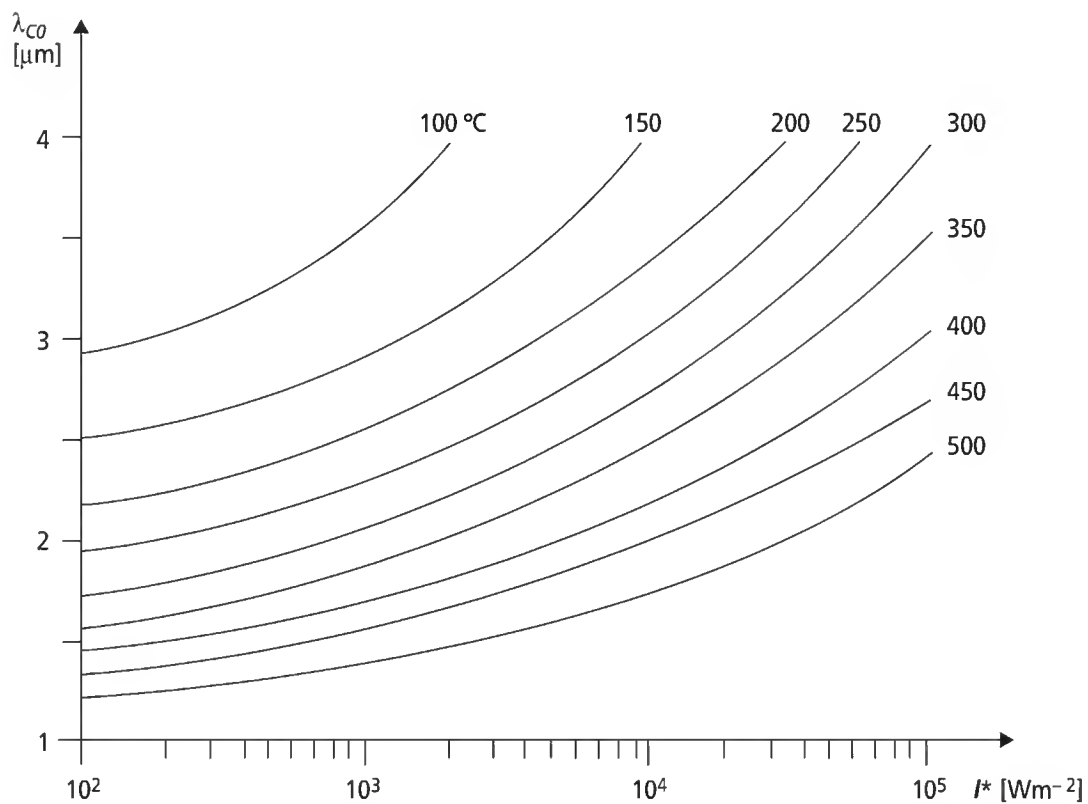


Figure 18.22 Variation de  $\lambda_{C0}$  en fonction de  $I^*$  pour diverses valeurs de  $T$ .

### Optimisation du facteur de sélectivité

L'optimisation du facteur de sélectivité peut être faite de deux façons différentes : connaissant  $\lambda_{C0}$ , le coefficient de performance  $\gamma$  étant fixé, on calcule  $s$  ou inversement.



Calcul approché :

En supposant  $\frac{k \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_E^4)}{I^*} < k_S$  et  $k_S = 1$

$$s(1 - \gamma) = \frac{\sigma(T^4 - T_E^4)}{I^*} \quad (18.107)$$

Dans ces conditions  $\eta_{R \max} \cong k_S A = A$ .

Calcul exact (P. Gallet *et al.*) :

$$s(1 - \gamma) \frac{\eta_{R \max}}{A} + 1 - \frac{\eta_{R \max}}{A} = \frac{\sigma(T^4 - T_E^4)}{I^*} = 1 - \eta'_R \quad (18.108)$$

avec :

$$\eta_{R \max} = A K_1 = A \left( k_S - k \sigma \frac{T^4 - T_E^4}{I^*} \right) \quad (18.109)$$

Comme  $K_1 (= \frac{\eta_{R \max}}{A})$  et  $K_2$  sont fonctions de  $T$ ,  $T_E$  et  $I^*$ , alors  $\eta_R$  l'est aussi :

$$\frac{\eta_R}{A} = f(T, T_E, I^*, s) = \gamma \cdot \eta_{R \max}$$

En fixant  $T$ ,  $T_E$  et  $A$ ,  $\gamma$  étant une fonction de  $s$ , le rendement  $\eta_{R \max}$  est déterminé à partir de  $I^*$ .

Le rendement radiatif est fonction du flux incident ; sa valeur maximale est approchée par le choix de la sélectivité déduite à partir du coefficient de performance  $\gamma$ .

### Conclusion sur la sélectivité

L'étude rapportée ici est relative à la sélectivité chaude, mais il est possible d'envisager aussi une sélectivité froide (applications potentielles pour les vitrages).

Les résultats obtenus pour la sélectivité chaude montrent que les convertisseurs héliothermiques peuvent se répartir en trois grandes classes :

- les convertisseurs basse température  $< 75^\circ\text{C}$  : la surface noire seule ou avec un effet de serre simple ou multiple suffit. Exemple : Capteur plan.
- les convertisseurs moyenne température  $75^\circ\text{C}$ - $150^\circ\text{C}$  ; c'est le domaine de sélectivité des absorbeurs courants.

**Remarque 1 :** la surface absorbante sélective peut être couplée avec un renforcement de la radiation incidente.

**Remarque 2 :** une surface noire avec une faible concentration des rayonnements correspond aussi à une configuration efficace du point de vue énergétique.

- les convertisseurs très haute température  $> 500^\circ\text{C}$ , c'est le domaine des surfaces noires avec une très forte concentration (concentrateur 2D : paraboloïde).

On voit apparaître ici la complémentarité entre sélectivité et concentration ; mais les applications relèvent plus du domaine des centrales électrosolaires dont la maturité est reconnue (voir action de recherche coordonnée européenne ECOSTAR (2003-2005)), mais dont le coût de l'électricité reste 3 à 5 fois celui des filières classiques, avec des puissances nettement moindres 10-100 MW.

Il nous apparaît que l'utilisation privilégiée du solaire thermique qui est une énergie diffuse doit se centrer sur une utilisation diffuse mieux adaptée telle que l'habitat ; cela n'exclut pas quelques applications de niches (pyrolyse, chimie des réfractaires).

## 18.4 AUTRES CONVERSIONS D'ÉNERGIE

### 18.4.1 Quelques exemples des possibilités offertes

L'ensemble des procédés de conversion antérieurement développés dans l'ouvrage passe par une étape calorifique (sauf rares exceptions : hydraulique, éolien) qui fait que la conversion vers l'électricité se poursuit toujours de façon identique quelle que soit la filière amont : caloporteur → production de vapeur → turbine à vapeur → alternateur, pour la majorité des cas.

Nous avons vu toutefois que de nombreuses autres possibilités existent (matrice des énergies (chapitre 3).

Nous rapportons ici quelques conversions d'énergie directes susceptibles d'applications dans le futur, mais non dominantes.

#### a) Les générateurs thermoélectronique ou thermoionique

Ces générateurs électriques utilisent surtout l'émission thermoélectronique satisfaisant à l'équation de Richardson-Dushman (Feidt M.) qui permet de déterminer la densité surfacique de courant limite de saturation de l'espèce émise :

$$J = AT^2 e^{[-e\phi/kT]}$$

$\phi$ , potentiel de surface (dépendant du matériau émetteur).

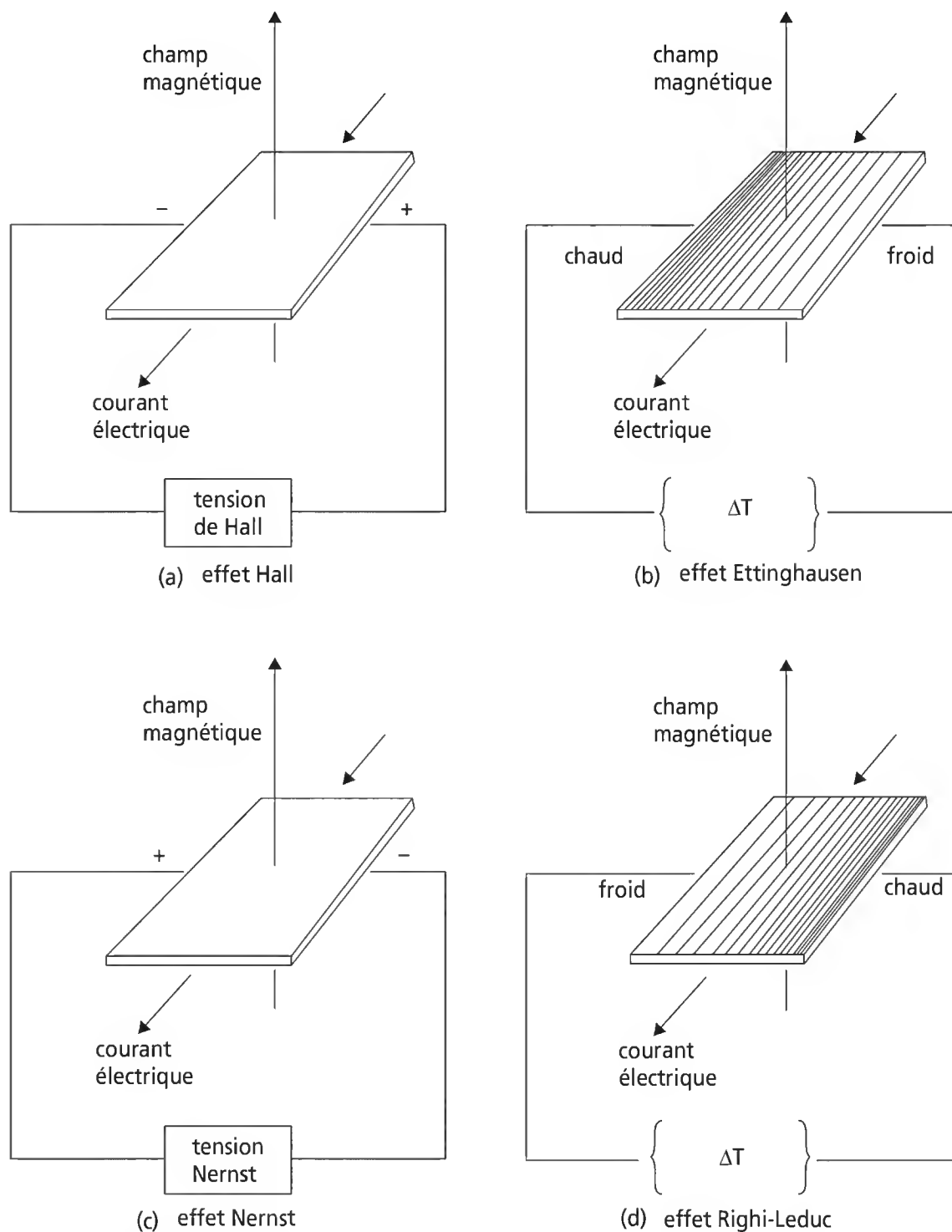
Un modèle thermodynamique du générateur peut être développé ; celui-ci permet de montrer qu'il existe un maximum pour le rendement de conversion thermique-électrique.

#### b) Les effets galvanomagnétiques et thermomagnétiques

Ces effets complètent ce qui a été évoqué avec la magnétohydrodynamique (MHD), en ce sens qu'ils rendent compte des couplages particuliers qui peuvent apparaître en présence de champ magnétique.

Les quatre effets qui apparaissent en présence de champ magnétique sont représentés sur la figure 18.23.

Les deux effets qui résultent d'un courant électrique dans un champ magnétique sont dit galvanomagnétiques.



**Figure 18.23** Effets thermomagnétiques et galvanomagnétiques.

Les deux autres effets qui résultent d'un flux thermique dans un champ magnétique sont dits thermomagnétiques.

Les quatre effets sont reliés et dépendent tous de la force de Lorentz qui traduit le mouvement d'une charge électrique  $q$  dans un champ magnétique :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

### ► L'effet Hall

C'est un effet haute impédance qui permet l'apparition d'une tension de Hall aux bornes du conducteur sous l'effet du déplacement des électrons de conduction ; cette différence de potentiel  $\Delta V_H$ , apparaît dans la direction perpendiculaire à  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$ .

Un générateur de Hall est possible en effet basse impédance.

**Remarque 1 :** le même raisonnement au signe près peut être conduit dans un semi-conducteur pour un courant par les trous (conducteur de type p et non n).

**Remarque 2 :** l'effet Hall peut être gênant dans les générateurs MHD.

### ► L'effet Ettinghausen

L'effet Ettinghausen se traduit par une différence de température vu que la vitesse des porteurs de charge influe sur la force de Lorentz : une température plus élevée correspond à une vitesse plus élevée. Une différence de température apparaît aux bornes de la plaque.

**Remarque :** possibilité de réfrigérateur Ettinghausen.

### ► L'effet Nernst

Cet effet apparaît dans un matériau du fait que la conduction de la chaleur se réalise en grande partie par le mouvement des électrons ; un gradient de potentiel apparaît, toujours conformément à la loi de Lorentz,  $\Delta V_N$  ; cet effet haute impédance pourrait être complété par un effet basse impédance : générateur de Nernst.

### ► L'effet Righi-Leduc

L'effet Righi-Leduc est le pendant de l'effet Ettinghausen : en présence d'un flux thermique et d'un champ magnétique croisé, il apparaît une différence de température dans la direction perpendiculaire à  $\vec{B}$  et au flux thermique associé aux charges électriques.

## c) Les effets thermoélectriques

### ► Les quatre effets thermoélectriques

Les effets thermoélectriques, comme les effets précédents se prêtent bien à une description en utilisant la thermodynamique des phénomènes irréversibles linéarisée (TPIL).

La description toutefois en est un peu simplifiée, vu l'absence de champ magnétique.

On rappelle ici (voir chapitre 15) qu'il existe quatre effets thermoélectriques :

- l'effet Seebeck qui est un effet de haute impédance ;
- l'effet Peltier qui est un effet basse impédance susceptible d'utilisation dans le domaine du froid (voir 15.4.2.b) ;
- l'effet Thomson qui rend compte du couplage entre le courant électrique et le gradient de température le long du conducteur ;
- l'effet Joule, bien connu, de dissipation électrique.

► Les conductivités électrique et thermique

Soit un système thermoélectrique 1D en régime dynamique stationnaire. Les deux flux électrique et de chaleur selon la direction s'écrivent :

$$-J_N = L_{11} \frac{1}{T} \nabla \mu + L_{12} \nabla \frac{1}{T} \quad (18.110)$$

$$J_q = L_{12} \frac{1}{T} \nabla \mu + L_{22} \nabla \frac{1}{T} \quad (18.111)$$

avec  $L_{12} = L_{21}$  (condition de symétrie d'Onsager).

Le courant des charges étant un courant électronique, de potentiel chimique  $\mu$  tel que :  $\mu = \mu_c + \mu_e$ .

$\mu_c$ ,  $\mu_e$  respectivement partie chimique, électrique du potentiel avec  $\mu_e = eV$ ,  $V$  potentiel électrique.

En conséquence, le gradient de potentiel électrochimique par unité de charge vaut :

$$\frac{\nabla \mu}{e} = \frac{\nabla \mu_e}{e} + \frac{\nabla \mu_c}{e}$$

*Conductivité électrique  $\sigma$*

La définition de la conductivité électrique  $\sigma$  pour un système isotherme est le rapport de la densité de courant  $-eJ_N$ , au gradient de potentiel associé  $\frac{\nabla \mu}{e}$  ; il vient à partir de (18.110) :

$$\sigma = \frac{e^2 L_{11}}{T}$$

*Conductivité thermique  $\lambda$*

De la même façon la conductivité thermique se définit par le rapport de la densité surfacique de flux de chaleur, par le gradient de température associé, à courant électrique nul ; la combinaison de (18.110) et (18.111) conduit alors à :

$$\lambda = \frac{-J_q}{\nabla T} = \frac{L_{11} L_{22} - L_{12}^2}{T^2 L_{11}}$$

► L'effet Seebeck et le coefficient thermoélectrique

Cet effet haute impédance correspond à l'apparition d'une force électromotrice aux bornes d'un thermocouple en l'absence de courant ( $J_N = 0$ , selon la relation 18.110), soit :

$$\nabla \mu = \frac{L_{12}}{T L_{11}} \nabla T \quad (18.112)$$

Par intégration de (18.112) le long du circuit, il vient :

$$\Delta V = \frac{\Delta \mu}{e} = \int_{T_1}^{T_2} \left( \frac{L_{12}^A}{eTL_{11}^A} - \frac{L_{12}^B}{eTL_{11}^B} \right) dT$$

En choisissant comme sens de référence de A vers B à la jonction chaude  $T_2$ , il vient pour le coefficient thermoélectrique du thermocouple :

$$\mathcal{E}_{AB} = \mathcal{E}_B - \mathcal{E}_A$$

avec :  $\mathcal{E}_{A(B)} = -\frac{L_{12}^{A(B)}}{eTL_{11}^{A(B)}}$ , coefficient thermoélectrique du matériau A (B).

L'élimination des coefficients cinétiques  $L_{ij}$ , en fonction de  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  conduit aux équations cinétiques linéaires :

$$-J_N = \frac{\sigma}{e^2} \nabla \mu - \frac{T^2 \sigma \varepsilon}{e} \nabla \frac{1}{T} \quad (18.113)$$

$$J_q = \frac{T \sigma \varepsilon}{e} \nabla \mu + (T^3 \sigma \varepsilon^2 + T^2 \lambda) \nabla \frac{1}{T} \quad (18.114)$$

Par combinaison des deux relations précédentes, on trouve  $J_q$ , fonction de  $J_N$  :

$$J_q = T \varepsilon e J_N + T^2 \lambda \nabla \frac{1}{T} \quad (18.115)$$

Sachant que  $J_s = J_q / T$ , on voit que le premier terme traduit un transport d'entropie par les électrons ( $\varepsilon e$ ), le deuxième étant l'entropie de conduction classique indépendante du courant électrique.

#### ► L'effet Peltier

Cet effet exploité dans les thermoéléments (paragraphe 15.4.2.b) correspond au flux de chaleur à travers une jonction AB isotherme sous l'effet d'un courant électrique ; la condition d'isothermie dans (18.115) conduit à :

$$J_q = T \varepsilon e J_N \quad (18.116)$$

À la traversée de la jonction, il y correspond une discontinuité en  $J_q$  :

$$J_q^B - J_q^A = T (\varepsilon_B - \varepsilon_A) e J_N \quad (18.117)$$

**Remarque :** cette discontinuité est la même que celle observée sur  $J_N$ .

On en déduit le coefficient de Peltier  $\pi_{AB}$  :

$$\pi_{AB} = \frac{J_q^B - J_q^A}{e J_N} = T (\varepsilon_B - \varepsilon_A)$$

**Remarque 1 :** le coefficient de Peltier correspond au flux de chaleur à apporter à la jonction, par unité de courant passant de A vers B ; l'inversion du sens du courant inverse l'effet thermique.

**Remarque 2 :** l'étude du coefficient Thomson  $\tau$  pourrait se faire en prolongement ; sa définition correspond à :  $\tau = T \cdot \frac{d\varepsilon}{dT}$ . Il en résulte pour un couple

$$AB : \frac{d\pi_{AB}}{dT} + \tau_A - \tau_B = \varepsilon_A - \varepsilon_B.$$

Le lecteur intéressé par le sujet pourra se référer à un article de synthèse récent (Riffat S.B., Ma X.)

### 18.4.2 La conversion photovoltaïque

#### a) Les cellules photovoltaïques

##### ► Le principe de la conversion photovoltaïque

Contrairement aux capteurs solaires thermiques, les cellules photovoltaïques permettent la conversion directe d'énergie électromagnétique en énergie électrique.

L'énergie radiative induit dans la photopile une force électromotrice, couplée à un flux de charges électriques en circuit fermé (figure 18.24).

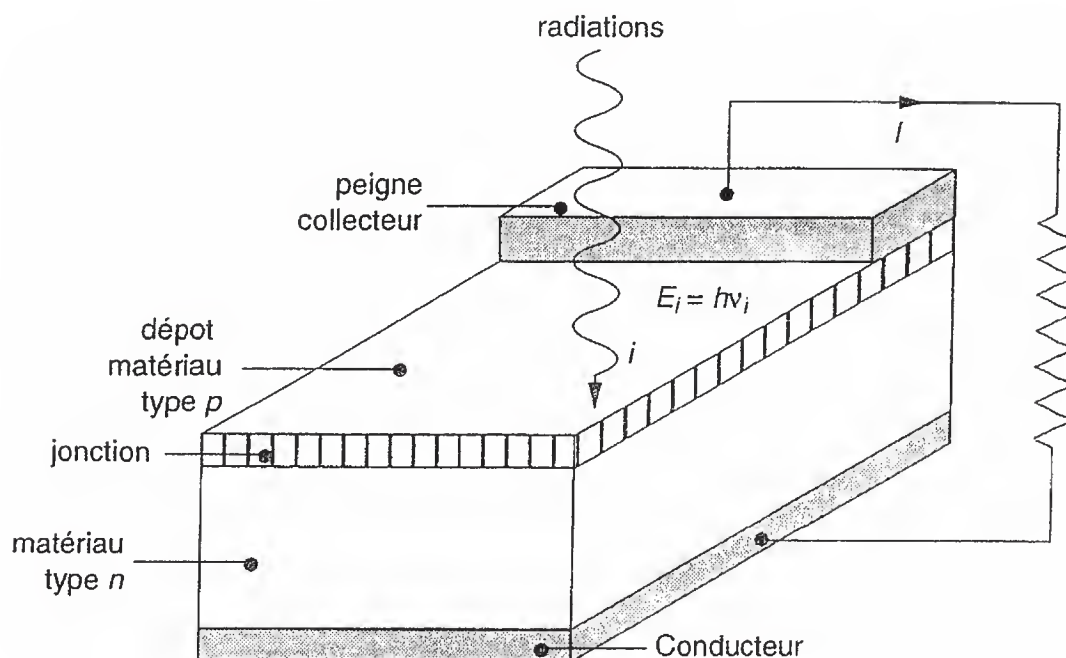


Figure 18.24 Principe d'une cellule photovoltaïque.

En régime dynamique stationnaire, une cellule photovoltaïque n'est pas soumise aux limitations associées aux machines thermomécaniques, soit dans le cas idéal, le cycle de Carnot.



Toutefois, des limitations différentes existent ; les principales limitations sont ainsi les suivantes :

- pertes par interaction rayonnement-matière : réflexion d'énergie, d'où la mise en œuvre de revêtements anti-réfléchissants ;
- pertes par résistance électrique interne ; cette perte nécessite une adaptation de la charge qu'il est possible d'optimiser (Kothari L.S. *et al.*) ;
- pertes dues à la distribution spectrale ; on pourra ici se référer aux travaux de A. Badescu ;
- pertes dues aux défauts de charge ;
- influence de la température : cette influence défavorable peut être combattue par refroidissement (des systèmes de cogénération chaude sont étudiés).

#### ► Optimisation du rendement de conversion

##### *Optimisation en lumière diffuse d*

(Byrd J.W. et al) ont montré qu'une cellule solaire d'aire réceptrice  $A_R$ , placée dans une ambiance  $T_o$ , et recevant une densité surfacique d'énergie radiative  $\overset{o}{E}_R$  peut fournir une puissance utile maximale  $\overset{o}{W}$  de :

$$\overset{o}{W} = \overset{o}{E}_R A_R \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{T_o}{T_R} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{T_o}{T_R} \right)^4 \right] \quad (18.118)$$

Le rendement de conversion s'en déduit aisément par :

$$\eta_d = \frac{\overset{o}{W}}{\overset{o}{E}_R A_R}$$

$T_R$ , correspondant à la lumière diffuse, diffère a priori de la température du corps noir équivalent au Soleil.

##### *Optimisation de la lumière directe D*

En supposant qu'il n'y a pas d'atmosphère perturbatrice (cas des projets en haute atmosphère), et que le dispositif photovoltaïque de captation C endoréversible fonctionne en régime dynamique stationnaire, le modèle de fonctionnement est illustré sur la figure 18.25.

Le dispositif reçoit la densité surfacique d'énergie directe  $\overset{o}{E}_s$  du Soleil, et réémet des radiations à la température  $T_E$  avec une densité surfacique  $\overset{o}{E}_E$ . Le dispositif échange par ailleurs de la chaleur  $\overset{o}{q}$  avec l'environnement à  $T_o$ .

Dans les conditions précédentes, quel que soit l'intervalle de temps, les bilans énergétique et entropique du dispositif s'écrivent :



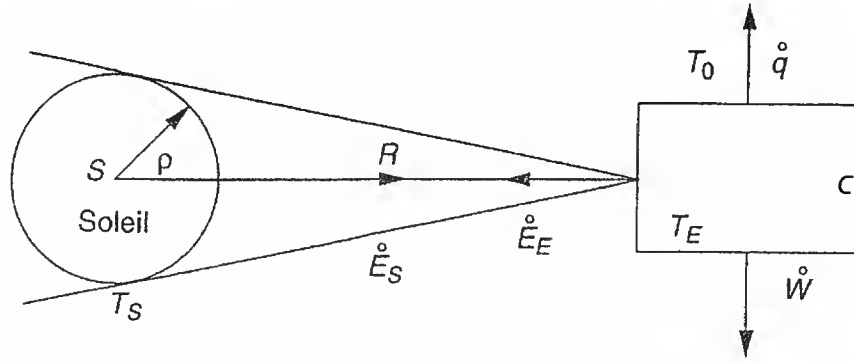


Figure 18.25 Schéma de fonctionnement d'un dispositif photovoltaïque sous insolation directe D.

$$\overset{o}{E}_s A_R - \overset{o}{E}_E A_E - \overset{o}{q} - \overset{o}{W} = 0 \quad (18.119)$$

$A_E$ , surface émettrice du dispositif.

$$\frac{4}{3} \frac{\overset{o}{E}_s A_R}{T_s} - \frac{4}{3} \frac{\overset{o}{E}_E A_E}{T_E} - \frac{\overset{o}{q}}{T_0} = 0 \quad (18.120)$$

$\overset{o}{E}_s$  et  $\overset{o}{E}_E$  sont fournies respectivement par les relations :

$$\overset{o}{E}_s = \sigma T_s^4 \frac{\omega}{\pi} \left( 1 - \frac{\omega}{4\pi} \right) \quad (18.121)$$

$$\overset{o}{E}_E = \sigma T_E^4 \quad (18.122)$$

Ces relations sont obtenues par intégration des luminances énergétiques correspondantes sachant que  $\omega$  représente l'angle solide sous lequel on voit le disque solaire depuis C.

Si on suppose par ailleurs que  $A_R = A_E = A$ , la combinaison des relations (18.119), (18.120), (18.121), (18.122) conduit à :

$$\begin{aligned} \overset{o}{W} &= \overset{o}{E}_s A \left[ 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{T_0}{T_s} + \frac{4}{3} \frac{T_0 T_E^3}{T_s^4} \cdot \frac{1}{f(\omega)} - \left( \frac{T_E}{T_s} \right)^4 \cdot \frac{1}{f(\omega)} \right] \\ \overset{o}{q} &= \frac{4}{3} \sigma T_0 A [f(\omega) T_s^3 - T_E^3] \end{aligned}$$

avec :

$$f(\omega) = \frac{\omega}{\pi} \left( 1 - \frac{\omega}{4\pi} \right)$$

Le rendement de conversion devient dans ce cas une fonction de  $T_0$  et  $T_E$  paramétrée en  $T_s$  et  $f(\omega)$  :

$$\eta_D(T_E, T_0) = 1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{T_0}{T_s} + \frac{4}{3} \frac{T_0 T_E^3}{T_s^4} \cdot \frac{1}{f(\omega)} - \left( \frac{T_E}{T_s} \right)^4 \cdot \frac{1}{f(\omega)} \quad (18.123)$$

La comparaison de (18.118) et (18.123) montre que  $\eta_D > \eta_d$  pour certaines valeurs de  $T_0$  et  $T_E$  :

$$T_E < f(\omega)^{1/3} \cdot T_s \text{ et } T_0 < T_E$$

En conclusion partielle, si on trace la fonction  $\eta_D(T_E, T_0)$  fournie par (18.123), on s'aperçoit qu'il existe des zones pour lesquelles  $\eta_D > 1$ . Cette situation se produit lorsqu'il y a apport d'énergie thermique au dispositif  $\left( \overset{\circ}{q} < 0 \right)$ .

Le fait de prendre  $T_E = T_0$  ne conduit pas toujours au maximum du rendement de conversion.

L'importance de l'environnement sur le rendement de conversion apparaît par l'intermédiaire du transfert  $\overset{\circ}{q}$  mais il y aurait lieu aussi d'introduire des corrections dues à la présence de l'atmosphère. Cela ne sera pas développé ici.

### b) Les applications de la conversion photovoltaïque

#### ➤ Du spatial à l'habitat

Le principe des cellules photovoltaïques est utilisé depuis l'origine en métrologie (photométrie : luxmètre, pyranomètre).

Les applications pour la production de puissance électrique sont plus récentes et se sont développées avec l'avènement du spatial, vu leur simplicité de mise en œuvre et leur fiabilité ; les cellules élémentaires sont le plus souvent couplées en série et en parallèle selon les besoins.

L'Europe dont l'Allemagne développe des programmes qui visaient à produire 12 % d'énergie brute (21 % d'énergie électrique) en photovoltaïque en 2010 ; ces chiffres semblent optimistes pour plusieurs raisons (le retard de développement actuel et les coûts).

Néanmoins, il est clair que pour un foyer, les besoins électriques sont estimés à 3 278 kWh/an (soit 2 kW de puissance installée, 20 m<sup>2</sup> de capteur) ; cela permet d'envisager une fourniture à 100 % pour Séville, 67 % pour Lyon (2 191 kWh), 57 % pour Berlin (1 863 kWh). Il reste toutefois à traiter les problèmes de l'adaptation électrique et du stockage.

#### ➤ L'évolution des savoir-faire

Actuellement, l'industrie photovoltaïque est centrée sur le silicium monocristallin, qui génère une forte dépense énergétique à la mise en œuvre. La filière permet des

rendements de 15 % voire 18 % avec des coûts de production industrielle de 2 euros/watt en 2006 (1 euro/watt en 2010) ; des productions en laboratoire permettent des rendements de 24 %, mais avec un coût de 5 euros/watt.

D'autres pistes hors silicium sont donc explorées, essentiellement trois :

- des cellules en couches minces : semiconducteur au diséléniure de cuivre et indium ; les rendements espérés sont de 19 % pour un coût de 0,5-1 euro/watt ;
- des cellules à nanocristallites qui s'inspirent de la photosynthèse et utilise  $TiO_2$  comme semiconducteur : elles possèdent deux fonctions distinctes, absorption, puis séparation des charges. Le rendement escompté est de 10 % pour un coût de 0,6 euro/watt ;
- des cellules à électrodes en or et matériaux organiques ; l'or fait office de semiconducteur ; le rendement serait de 1 % pour un coût de 1 euro/watt.

Il semble donc que l'utilisation du photovoltaïque risque de rester marginale par rapport aux besoins sur une longue période, sauf volonté forte de développement.

Le site recommandé sur les énergies renouvelables : [www.energies-renouvelables.org](http://www.energies-renouvelables.org).

### 18.4.3 La conversion chimio-électrique

La conversion chimio-électrique peut prendre deux formes principales : piles et accumulateurs (batteries) ; piles à combustible.

La première forme est discontinue ; elle fait apparaître une phase de déstockage, avec éventuelle régénération (voir paragraphe 18.5). La deuxième forme se prête à une utilisation de type continu.

#### a) Description générale d'une pile à combustible

##### ➤ Court historique

La première cellule mettant en jeu hydrogène et oxygène est l'œuvre de W.R. Grove en 1839. Il faudra ensuite attendre les années 1950 pour voir un véritable intérêt technique pour les piles (en particulier avec la conquête spatiale). Puis l'intérêt est retombé jusqu'aux années 2000.

##### ➤ Principe

Une pile à combustible (figure 18.26) est une machine qui transforme *directement* l'énergie chimique d'un combustible en l'énergie électrique. Elle diffère donc des machines thermomécaniques où la même conversion suppose deux stades intermédiaires : l'énergie thermique et l'énergie mécanique.

Toutes les piles élémentaires comportent un *électrolyte* qui assure la continuité électrique du circuit par transfert des ions, et deux *électrodes* où interviennent les réactions électrochimiques :

- d'oxydation du combustible à l'anode, avec libération d'électrons ; l'anode est donc l'électrode négative ;
- de réduction du comburant à la cathode avec consommation d'électrons.

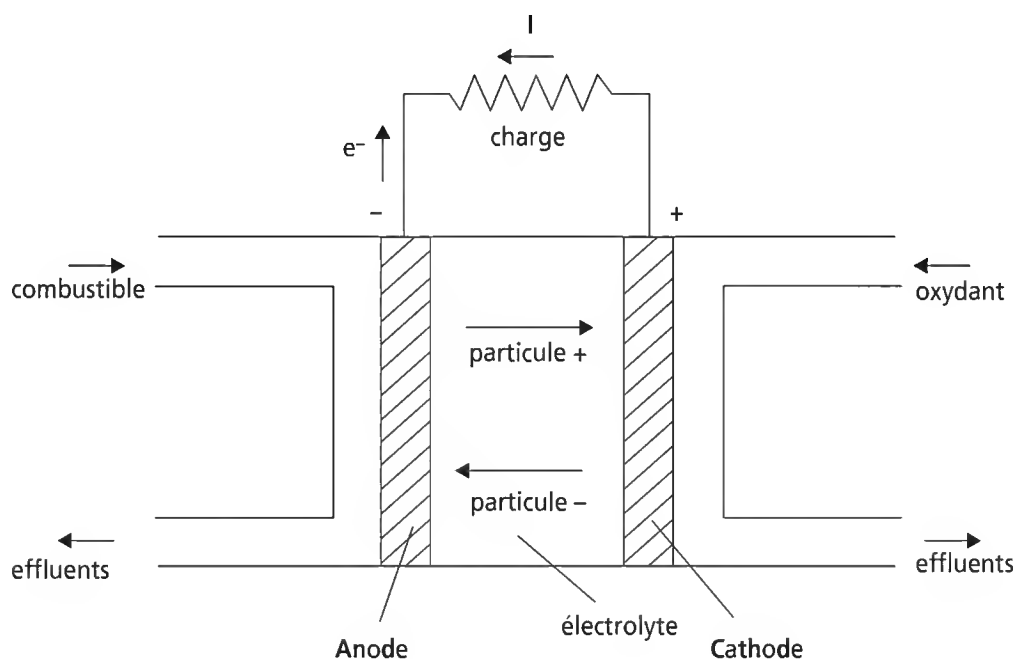


Figure 18.26.

Ces réactions ne modifient pas la structure des électrodes qui ne servent que de site réactionnel pour le combustible et le comburant *stockés à l'extérieur*. D'où la possibilité d'un fonctionnement *continu*, qui différencie ces piles des accumulateurs et des piles classiques.

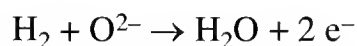
Une pile à combustible ne comporte pas de pièce en mouvement. Le fonctionnement d'une pile n'exige pas la présence de deux sources de chaleur à températures différentes, ce qui aura une incidence sur l'expression du rendement. Toutefois, cela n'entraîne pas une liberté complète à l'égard de la thermodynamique et nous allons voir en particulier que l'entropie intervient dans l'expression de l'énergie utilisable de la pile.

### Description de la pile $H_2 - O_2$

Les configurations les plus courantes de piles sont les piles PEMFC (*Proton Exchange Membrane Fuel Cell*), pile à combustible à membrane, puis les piles SOFC (*Solid Oxide Full Cell*), pile à combustible à oxyde solide.

Ces piles fonctionnent selon le schéma général de la pile à hydrogène – oxygène. On a :

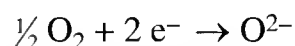
- une anode, où a lieu l'oxydation du combustible, l'hydrogène (le réducteur), avec émission d'électrons :



- un électrolyte assurant la continuité électrique du circuit : c'est le conducteur ionique.

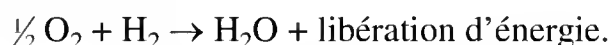
**Remarque :** la conduction est à ions positifs dans ce schéma.

- une cathode, où a lieu la réduction du comburant, l'oxygène (l'oxydant), avec consommation d'électrons :



Les électrons ne sont pas transférés directement des molécules d'hydrogène aux molécules d'oxygène, permettant à une partie de l'énergie libérée d'être transformée en énergie électrique.

La réaction globale est donc :



Il ressort clairement du schéma que la pile à combustible se présente sous forme d'un élément de système ouvert permettant une alimentation en continue en produits (comburant et combustible). Cette différence est essentielle par rapport à la majorité des générateurs électrochimiques : machine à flux et non machine à stock.

### *Catalogue succinct des principales filières de piles à combustible*

Selon les auteurs, il ressort 4, 5 ou 6 groupes de piles à combustible (Stevens T.).

Le tableau 18.3 reprend ici 6 principaux groupes. Le lecteur intéressé se reportera aux références pour les détails. On retiendra trois grands volets d'application : cogénération chaleur-force, transports terrestre et maritime, applications portables.

On retiendra l'importance du potentiel thermique de cogénération (SOFC ; MCFC ; PAFC).

**TABLEAU 18.3** DIFFÉRENTES FILIERES DE PILES A COMBUSTIBLE.

Type de pile (Sigle)	Electrolyte	Température de fonctionnement	Applications
AFC Pile à combustible alcaline	KOH	80 °C	Transports terrestres
DMFC Pile à combustible directe au méthanol	Polymère perméable aux protons	60 – 90 °C	Transports terrestres Applications portables
MCFC Pile à combustible à carbonate fondu	Carbonates	650 °C	Cogénération
PAFC Pile à combustible à acide phosphorique	H <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>	200 °C	Cogénération
PEMFC Pile à combustible à membrane échangeuse	Polymère perméable aux protons	80 °C	Transports terrestres Applications portables
SOFC Pile à combustible à oxyde solide	Oxydes solides	1000 °C	Cogénération marine

Siemens en Europe étudie particulièrement les piles SOFC. Trois types de configurations émergent des études (tubulaire, plane, monolithique).

L'ordre de grandeur du rendement électrique pour une configuration utilisant du gaz naturel et du reformage interne est légèrement supérieur à 0,50.

Ansaldo en Italie s'intéresse plus particulièrement à la filière MCFC.

La filière PEMFC est la filière la plus étudiée de par le monde, avec en point de mire l'application aux transports.

On notera plus particulièrement qu'à notre connaissance il n'existe pas à ce jour de membrane basique, que la gestion de l'eau dans la pile est cruciale et que les pertes de réactif peuvent être non négligeable.

Sans les auxiliaires, la puissance massique (respectivement volumique) est de l'ordre de 0,85 kW/kg, 1 kW/dm<sup>3</sup> (les données de la littérature nécessitant de préciser le régime de décharge toutefois).

### b) Étude thermodynamique de la pile à combustible

#### ► Situation du sujet

D'assez nombreux documents rendent compte de l'approche des piles à combustible, selon la thermodynamique de l'équilibre. Généralement les traités de thermodynamique comportent en effet un chapitre sur la théorie des piles, en relation avec l'électrolyse (opération réciproque de la pile hydroélectrique).

Les documents dédiés à la conversion de l'énergie sont souvent un peu plus détaillés. Ils font référence alors à l'électrochimie d'un point de vue plus général.

Naturellement l'énergie libre apparaît dans les développements, ainsi que la forte dépendance des phénomènes à la température.

#### ► Modèle thermostatique de pile à combustible (PACo)

Dans ce paragraphe est développé un modèle global thermostatique de PACo, conformément à la figure 18.26. La pile est supposée fonctionner en régime dynamique stationnaire.

Deux notions fondamentales vont être examinées successivement : la force électromotrice de la pile à combustible et le rendement de la pile à combustible.

#### *Les bases thermodynamiques*

Le premier principe de la thermodynamique est un principe de conservation. Il énonce qu'en régime dynamique stationnaire la somme des énergies entrantes est égale à celle des énergies sortantes (convention de l'ingénieur).

En entrée la pile reçoit, à un instant donné, un débit massique de comburant et de combustible,  $\dot{m}$ , supposé fournir dans les conditions  $P_e$ , pression d'entrée,  $T$ , température de fonctionnement (identique à l'ambiance), auxquelles correspond un volume spécifique massique  $v_e$ .

Il sort de la pile un flux d'énergie utile  $\dot{W}$  (puissance électrique). Les produits de combustion ayant le même débit  $\dot{m}$ , sous la pression  $P_s$ , pression de sortie, à  $T$  donnée, pour un volume spécifique massique  $v_s$ .



Dans le même temps la pile échange avec l'extérieur le flux de chaleur  $\dot{Q}$  pour rester à  $T$  donnée.

En entrée, la pile reçoit l'énergie interne (chimique)  $u_e$ , par unité de masse cyclée. Pour que les réactifs soient fournis à la pile, l'énergie mécanique spécifique massique  $P_e \cdot v_e$  est nécessaire. Soit  $u_e + P_e \cdot v_e = h_e$ , l'enthalpie massique des réactifs en entrée.

Identiquement, pour les produits de réaction, la pile restitue en sortie  $h_s = u_s + P_s \cdot v_s$ . Le bilan d'énergie en résulte :

$$h_e - h_s = w + q \quad (18.124)$$

avec :

$w = \frac{\dot{W}}{\dot{m}}$ , énergie électrique spécifique massique

$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ , énergie thermique spécifique massique.

**Remarque :** la référence massique est le débit massique des réactifs cyclés. La différence  $h_e - h_s$  ne dépend que de la fonction d'état thermodynamique enthalpie,  $h$ , des réactifs et des produits traversant la pile, et pas du mode de fonctionnement de celle-ci, hormis le fonctionnement dynamique stationnaire.

Le second principe de la thermodynamique : en ajoutant l'hypothèse d'un fonctionnement réversible, l'équilibre électrique de la pile est alors associé à une création d'entropie interne nulle de toute transformation élémentaire correspondante,  $\delta S_i = 0$ .

**Remarque :** les irréversibilités internes sont nulles, lorsque la pile ne débite pas de courant : il n'y a pas de surtension dans la pile (voir ci-après).

La définition de l'entropie conduit alors à :

$$\delta S_e = dS = \frac{\delta Q}{T}$$

La pile n'échangeant de la chaleur qu'avec l'atmosphère, il vient :

$$q = T(s_e - s_s) \quad (18.125)$$

La combinaison des équations (18.124) et (18.125) conduit à :

$$w = (h_e - T s_e) + (h_s - T s_s) = g_e - g_s \quad (18.126)$$

avec  $g$ , enthalpie libre massique appliquée aux réactifs en entrée ( $g_e$ ), aux produits de réaction en sortie ( $g_s$ ) de la pile.

La tension idéale réversible  $E_r$  aux bornes de la pile est déduite de (18.126) en référence molaire sous la forme :

$$E_r = \frac{\Delta G}{n\mathfrak{S}}$$

$n$ , nombre d'électrons échangés par mole ;  $\mathfrak{S} = 96\,500$  coulombs.

### Exemples :

– tension idéale d'une pile  $H_2 - O_2$

La réaction s'écrit :  $H_2 + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow H_2O_{\text{liquide}}$

Dans les conditions standards (298 K, 1 atmosphère) :  $\Delta G^\circ = -56,69 \text{ kcal/mole}$  avec deux électrons échangés par mole, il vient :  $E_r = -1,23 \text{ V}$

– tension idéale d'une pile  $C - O_2$

La réaction s'écrit :  $C + O_2 \rightarrow CO_{2\text{gaz}}$  ;  $\Delta G^\circ = -94,26 \text{ kcal/mole}$ , avec quatre électrons échangés par mole, il vient :

$$E_r = -1,02 \text{ V}$$

– tension idéale d'une pile  $CH_4 - O_2$

La réaction s'écrit :  $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O_{\text{liquide}}$

$$\Delta G^\circ = -94,26 - 2 * 56,69 + 12,14 = -195,50 \text{ kcal/mole},$$

vu que  $\Delta G^\circ(CH_4) = -12,14 \text{ kcal/mole}$  avec quatre électrons échangés par mole, il vient :

$$E_r = -1,06 \text{ V}.$$

**Remarque :** les valeurs idéales changent avec la température et l'état des produits de réaction (liquide, gaz) ; les dissipations électriques et pertes de transfert ont été ignorées.

$\eta_a, \eta_c$  représentent les chutes de tensions (surtensions) à l'anode et la cathode.

Dans la majorité des réactions interfaciales relatives aux piles à combustible, l'étape de chimisorption contrôle la vitesse de réaction globale, donc détermine la polarisation de la pile.

On est en présence d'une catalyse (hétérogène à 3 corps : réactif, électrolyte, catalyseur). Les catalyseurs sont :

- électrodes  $O_2$  : Pt, Ag, Ni, Co recouvert d'oxyde, C, alliage (Au – Pt – Pd) ;
- électrodes  $H_2$  : Pt, Pd, Ni de Raney alliage (Pt – Pd).

L'effet Joule interne correspond à la résistance  $R_i$  ; il est lié à l'intensité  $I$  dans la pile.

Le rendement maximum théorique  $\eta_{MAX}$  d'une pile s'exprime sous la forme :

$$\eta_{MAX} = \frac{\Delta g}{\Delta h} = 1 - T \frac{\Delta s}{\Delta h}$$



Avant d'examiner les principales causes de diminution du rendement de conversion d'une pile à combustible, on va considérer pour diverses réactions les rendements maximum théoriques et leurs évolutions avec la température : l'expression du rendement maximum précédente montre en effet la dépendance explicite à  $T$ , mais aussi implicite par  $\Delta s$  et  $\Delta h$ .

Le tableau 18.4 montre pour les réactions et les applications les plus courantes l'influence de la température sur le rendement maximum théorique.

TABLEAU 18.4 RENDEMENT MAXIMUM DE PACO POUR DIVERSES RÉACTIONS GLOBALES ET TEMPÉRATURE

Réaction	Température [K]	Rendement maximum
$\text{H}_2 + 1/2 \text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O}$	298	0,94
	800	0,83
	1 500	0,66
$\text{C} + 1/2 \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}$	298	1,24
	800	1,64
	1 500	2,14
$\text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2$	298	1,00
	1 500	1,00
$\text{CH}_4 + 2 \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$	298	1,00
	1 500	1,00

Il ressort du tableau que dans le cas général des réactions chimiques ( $\Delta s > 0$ ), l'accroissement de température de fonctionnement de la pile exerce une action défavorable sur son rendement.

Mais pour certaines réactions où  $\Delta s < 0$ , le rendement est alors égal à l'unité ( $\Delta s = 0$ ) ou même supérieur à l'unité. Dans ce dernier cas, la pile reçoit de la chaleur de l'ambiance, qu'elle transforme en énergie électrique.

Le rendement maximum,  $\eta_{\max}$ , apparaît relié à la variation du volume des constituants de la réaction, au cours de la traversée de la pile (variation du nombre de moles gazeuses) : si ce nombre croît au cours de la réaction,  $\eta_{\max} > 1$ .

Le rendement énergétique de la pile diffère du rendement maximum (réversible) précédent pour deux raisons essentielles. D'abord, les baisses de rendement dues aux surtensions.

Connaissant  $E$  en fonction de  $I$ , il vient :

$$\eta_V = 1 - \frac{\eta_a + \eta_c + R_i I}{E_{\max}}$$

Rendement courant. L'expression ci-dessus du rendement tension a supposé une réaction stoechiométrique complète, sans pertes de charges électriques.

En effet le courant électrique utile diffère du courant théorique maximum : le courant pratique est plus petit que le courant théorique, conduisant à un rendement courant (ou faradique)  $\eta_I < 1$ .

Les principales raisons pour cela peuvent être les suivantes : un excès de combustible par rapport au comburant, des réactions électrochimiques parasites, des réactions chimiques directes entre les espèces réactives.

Les membranes ne sont pas étanches aux réactifs : la perméation gazeuse induit une perte de réactif diminuant  $\eta_I$ .

Dans les piles PEMFC, la perméation gazeuse est maximale à courant nul, lorsque le différentiel de pression de part et d'autre de la membrane est maximum (environ 1 bar). L'ordre de grandeur du rendement faradique associé est  $\eta_I = 0,98$ .

Les divers rendements introduits ci-dessus ne sont pas quelconques entre eux. Il est facile de montrer qu'ils sont liés par le rendement de conversion électrique, tel que :

$$\eta_{elec} = \eta_I \cdot \eta_V \cdot \eta_{max}$$

Toutefois, il y a lieu de remarquer que le rendement de conversion électrique introduit ne caractérise que ce qu'il est convenu d'appeler le cœur de pile. Or pour fonctionner, une pile à combustible doit comporter plusieurs auxiliaires assurant les fonctions suivantes :

- stockage et alimentation en combustible ;
- stockage et alimentation en comburant ;
- distribution – traitement – stockage de l'électricité ;
- gestion de la chaleur (et usage) ;
- évacuation d'effluents ;
- contrôle – commande.

Il s'introduit alors une perte liée à l'ensemble des auxiliaires et leur consommation d'énergie (pompe, compresseur, onduleur, batterie, électronique de contrôle – commande) (figure 18.27).

On appelle  $\eta_{aux}$  le rendement des auxiliaires, tel que :

$$\eta_{aux} = 1 - \frac{\dot{W}_{aux}}{\dot{W}_{elec}}$$

avec  $\dot{W}_{aux}$ , puissance consommée par les auxiliaires.

La puissance utile devient alors :

$$\dot{W}_u = \dot{W}_{elec} - \dot{W}_{aux}$$

et le rendement énergétique du système sera donné par :

$$\eta_S = \eta_{elec} \cdot \eta_{aux}$$

**Remarque :** le rendement énergétique du système est plus faible que le rendement électrique. Si de plus, la pile fonctionne de façon transitoire, le rendement s'en trouve encore affecté ; un ordre de grandeur moyen rencontré dans

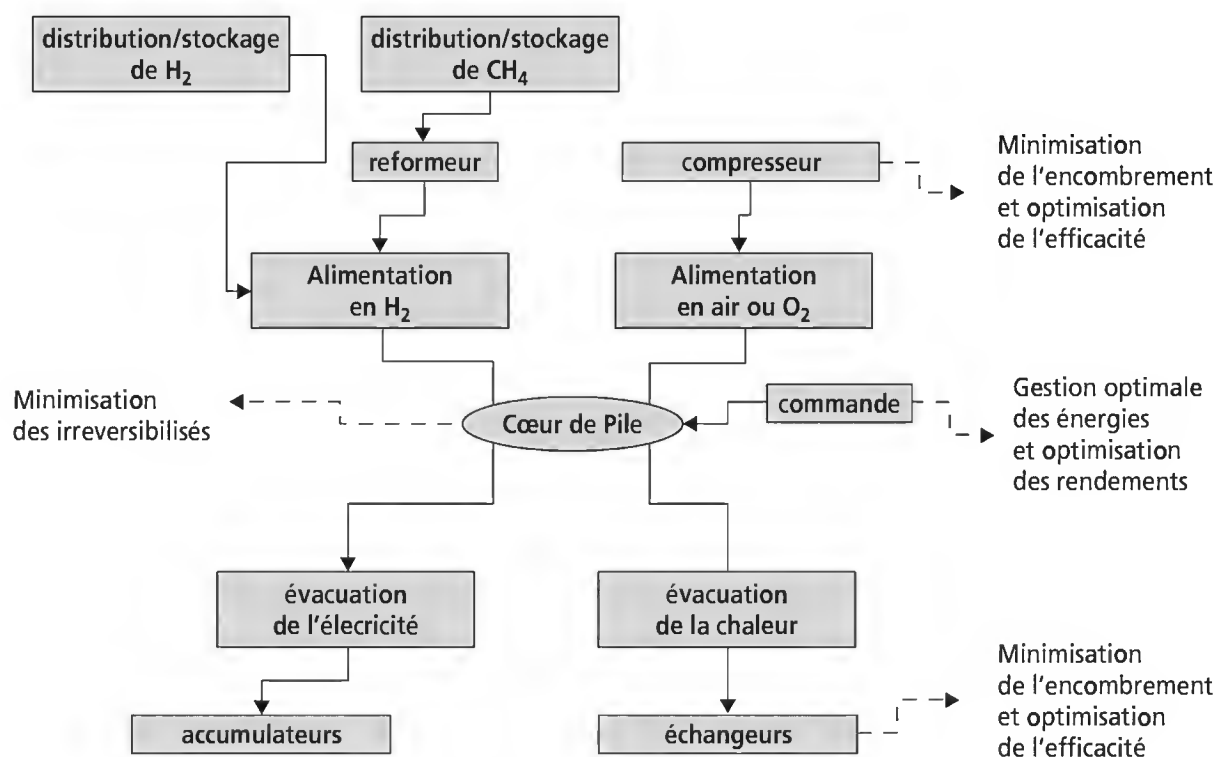


Figure 18.27 Schéma synoptique des fonctions d'un système PACo.

la littérature est environ 35 %, soit plus de deux fois moins que les rendements théoriques maximum.

Un ordre de grandeur de rendement de composants auxiliaires conforte la première remarque. Un reformeur externe, fonction vitale pour la majorité des piles, possède un rendement de reformage de l'ordre de 70 à 80 %.

Pour conclure, on peut dire que l'optimisation de la conversion électrochimique en pile à combustible suppose une optimisation du système de conversion incluant les auxiliaires. La diminution et la maîtrise de toutes les irréversibilités du système sont essentielles, vu les interactions entre composants, dont le cœur de pile.

Les courbes ci-après (figure 18.28) montrent l'existence d'optimum de fonctionnement (Radulescu M.).

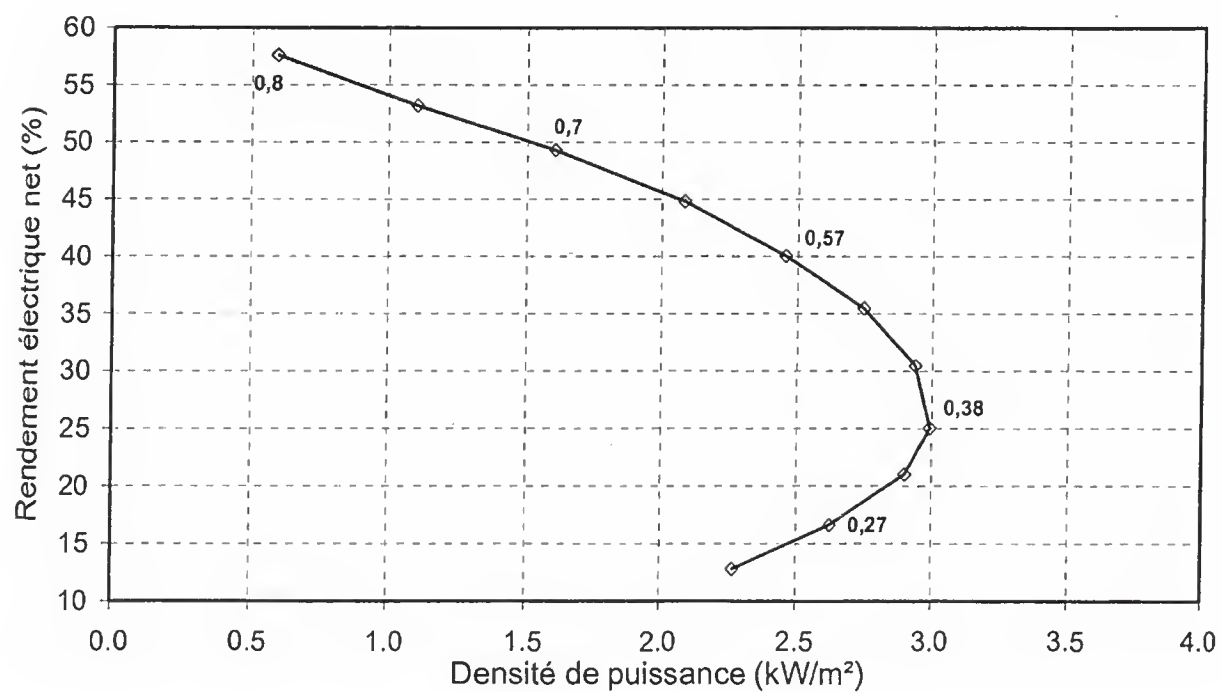
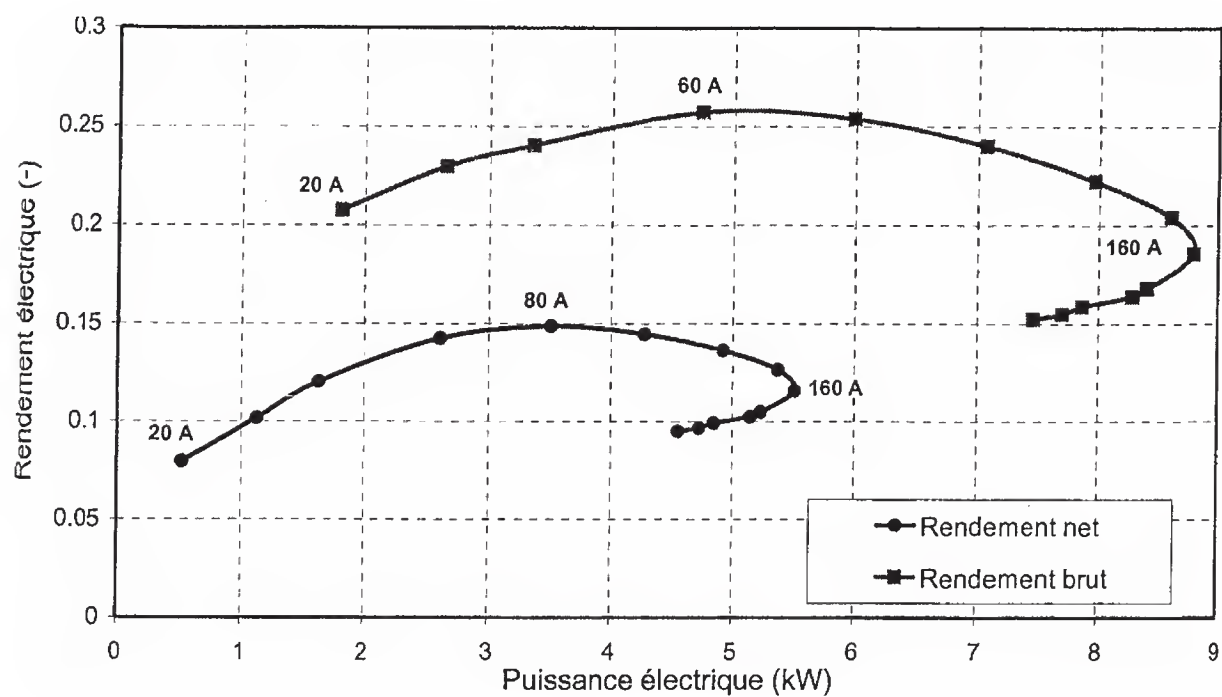


Figure 18.28

## 18.5 STOCKAGE D'ÉNERGIE

### 18.5.1 Divers types de stockage de l'énergie

Comme types de stockage, on peut distinguer :

- la réserve hydraulique ;
- la batterie électrique (énergie chimique) indispensable en pratique avec les dispositifs à photopiles solaires ;
- le volant d'inertie : pour les grosses unités, il nécessite l'utilisation des techniques du vide de façon à minimiser l'amortissement ;
- l'énergie chimique : par exemple, dissociation de l'eau avec possibilité d'utilisation dans des piles à combustible ;
- l'air comprimé (autre forme de stockage d'énergie mécanique) ;
- le stockage biologique (biomasse).

Dans le développement qui va suivre, le sujet sera restreint au cas particulier du stockage thermique. Cette classe de stockage est en effet très étudiée et semble devoir déboucher sur de nombreuses réalisations concrètes immédiates.

Un certain nombre d'expériences ont déjà fourni des indications précieuses pour l'évolution des recherches futures.

La capacité de stockage thermique est liée au déphasage existant entre une énergie de type flux et l'utilisation qui en est faite. Aussi, les paramètres de base d'un stockage sont la durée du stockage (journalier, saisonnier), la quantité d'énergie stockée, le niveau de température du stockage.

### 18.5.2 Classification des stockages thermiques

Il y a lieu de distinguer trois grandes classes de stockage de chaleur.

#### a) Stockage par chaleur sensible

L'aptitude au stockage par chaleur sensible d'un matériau dépend de sa capacité calorifique spécifique,  $c_p$  :

$$\Delta Q = Mc_p \Delta T$$

Si on considère le volume  $V$  du dispositif de stockage, on obtient :

$$\Delta Q = V \rho c_p \Delta T$$

Alors, c'est la quantité  $\rho c_p$  qui intervient (voir tableau 18.5).

#### ► Matériaux de stockage

L'eau apparaît comme le meilleur constituant thermodynamique pour le stockage. Son abondance (faible coût) est aussi un facteur important.

Il est de même pour les pierres compte tenu du faible coût, mais la capacité de stockage à volume donné est environ deux fois plus faible. Toutefois le stockage sur lit de pierre peut s'effectuer à une température supérieure à 100 °C.

Ces deux modes de stockage permettent une circulation de fluide aisée (eau : liquide, ou air : gaz).

TABLEAU 18.5 CAPACITÉ DE STOCKAGE PAR CHALEUR.

Matériel	Masse volumique	Chaleur spécifique	Capacité volumique calorifique	Conductivité thermique	Diffusivité thermique
	$\rho$	$c$	$\rho c$	$k$	$10^4 \cdot \left( \alpha = \frac{k}{\rho c} \right)$
	[kg/m <sup>3</sup> ]	[kJ/(kg K)]	[kW/(m <sup>3</sup> K)]	[kW/(m K)]	[m <sup>2</sup> /s]
Eau	1 000	4,18	4 180	0,5852	0,0014
Font de fer	7 600	0,4598	3 511,2	46,816	0,134
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	5 200	0,7524	3 929,2	2,926	0,0074
Granite	2 700	0,7942	2 173,6	2,717	0,0127
Marbre	2 700	0,8778	2 382,6	2,299	0,0097
Béton	2 470	0,9196	2 257,2	2,4244	0,0107
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4 000	0,836	3 344	2,508	0,0075
Brique	1 700	0,836	1 421,2	0,627	0,0044
Sol sec	1 260	0,7942	1 003,2	0,2508	0,0025
Sol humide	1 700	2,09	3 594,8	2,508	0,0070

### ► Procédure de stockage – destockage

Celle-ci dépend en partie du matériau, compte tenu de la vitesse à laquelle la chaleur peut être introduite ou extraite dans le stockage. Cette vitesse dépend principalement de la diffusivité thermique du matériau, rapport de la conductibilité thermique du matériau au produit  $\rho c_p$  introduit précédemment.

#### *Stockage direct*

Un exemple est représenté dans la figure 18.29 pour un système à eau stratifié. La séparation de l'eau chaude de l'eau froide est assurée par gravité. Le sens de l'écoulement dépend de l'opération en cours : ajout d'eau chaude ou soutirage.

Des dispositifs peuvent être adjoints pour éviter une diffusion trop importante entre strates.

#### *Stockage indirect*

Pour des raisons de stabilité chimique ou thermique (mise hors gel, etc.) ou de corrosion et de toxicité, on peut utiliser un matériau de stockage intermédiaire.

Le stockage sur lit de pierre en est l'exemple. Le fluide d'échange est alors en contact direct avec le matériau de stockage.

Dans d'autres configurations, l'échange de chaleur se fait par l'intermédiaire d'échangeurs (1 ou 2 selon la réalisation du stockage et l'utilisation qui en est faite).

Dans le cas d'échange direct de chaleur, le lit peut être fixe ou fluidisé comme on le rencontre souvent dans les applications en génie chimique.

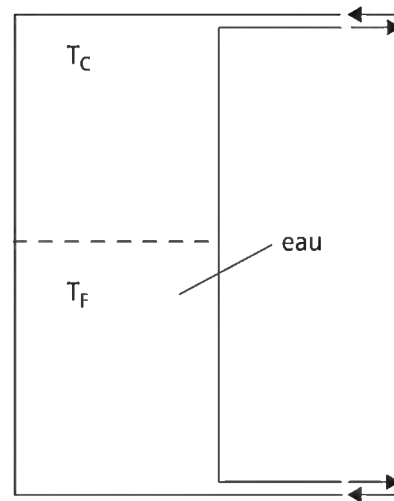


Figure 18.29 Schématisation d'un stockage fluide.

Dans l'éventualité d'un stockage thermique, le lit utilisé est un lit fixe. En effet, du fait de l'agitation des particules, le lit fluidisé minimise le gradient thermique utile pour le stockage ou le déstockage de la chaleur.

L'analyse des écoulements et transferts de chaleur dans un lit de pierre a été réalisée de façon approchée par Löff et Hawley. Ces auteurs supposent les particules sphériques. Ils recommandent la relation empirique suivante pour le calcul du coefficient d'échange par unité de volume du milieu de stockage :

$$h_v = 650 \left( \frac{\dot{D}_m}{S\Phi} \right)^{0,7} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}]$$

où :

$\dot{D}_m$  est le débit massique d'air

$S$  est la surface de la section transversale du stockage ;

$\Phi$  est le diamètre équivalent des particules :

$$\Phi = \left[ \frac{6}{\pi} \left( \frac{V}{n} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

$V$  est le volume occupé par les particules

$n$  est le nombre de particules du stockage.

Cette corrélation a été testée entre 311 et 367 K, des diamètres de particules compris entre 4,8 mm et 38 mm, et des vitesses d'air ramenées à la section de passage comprises entre 0,66 et 3,6 m/s.

Handley et Heggs ont fait des mesures des coefficients d'échange et des pertes de charge pour des écoulements dans des lits fixes. Ils ont par ailleurs comparé leurs résultats aux corrélations antérieures.

Pour un lit fixe de particules sphériques ils préconisent :

$$\text{St} = \frac{0,255}{\varepsilon \text{Re}_\phi^{0,33}}$$

où :

$St = \frac{Nu_\phi}{Re_\phi Pr}$  est le nombre de Stanton ( $Pr = 0,71$  pour l'air)

$\varepsilon$  est la porosité du milieu

$Re_\phi = \frac{\rho v \Phi}{\mu}$  est le nombre de Reynolds

$v$  est la vitesse du fluide ramenée à la section de passage.

Pour l'air :

$$Nu_\phi = \frac{0,23 Re_\phi^{2/3}}{\varepsilon}$$

La perte de charge pour une longueur  $L$  de stockage est donnée par :

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \frac{L}{\Phi^2} \left( \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^3 \frac{255\mu}{\rho v} + 1,75$$

Pour un lit de pierre,  $\varepsilon$  est généralement compris entre 0,35 et 0,45 et représente le volume offert au fluide rapporté au volume total de stockage. La division du milieu améliore le stockage. Toutefois, un stockage par chaleur latente semble plus performant.

#### b) Stockage par chaleur sensible et latente

Ce type de stockage fait intervenir un changement d'état généralement solide  $\leftrightarrow$  liquide plus que liquide  $\leftrightarrow$  gaz pour des raisons de commodité d'emploi.

Néanmoins un changement d'état liquide  $\leftrightarrow$  gaz fait intervenir généralement une chaleur latente de vaporisation supérieure à celle relative à la fusion.

La transformation ayant la chaleur latente de changement d'état la plus élevée est celle du passage de l'eau liquide à la vapeur d'eau qui dans les conditions de pression atmosphérique est voisin de  $2\,300 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

L'intérêt majeur du stockage par chaleur latente n'est pas seulement dans le fait que la chaleur latente de changement d'état est nettement supérieure aux possibilités de stockage par chaleur sensible, mais aussi dans la constance de la température lors du changement d'état.

Il y a lieu d'adapter la température, donc le matériau à l'utilisation envisagée.

Le stockage par chaleur latente nécessite aussi un échange de chaleur indirect. De nombreuses études actuelles recherchent le meilleur mode d'encapsulation pour des corps tels que la paraffine. Un des principaux problèmes rencontrés est le vieillissement du stockeur, ainsi que les variations de volume qui peuvent être gênantes.

Le tableau 18.8 donne un aperçu des caractéristiques d'un certain nombre de matériaux stockeurs potentiels.

On distingue ainsi trois grandes familles de matériaux :

- les corps purs
- les eutectiques (voir figures 18.30, 18.31) qui permettent d'abaisser la température de stockage par rapport au corps pur. On peut citer un certain nombre d'eutectiques adaptés au stockage moyenne température :



$\text{KNO}_3 + \text{NaNO}_3$  à 220°C

$\text{KNO}_3 + \text{LiNO}_3$  à 133°C

$\text{NaNO}_3 + \text{LiNO}_3$  à 193°C

$\text{NaOH} + \text{LiOH}$  à 218°C

Il semble toutefois qu'il manque encore beaucoup de données thermiques à ce sujet.

- les sels hydratés (voir tableau 18.7) qui sont particulièrement bien adaptés au stockage thermique basse température. Leur grand handicap est le vieillissement.

**TABEAU 18.6** CHALEUR LATENTE DE CHANGEMENT DE PHASE

Matériel	Changement de phase	Température de changement [°C]	Chaleur de changement [kJ/kg]
$\text{H}_2\text{O}$	liquide ↔ gaz	100	2 257,2
$\text{BeCl}_2$	solide ↔ liquide	547	1 295,8
$\text{NaF}$	solide ↔ liquide	992	702,24
$\text{NaCl}$	solide ↔ liquide	803	514,14
$\text{LiOH}$	solide ↔ liquide	462	430,54
$\text{LiNO}_3$	solide ↔ liquide	264	367,84
$\text{KCl}$	solide ↔ liquide	776	342,76
$\text{B}_2\text{O}_3$	solide ↔ liquide	449	317,68
$\text{Al}_2\text{Cl}_6$	solide ↔ liquide	190	263,34
$\text{FeCl}_3$	solide ↔ liquide	306	259,16
$\text{NaOH}$	solide ↔ liquide	318	167,2
$\text{H}_3\text{PO}_2$	solide ↔ liquide	26	146,3
$\text{KNO}_3$	solide ↔ liquide	337	117,04
$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ (sel de Glauber)	solide ↔ liquide	32	234,08*
$\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	solide ↔ liquide	30	171,38*

\* ce sont des matériaux congruents, donc la valeur pour la chaleur latente dépend du degré de vieillissement des solutions solides

**TABEAU 18.7** CHALEUR LATENTE DE CHANGEMENT DE PHASE

Sel	Température de changement	Chaleur de changement
	°C	kJ/kg
$\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$	32,5	252,89
$\text{LiNO}_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$	30	295,526
$\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	130	159,676
$\text{Mg}(\text{NO}_3)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	90	159,676
$\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	28	133,76

Des études réalisées en France ont montré récemment que l'adjonction d'un stabilisant minéral et de germes épitaxiaux donne de bonne caractéristique en cyclage thermique à ce matériau appelé chliarolithe (pierre tiède).

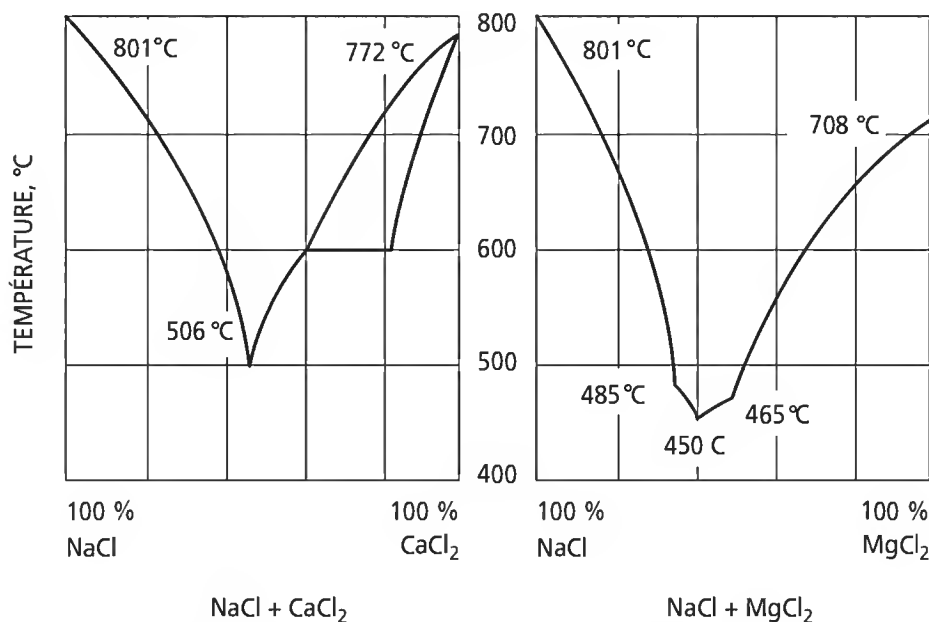


Figure 18.30 Deux mélanges eutectiques à sel commun et additifs économiques.

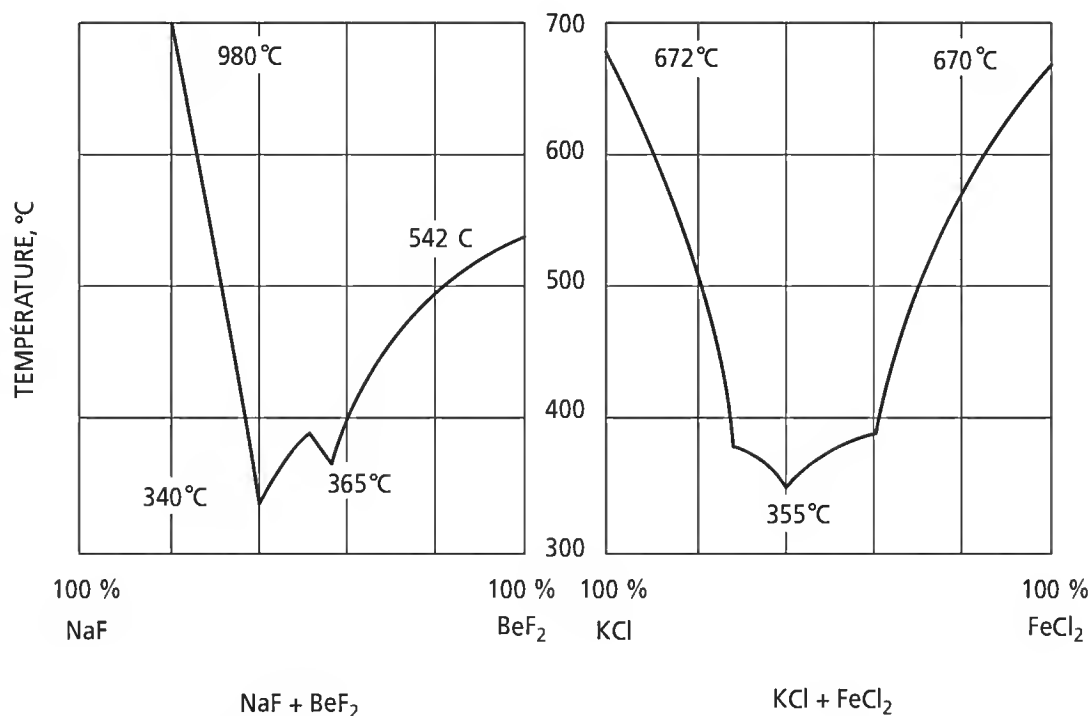


Figure 18.31 Deux mélanges eutectiques à haute énergie pour des applications basse température.

La masse volumique de ce matériau est de  $15 \text{ kg m}^{-3}$ , sa conductibilité thermique  $\lambda = 0,5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , sa chaleur massique  $c_p = 2,508 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ; la variation de volume lors du changement d'état est d'environ 10 %.

Une des premières applications testées est l'utilisation pour le chauffage par dalle.

### c) Stockage de chaleur dans le sol

Ce mode de stockage revêt un aspect particulier, mais les nombreuses études mettent en évidence la possibilité d'un développement proche.

Ce problème présente de nombreux points communs avec ceux rencontrés en géothermie, ou dans les problèmes d'extraction de la chaleur du sol par pompe à chaleur (particulièrement étudiés par les Scandinaves).

En France, quelques projets sont en cours de réalisation ou réalisés.

Il y a lieu pour ce mode de stockage de distinguer deux situations selon l'humidité du sol.

Pour un stockage en sol sec, le problème est résolu par traitement de l'équation de transfert de chaleur par conduction en régime variable :

$$\text{div}\left[\overline{\lambda} \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}\right] = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Pour un sol humide, il faut tenir compte de la présence de l'eau.

On montre (Feidt M.) qu'il est possible de résoudre le problème à l'aide de l'équation de la chaleur :

$$\text{div}\left[\overline{\lambda}^* \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}\right] - \rho_f c_{pf} \text{div}(\overrightarrow{VT}) = (\rho c_p)^* \frac{\partial T}{\partial t}$$

où :

$\rho_f$  est la masse volumique de l'eau

$c_{pf}$  est la chaleur spécifique de l'eau

$\overline{\lambda}^*$  est le tenseur de conductibilité équivalente du milieu

$(\rho c_p)^*$  est la capacité calorifique équivalente par unité de volume

$\overrightarrow{V}$  est la vitesse de filtration de l'eau, ou la vitesse de Darcy.

## 18.5.3 Les tendances et applications actuelles

### a) Dynamique des stockages

La particularité et la difficulté majeure des stockages d'énergie sont liées à l'installabilité des systèmes dans lesquels ils sont incorporés ; de ce fait, la variable temps apparaît dans les modèles. Le contrôle-commande et l'optimisation des systèmes imposent la connaissance de l'évolution temporelle de la demande, de façon à pouvoir dimensionner (optimisation statique) puis gérer (optimisation dynamique) l'ensemble.

Il apparaît alors trois étapes dans la démarche : la recherche du matériau adapté (souvent un matériau à changement de phase PCM), la maîtrise des transferts thermiques dans les échangeurs de chaleur (problème à front de changement de phase), l'adéquation à l'application. Ces trois étapes sont relatives au stockage thermique ; la transposition à d'autres stockages est possible.

### b) De nouvelles voies au stockage

Le renouveau récent de la problématique a déjà donné lieu à deux nouvelles tendances fortes.

#### ► Renouveau du stockage électrique

##### *Les batteries NiZn*

Les contraintes d'environnement font que les batteries au plomb et NiCd risquent l'interdiction dans un futur proche. Le tableau 18.8 montre le résultat d'une analyse de cycle de vie (ACV) réalisée par EDF.

**TABEAU 18.8** RÉSULTATS ACV POUR COMPARAISON DES BATTERIES Pb ET Ni-Cd.

	Impacts potentiels associés au cycle de vie batt. Ni-Cd	Impacts potentiels associés au cycle de vie batt. Pb	Rapport Pb/Cd
Énergie primaire (MJ)	2,7e + 05	2,8e + 05	1,05
Effet de serre (kg éq.CO <sub>2</sub> )	2,8e + 03	3,4e + 03	1,21
Acidification (kg éq.SO <sub>2</sub> )	124	35	0,28
Eutrophisation (kg éq.PO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> )	1,1	2,3	2,14
Smog photoch.	5,8	7,9	1,35
Épuist. ressour.	2,2e – 11	6e – 11	2,72
Toxicité métaux	19	170	9
Déchets non radioactifs (kg)	722	1 200	1,67
Déchets radioactifs (dm <sup>3</sup> )	1,26	1,47	1,17

De nouveaux types d'accumulateurs sont en cours d'étude et de développement. En plus de leur intérêt environnemental, ceux-ci ont des niveaux de performances plus élevés ; aussi, les systèmes à lithium Li stockent environ 10 fois plus d'énergie que les systèmes au plomb, mais les coûts du kWh sont dans le même rapport. Les systèmes à nickel-hydrures métalliques sont intermédiaires. Par contre, les systèmes NiZn ont une énergie massique légèrement inférieure à celle du Li (80 Wh/kg) pour un coût proche de celui de la filière au plomb (2 fois) : cela laisse entrevoir un développement de véhicules à motorisation totalement ou partiellement électrique (véhicules hybrides).

### *Les supercapacités*

Une autre voie à l'alternative précédente est le développement de supercapacités ; mais l'état de l'art actuel est moins favorable.

#### ➤ Renouveau du stockage thermique

Le stockage thermique haute température est toujours un domaine à « verrous » forts : matériaux, corrosion, isolation.

Par contre, le stockage froid bénéficie des avancées dans le domaine des coulis.

Une autre alternative au stockage thermique (chaud ou froid) suppose de passer par un vecteur physique ou chimique : réactions physiques (chimiques) réversibles (adsorption-désorption physique ou chimique) ; il est alors envisageable non plus de transférer mais de transporter la chaleur ou le froid sous forme physique ou chimique.

La même démarche vaut pour des systèmes très centralisés comme les centrales nucléaires, où une conception adéquate peut permettre la production d'hydrogène (vecteur énergétique) à haute température, pour stockage avant utilisation en combustion chaude (production de chaleur) ou conversion directe (combustion froide : production d'électricité en PACo).

### *c) Les applications actuelles*

#### ➤ Le stockage de froid

En France, la firme spécialiste de ce domaine est Cristopia, tout particulièrement pour le stockage par chaleur latente dans la gamme de température  $[-33\text{ °C}, +27\text{ °C}]$  (Cristopia).

Les domaines industriels visés sont la climatisation, l'informatique, l'agroalimentaire, la chimie-pharmacie. Les applications sont aussi nombreuses dans les transports. Le lecteur intéressé par le sujet peut se référer à l'article de synthèse de (Zalba B. *et al.*).

#### ➤ Le stockage électrique

Les piles et batteries sont d'usage courant pour les nombreux appareillages électriques et électroniques.

#### ➤ Des applications de niches

La majorité des applications actuelles sont des applications à petite échelle du système. Les applications pour les grands systèmes apparaissent seulement maintenant comme une préoccupation de demain. En revanche, il existe des applications très ciblées dont l'avenir pourrait changer : par exemple, les piles électrothermiques.

Ces piles activées thermiquement sont utilisées dans l'aérospatiale ; une fois déclenchées (temps de réponse 0,1 s à quelques secondes), elles se vident entièrement, mais leur stockage se fait sans perte d'énergie (stockage sur des périodes de 10 ans), et leur coût est compétitif par rapport aux accumulateurs classiques.

## 18.6 CONCLUSION

L'importance du comportement en transitoire de systèmes ou procédés a montré la nécessité de moyens de stockage d'énergie performants.

Par ailleurs, les procédés de conversion d'énergie directe qui permettent une conversion isotherme sans passage par l'énergie thermique ont donné une illustration de la conversion d'énergie sans cycle thermodynamique. L'efficacité actuelle de ces procédés reste faible (< 20 % pour les cellules photovoltaïques) mais les potentialités restent fortes et ne doivent pas être ignorées.

## BIBLIOGRAPHIE

- BRIN A. *Océan et énergie*, Éditions Technip, 1979.
- BYRD J.W., ADLER C.G., The maximum efficiency of solar energy conversion devices, *J. Appl. Phys.*, Vol. 54, n° 12, p. 7166, 1983.
- Cristopia, Manuel Technique, n° 364, avril 1995.
- FEIDT M. *et al.*, *Génie énergétique appliqué au solaire ; énergie solaire thermique*, Editura Printech, Chapitre 5, 2004.
- FEIDT M., *Contribution à l'étude et l'optimisation des conditions de fonctionnement d'une pompe ionique à champ électrostatique radial*, Thèse d'État, Institut National Polytechnique de Lorraine, octobre 1979.
- FEIDT M., COSTEA M., PETRE C., BOUSSEHAIN R., *Génie énergétique appliqué au solaire : énergie solaire thermique*, Editura Printech, 2004.
- GALLET P. *et al.*, *Physique des convertisseurs héliothermiques*, Edisud, La Cabade, 1980.
- KOTHARI L.S. *et al.*, Determination of optimum load for a solar cell, *J. Appl. Phys.*, Vol. 53, n° 8, p. 5982, 1982.
- LIGOU J., *Introduction au génie nucléaire*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997.
- MERZOUK M., *Contribution à la détermination des performances théoriques et expérimentales des capteurs solaires à tubes sous vide en régime transitoire*, Thèse, Université de Tlemcem, Algérie, avril 2004.
- RADULESCU M., *Systèmes de cogénération d'électricité et de chaleur avec piles à combustible de type PEMFC ou SOFC et vaporeformage interne*, Thèse de doctorat UHP Nancy 1, 25 septembre 2006.
- REBUT PH., *Les problèmes thermiques dans la fusion thermonucléaire*, Congrès SFT, p 69-84, Elsevier, Reims, 30 mai-2 juin 2005.
- RIFFAT S.B., MA X., Thermoelectrics : a review of present and potential applications, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 23, p. 913-935, 2003.
- STEVENS P. *et al.*, Piles à combustible, *Techniques de l'Ingénieur*, Article D3340, Paris.
- ZALBA B. *et al.*, Review on thermal energy storage with phase change : materials, heat transfer analysis and applications, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 23, p. 251-283, 2003.

## Chapitre 19

---

# L'intégration de systèmes et procédés

### 19.1 INTRODUCTION

Dans le cours de cette troisième partie de l'ouvrage, nous avons vu comment répondre à un besoin, une utilité :

- production de chaleur par échangeur (chapitre 14), par pompe à chaleur (chapitre 15), par combustion, chaudière (chapitre 16) ;
- production de force (énergie mécanique ou électrique) par moteurs de divers types (essentiellement chapitre 16) ;
- production d'air comprimé, de vapeur (chapitre 17) qui constituent aussi d'autres utilités.

Le couplage entre les utilités n'a pas été abordé.

Hormis le chapitre 18 offrant une ouverture générale sur les conversions d'énergie, l'ouvrage a par ailleurs été délibérément centré sur les transformations thermomécaniques ; bien que cette relation calorifique-mécanique soit dominante dans le monde qui nous entoure, elle n'est pas unique (on y reviendra dans le cours du chapitre). Néanmoins, on va dans un premier temps poursuivre ici la logique du développement sur l'exemple thermomécanique en montrant que la chaleur fatale n'est pas forcément un rejet sans valeur, ce qui est à l'origine de la cogénération chaude.

## 19.2 LA COGÉNÉRATION

### 19.2.1 La cogénération chaude

#### a) *Le principe*

La cogénération chaleur-force constitue sans doute une des premières intégrations de système, le but étant la production simultanée de deux utilités, de l'énergie électrique et de la chaleur, et ce de façon optimale ; il apparaît alors que l'idée première qui consiste à avoir un moteur pour la production d'énergie mécanique (électrique) puis une chaudière pour les besoins en chaleur, si elle est très souple d'usage, n'est pas optimale puisqu'elle n'utilise pas les rejets thermiques du moteur.

#### b) *Les variantes de cogénérateurs : technologies*

Tout moteur thermique peut donner lieu à un système de cogénération. Toutefois, les systèmes les plus usuels sont à base de :

##### ➤ Turbine à vapeur à contre-pression (voire à condensation)

Le schéma à contre-pression consent une perte de puissance mécanique à la turbine, par élévation de la température de sortie assurant une revalorisation de la chaleur disponible.

##### ➤ Turbine à combustion avec récupération de chaleur sur les fumées

Les gaz d'échappement sortent chauds et propres de la turbine (450-550 °C) ; leur chaleur sensible peut être récupérée dans une chaudière ou dans une simple batterie d'échange fournissant de la chaleur à un fluide caloporteur secondaire.

##### ➤ Moteurs à combustion

###### *Moteurs à combustion interne*

Les MCI sont très utilisés en traction, mais aussi à poste fixe pour l'entraînement de machines ou d'alternateurs.

La chaleur peut être récupérée sur trois postes : sur les gaz d'échappement qui sortent chauds (450 – 550 °C), sur l'eau de refroidissement du bloc moteur, sur le circuit de lubrification.

La récupération de chaleur se fait sous forme d'eau chaude (température inférieure à 110 °C) ou de vapeur basse-pression. La vapeur est souvent difficile à utiliser industriellement, mais elle est par contre bien adaptée au génie climatique.

###### *Moteurs à combustion externe*

La problématique est la même que pour le moteur à combustion interne ; le couplage à la gazéification ne nécessite alors pas d'épuration.

La figure 19.1 illustre pour un moteur diesel la configuration de cogénération pour usage d'eau chaude.



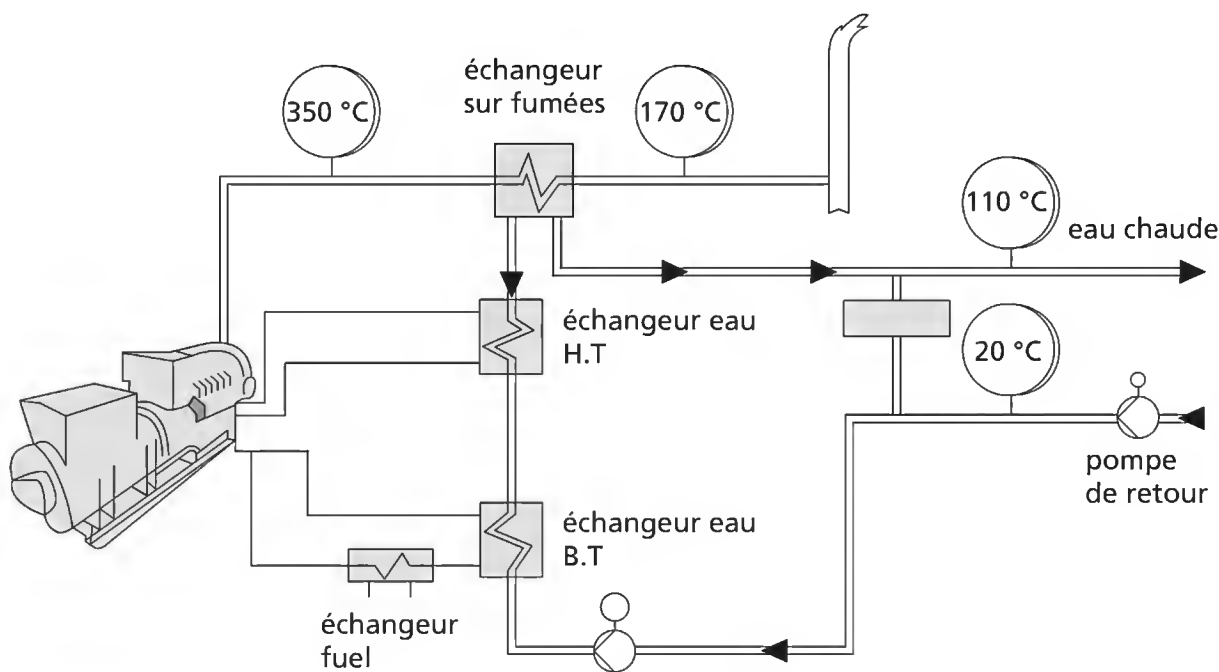


Figure 19.1

### ► Autres variantes

Aux trois configurations précédentes, il y a lieu d'ajouter des variantes plus récemment parues et qui pourraient prendre de l'importance à l'avenir.

#### *Piles à combustible*

La pile PEMFC nécessite un refroidissement pour produire de l'électricité de façon optimale ; de ce fait, elle produit un caloporteur (de l'eau) à une température d'environ 60 °C.

#### *Systèmes photovoltaïques*

Les systèmes à silicium produit actuellement, de même que les piles à combustible, doivent rester à basse température ; leur refroidissement pourrait subvenir au chauffage dans l'habitat.

#### *c) Les variantes de cogénération : combustibles*

En 2000, le gaz naturel GN représentait 47 % des combustibles naturels utilisés dans les centrales PCCE (production combinée de chaleur et d'électricité) ; le charbon, lignite et dérivés ne représentaient plus que 18 % ; les combustibles renouvelables ne représentent que 12 % des combustibles (liqueur noire de l'industrie du papier, déchets de bois).

TABLEAU 19.1 RÉSUMÉ DES CARACTÉRISTIQUES DE COGÉNÉRATION.

Technologie	Puissance	Ratio E/Q	Rendement	Applications appropriées
Turbines à vapeur	Biomasse jusqu'à 5 MW Fossiles : jusqu'à des centaines de MW	> 0	> 0,85	Besoin élevé en vapeur de procédé (agroalimentaire, papeteries)
Turbines à combustion	500 kW-300 kW 20 kW-1 MW (en développement)	0,5-0,8 0,3-0,45	0,6-0,8 0,5-0,7	Industries et secteur tertiaire
Moteurs à combustion interne (gaz, diesel)	2,5 kW-6 100 kW (gaz) 5 kW-1 700 kW (diesel)	0,4-0,9	0,8-0,9	Besoins en chaleur à basse température (résidentiel, hôpitaux, commercial, bâtiments, certaines industries)
Moteurs à combustion externe	1-15 kW 50 kW (en développement)	0,3-0,4	0,5-0,7	Résidentiel, commercial, petites industries

Il apparaît sur le tableau 19.1 une classification par la taille du système ; celle-ci est reliée à la puissance nominale. Il est de coutume de distinguer entre :

- la grande cogénération ( $\dot{W}_{elec} > 1 \text{ MW}$ ) ;
- la petite cogénération (215-1 000 kW) ;
- la mini-cogénération (36-215 kW) ;
- la micro-cogénération (< 36 kW).

Un paramètre important de la cogénération est le ratio E/Q (rapport entre l'électricité et la chaleur produite) ; il influe sur le dimensionnement selon la priorité.

On notera que les déchets ménagers et industriels constituent maintenant une source privilégiée de combustible pour la cogénération.

### 19.2.2 La cogénération froide

L'utilisation de la chaleur fatale de machines thermomécaniques peut aussi être faite dans les machines à cycles inverses à sorption (chapitre 15) ; la cogénération correspondante est une cogénération froide. Cet usage est particulièrement intéressant dans les pays chauds, surtout ceux ne disposant pas de réseaux énergétiques centralisés.

Le potentiel de la cogénération froide concerne tous les sites où une quantité suffisante et régulière de froid est appelée froid négatif en entrepôts (conservation) et industries (agroalimentaire, chimie et pharmacie), froid positif dans l'habitat (conditionnement d'air).

*a) Cogénération froide directe ou indirecte**➤ Cogénération froide directe*

La chaleur récupérée alimente directement le système de réfrigération ; le système est donc compact et fait l'économie d'investissement et de maintenance de l'intermédiaire (chaudière).

*➤ Cogénération froide indirecte*

Dans ce cas, la chaleur récupérée est utilisée dans une chaudière (un échangeur) pour produire de la vapeur ou de l'eau chaude ; l'unité de réfrigération est alimentée par le fluide secondaire (l'eau). L'avantage de cette configuration plus complexe est de disposer de vapeur ou d'eau chaude pour d'autres applications (voir trigénération).

*b) Cogénération froide à CMV ou à sorption**➤ Cogénération froide à compression mécanique vapeur CMV*

Ces configurations utilisent des machines frigorifiques consommant de l'énergie électrique ou mécanique ; les chaleurs fatales restent un rejet, mais les COP sont grands : de 2,5 à 5 voire plus. L'intérêt de cette configuration suppose un rendement global de conversion de l'énergie primaire en froid évalué en tenant compte du rendement de production de l'électricité (ou de l'énergie mécanique) ; ce rendement est dans la fourchette 0,25 à 0,50.

*➤ Cogénération froide à machines à sorption*

Les machines frigorifiques à sorption utilisent principalement l'énergie thermique fatale ; mais leur COP reste faible 0,6 à 1,2. Les recherches actuelles visent, à travers des variantes (machines à multiples effets, cascades de fluides), à l'augmentation de ces COP.

*Les machines à absorption*

Les machines à couple ammoniac-eau sont bien adaptées aux applications industrielles en froid négatif : température utile inférieure à 5 °C, puissance de plusieurs MW.

Les machines à eau-bromure de lithium sont utilisées pour le conditionnement d'air dans l'habitat ( $T > 5$  °C).

Leur COP est généralement plus élevé de ce fait.

*Les machines à adsorption*

Le couple le plus utilisé est le couple eau-silicagel ; il correspond à du froid positif et aux applications dans le bâtiment. La gamme de puissance disponible va de 50 à 500 kW froid.

Les eaux chaudes d'alimentation sont de température plus faible (70-90 °C) que les machines à eau-LiBr, permettant la solarisation des machines par capteur plan.

### 19.2.3 Autres cogénérations – généralisation

#### a) Cogénération eau-électricité

Les cogénérations chaude et froide si elles sont les plus développées ne sont pas les seules existantes. Ainsi, la chaleur résiduelle des convertisseurs thermomécaniques peut être utilisée pour la production d'eau douce. Cette configuration de cogénération est une réalité industrielle (Wartsila). Elle prendra vraisemblablement de plus en plus d'importance à l'avenir, vu les besoins vitaux en énergie et en eau partout dans le monde.

#### ► Généralisation

L'approche précédente peut être généralisée à tout couple d'utilités dont une au moins énergétique.

Pour illustrer le propos, nous indiquerons les projets actuels de production d'électricité par les nouvelles générations de centrales électronucléaires (énergie électrique de type flux), mais dont les surplus électriques ou (et) thermiques pourraient être utilisés pour la production de combustibles stock, dont le vecteur hydrogène (deuxième utilité).

#### b) Trigénération

La cogénération fait intervenir deux utilités. Or, dans certains cas, aux besoins électriques se couplent à la fois des besoins de chaleur et des besoins de froid ; ainsi, dans les climats tempérés, l'usage de cogénération chaude et de cogénération froide peuvent alterner. Dans certaines applications (industries agroalimentaires, hôpitaux), les deux utilités chaleur peuvent être concomitantes, ce qui ajoute à la pertinence de la configuration trigénération de systèmes et procédés : il y a alors trois utilités force, chaleur, et froid. La figure 19.2 représente un schéma évolué d'une installation de trigénération destinée à répondre aux besoins, quels que soient ceux-ci.

#### c) Polygénération

Les concepts et réalisations de cogénération et trigénération font intervenir une utilité mécanique, et une ou deux utilités thermiques.

On propose ici d'étendre dans le principe cette approche à toutes formes d'énergie ; on aboutit ainsi à la notion de polygénération qui mérite considération, même si elle n'est pas ou peu développée actuellement, sauf dans les cascades thermiques. On peut penser par exemple à la production d'air comprimé.

### 19.2.4 Efficacité énergétique de la cogénération

#### a) Analyse énergétique

L'analyse développée ci-après est particulière à la cogénération chaude, électricité-chaleur. Cette analyse vise à juger de l'efficacité du système au sens du premier principe ; l'accent est donc mis sur les économies d'énergie, bien que les réductions d'émission soient aussi importantes, de même que la production décentralisée qui ne

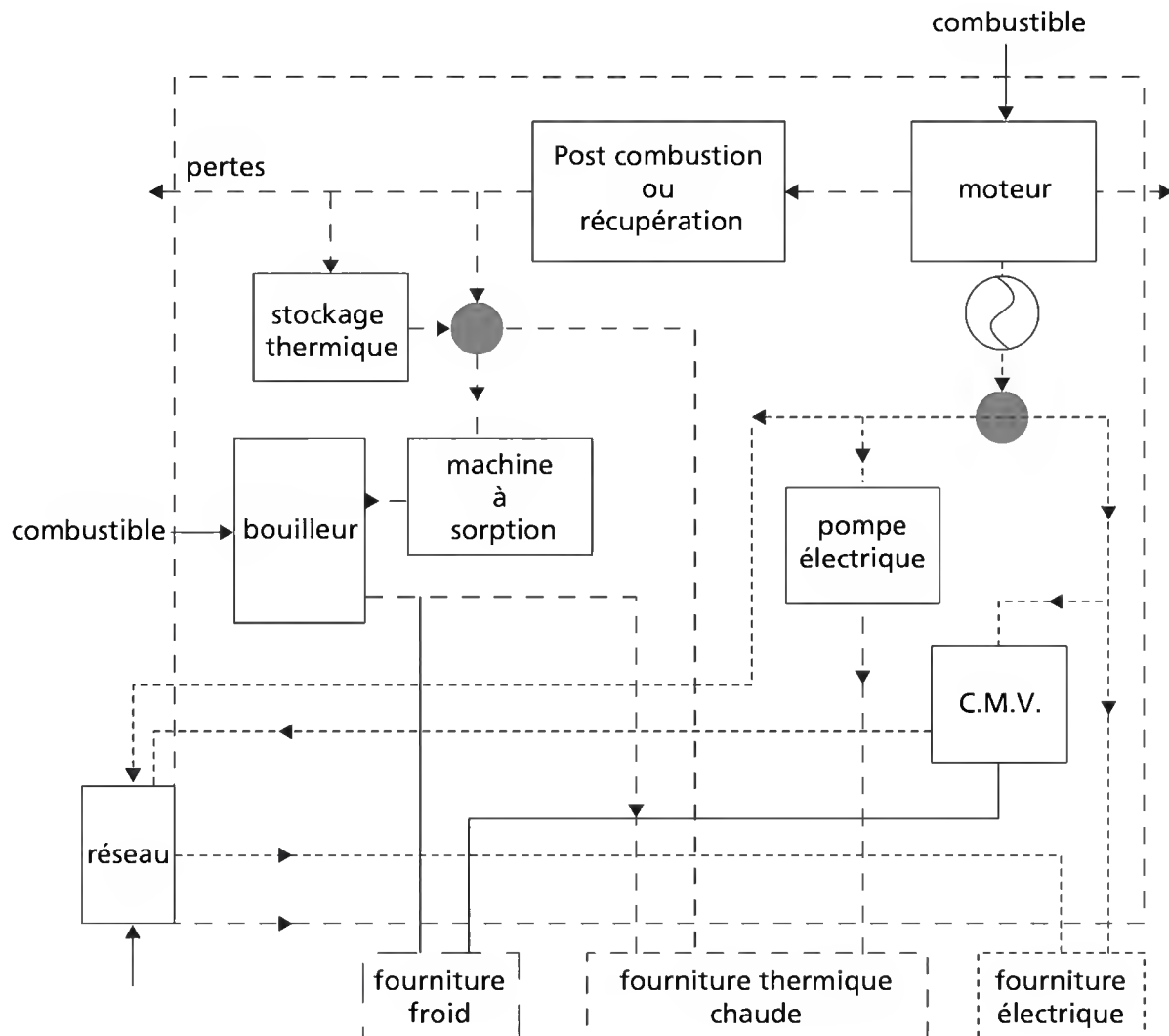


Figure 19.2 Schéma évolué d'une installation de trigénération.

nécessite pas de réseau. On sait par exemple que le transport et la distribution d'énergie électrique provoque 7 % de pertes dans les pays de l'OCDE.

► Rendement énergétique de la cogénération au sens du premier principe

La figure 19.3 représente le système de cogénération comme un système ouvert en régime dynamique stationnaire.

En convention de l'ingénieur, il vient pour le rendement du système de cogénération :

$$\eta_I = \frac{\dot{w} + \dot{q}_C}{\dot{q}_D} = 1 - \frac{\dot{q}_P}{\dot{q}_D} \quad (19.1)$$

Il apparaît sur cette définition que dans la limite où toute la chaleur fatale est valorisable, le rendement de cogénération se confond avec le rendement d'adiabacité du système,  $\dot{q}_P$  représentant le flux des pertes thermiques.

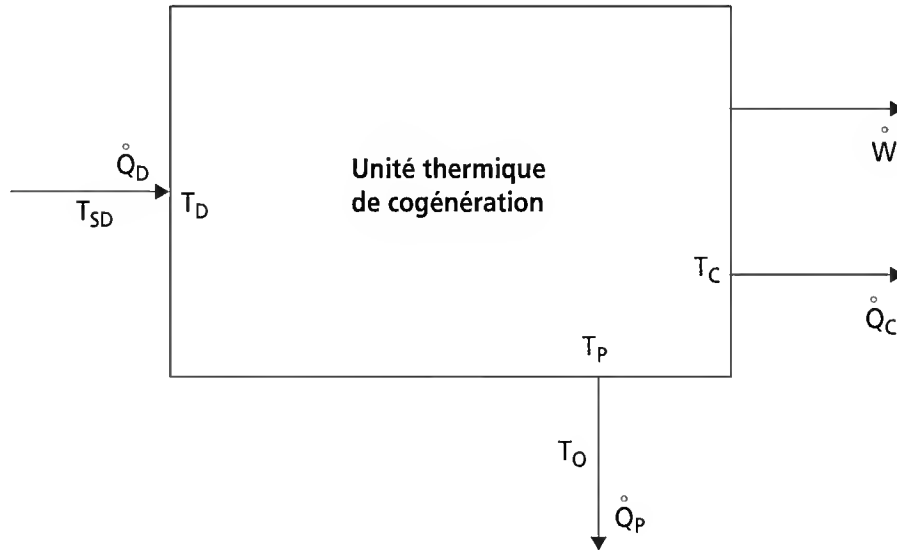


Figure 19.3 Cogénération en régime dynamique stationnaire.

**Remarque :** pour un système adiabatique, le rendement limite de cogénération est 1.

Toutefois, ce rendement ne rend pas compte de l'intérêt du système de cogénération, ni de la qualité de la chaleur valorisée.

#### ► Calcul des économies d'énergie

Ce calcul propose de rechercher l'économie d'énergie primaire engendrée par la cogénération par rapport à une production séparée des deux utilités ; la production séparée passe par la connaissance d'une situation de référence. La figure 19.4 représente le cas typique des pays européens.

La comparaison se fait donc à mêmes utilités (contraintes de la comparaison) : ratio énergie électrique/chaleur imposée.

**Remarque :** la centrale électrique et la chaudière apparaissent comme les cas limites de la cogénération, en priorité tout électrique, respectivement priorité chaleur.

La consommation d'énergie substituée est donc :

$$\dot{q}_{DT} = \dot{q}_{DE} + \dot{q}_{DC} \quad (19.2)$$

L'index d'économie d'énergie est alors défini sous la forme :

$$e = \frac{\text{économie d'énergie primaire}}{\text{consommation primaire}} = \frac{\dot{q}_{DT} - \dot{q}_D}{\dot{q}_{DT}}$$

**Remarque :** l'index d'économie d'énergie peut aussi être normé par rapport à la nouvelle consommation d'énergie  $\dot{q}_D$ .

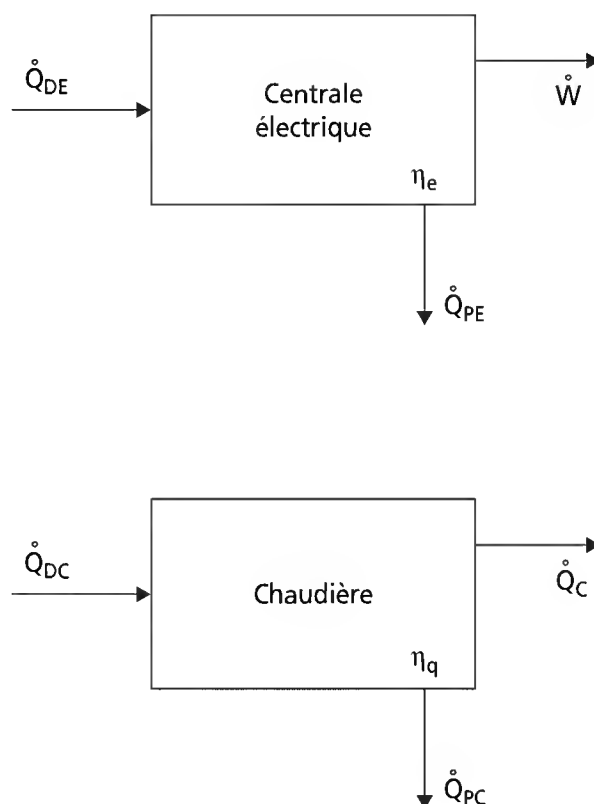


Figure 19.4 Production séparée en régime dynamique stationnaire.

Le tableau 19.2 (PRISME) rend compte des références proposées actuellement.

TABLEAU 19.2

Cas	Exemple de référence
> 1 MWe	Centrale turbine gaz vapeur à cycle combiné de rendement 55 % et chaudière à gaz de rendement thermique 90 % (Europe)
100 kWe-1 MWe	Production de chaleur : – chaudière à gaz à rendement thermique 90 % Production d'électricité : – centrale au charbon de rendement 36 % – ou parc moyen de production électrique de rendement 38 % (Pays-Bas)
10 kWe-100 kWe (mini ou micro-cogénération)	Rendement moyen du parc de production électrique diminué des pertes de distribution (environ 5 %) et rendement thermique moyen d'environ 80 % (Allemagne)
Nombreux pays en développement	Générateurs diesel



On peut montrer que, pour la cogénération chaude, l'index d'économie d'énergie est donné par la relation :

$$e_e = 1 - \frac{1}{\frac{r_e}{\eta_e} + \frac{r_q}{\eta_q}}$$

avec  $r_e, r_q$  les rendements électrique et thermique du cogénérateur.

### b) Analyse exergetique

#### ► Rendement exergetique interne

Cette analyse est réalisée ici sur la même configuration qu'au paragraphe (19.2.4.a). Par différence entre le bilan d'énergie et le bilan d'entropie interne au cogénérateur multiplié par la température de référence ( $T_{\text{ambiante}} = T_o$ ) :

$$\frac{\dot{q}_D}{T_D} + \dot{S}_i = \frac{\dot{q}_C}{T_C} + \frac{\dot{q}_P}{T_P} \quad (19.4)$$

il vient :

$$\dot{q}_D \left( 1 - \frac{T_o}{T_D} \right) - T_o \dot{S}_i = \dot{w} + \dot{q}_C \left( 1 - \frac{T_o}{T_C} \right) + \dot{q}_P \left( 1 - \frac{T_o}{T_P} \right) \quad (19.5)$$

$T_D, T_C, T_P$  représentent les températures internes au système de cogénération.

Il en résulte le rendement exergetique de cogénération interne :

$$\eta_{ex_i} = \frac{\dot{w} + \dot{q}_C \left( 1 - \frac{T_o}{T_C} \right)}{\dot{q}_D \left( 1 - \frac{T_o}{T_D} \right)} = 1 - \frac{T_o \dot{S}_i + \dot{q}_P \left( 1 - \frac{T_o}{T_P} \right)}{\dot{q}_D \left( 1 - \frac{T_o}{T_D} \right)} \quad (19.6)$$

Ce rendement fait apparaître le facteur de Carnot interne pour la chaleur valorisée, de même que pour la dépense calorifique.

Il ressort aussi sur la deuxième égalité, en plus de la non-adiabacité, l'importance des irréversibilités internes du système, ainsi que la dépendance à l'exergie d'entrée

$$\dot{E}x_e = \dot{q}_D \left( 1 - \frac{T_o}{T_D} \right).$$

**Remarque :** le rendement exergetique interne diffère fondamentalement du rendement exergetique de Grassmann défini comme le rapport de l'exergie de

$$\text{sortie } \dot{E}x_s \text{ sur l'exergie d'entrée } \dot{E}x_e : \eta_{ex \text{ Grassman}} = \frac{\dot{E}x_s}{\dot{E}x_e}.$$



### ► Rendement exergetique total

Ce rendement exergetique considère non seulement le système dans son environnement ambiant, mais aussi dans ces relations avec la source chaude (thermostat à  $T_{SD}$ ) et avec l'utilisation (thermostat à  $T_{SC}$ ).

La même démarche que précédemment conduit à l'aide du bilan entropique total à :

$$\frac{\dot{q}_D}{T_{SD}} + \dot{S}_t = \frac{\dot{q}_C}{T_{SC}} + \frac{\dot{q}_P}{T_o} \quad (19.7)$$

On obtient alors :

$$\dot{q}_D \left( 1 - \frac{T_o}{T_{SD}} \right) + T_o \dot{S}_t = \dot{w} + \dot{q}_C \left( 1 - \frac{T_o}{T_{SC}} \right) \quad (19.8)$$

$$\eta_{ext} = 1 - \frac{T_o \dot{S}_t}{\left( 1 - \frac{T_o}{T_{SD}} \right) \dot{q}_D} = \frac{\dot{w} + \dot{q}_D \left( 1 - \frac{T_o}{T_{SD}} \right)}{\dot{q}_D \left( 1 - \frac{T_o}{T_{SD}} \right)} \quad (19.9)$$

Ce rendement est celui préconisé, puisqu'il fait apparaître l'exergie utile  $\dot{E}x_u$ , sur l'exergie dépensée à la source  $\dot{E}x_D$ . Le lecteur intéressé pourra consulter la référence (Feidt M.).

### c) Aspects financiers

L'analyse économique se substitue pour l'ingénieur à l'analyse physique proposée au paragraphe 19.2.4.b. Il y a lieu alors de chiffrer les coûts d'investissement, de fonctionnement (exploitation et combustibles).

Le tableau 19.3 (PRISME) fournit des ordres de grandeur des coûts de cogénération.

**TABEAU 19.3** ORDRE DE GRANDEUR DES COÛTS DE COGÉNÉRATION (ANNÉE 2000).

Technologie	Coût d'investissement (euros/kW installé)	Coût d'entretien (euroscent/kWh)
Turbine à vapeur	900-2 100	0,15-0,23
Turbine à gaz	400-900	0,48-0,53
Moteur à gaz	245-6 800 (formule 5 783)	0,60-3,25
Moteur diesel	550-2 650	0,44-2,66

La connaissance des coûts unitaires des énergies primaires ( $c_D$  pour  $\dot{q}_D$  ;  $c_{DE}$  pour  $\dot{q}_{DE}$  ;  $c_{DC}$  pour  $\dot{q}_{DC}$ ) permet de passer de l'économie d'énergie à l'économie financière, conformément à :

$$e_f = \frac{c_{DT} \dot{q}_{DT} - c_D \dot{q}_D}{c_{DT} \dot{q}_{DT}} \quad (19.10)$$

$$\text{avec : } c_{DT} = \frac{c_{DE} \dot{q}_{DE} + c_{DC} \dot{q}_{DC}}{\dot{q}_{DE} + \dot{q}_{DC}}.$$

Selon la configuration, la cogénération permet une réduction de la facture d'énergie de 10 à 50 % par rapport au cas de référence (année 2000) ; le gain annuel est calculé comme le gain sur les factures électrique et d'entretien, augmenté des recettes (électricité et autres), diminué du surcoût en combustibles.

Malgré les surcoûts d'investissement, les temps de retour s'étagent entre 2 et 10 ans.

## 19.3 INTÉGRATION DES SYSTÈMES ET PROCÉDÉS ÉNERGÉTIQUES

L'intégration de systèmes énergétiques (ISE) s'impose comme une extension de la démarche proposée au paragraphe 19.2. En effet, l'optimisation d'un système complet se produit pour des conditions qui diffèrent de l'optimum obtenu pour un composant ou élément isolé du système : le comportement d'un élément environné diffère de celui de l'élément isolé, du fait des couplages entre éléments dans le système. La cogénération en est la première illustration ; celle-ci peut être prolongée par la mise en œuvre de cycles combinés.

### 19.3.1 Les cycles combinés

#### a) Historique et principe

##### ► Historique

La première réalisation de cycle ouvert à TAC date de 1939 en Suisse, avec une puissance de turbine à gaz de 4 MW pour un rendement de 17,4 % ; elle a été suivie par une réalisation avec turbine à gaz et récupérateur thermique, de rendement 30 %.

La première réalisation d'un cycle combiné TAC-TV (turbine à combustion-turbine à vapeur) est plus récente (1978) avec une puissance de 120 MW pour un rendement de 46,6 %.

Depuis les années 1990, les niveaux de puissance atteints peuvent aller jusque 1 300 MW, et pour les rendements 38 % pour les turbines à combustion, 60 % pour les cycles combinés.

### ► Principe

Les cycles combinés font intervenir le couplage de plusieurs systèmes mettant en œuvre des cycles différents. L'utilisation qui en est faite apparaît surtout pour les moteurs, mais la notion est aussi valable pour les récepteurs (voir chapitre 15) ; elle sera développée ici pour les moteurs.

Deux configurations essentielles apparaissent alors.

#### *Combinaisons de systèmes indépendants*

Celle-ci résulte du fait que la turbine à vapeur a une mise en route lente, contrairement aux moteurs diesel, à gaz ou aux turbines à combustion.

De ce fait, cette architecture de système permet de répondre quasi-instantanément à une variation importante de charge (fonctionnement à charge partielle) : pic de demande. L'inconvénient est le coût du combustible ; dans la mesure du possible, on ajuste le fonctionnement par rapport aux coûts de combustible (Romary D.).

Cette configuration est utile pour l'alimentation d'auxiliaires.

#### *Combinaison de systèmes dépendants*

Pour les systèmes dépendants, la configuration la plus courante comporte une turbine à combustion avec une turbine à vapeur ; la vapeur peut éventuellement constituer une utilité. Cette même configuration peut exister avec des variantes utilisant des moteurs à combustion. Les moteurs comme la turbine à combustion sont toujours en amont de la turbine à vapeur, compte tenu des plus fortes températures ; certaines configurations peuvent utiliser à l'aval des turbines à fluides organiques, par exemple l'ammoniac.

Des combinaisons telles que celles décrites ci-dessus font appel à un couplage par l'intermédiaire d'une chaudière de récupération. En supposant la chaudière constituée d'un seul échangeur récupérateur d'efficacité  $\varepsilon$ , le rendement thermomécanique du cycle combiné, au sens du premier principe s'écrit :

$$\eta_{cc} = \eta_{TAC} + \varepsilon(1 - \eta_{TAC})\eta_{TV} \quad (19.11)$$

Il apparaît clairement sur la relation (19.11) l'intérêt du cycle combiné, qui permet une augmentation du rendement de conversion thermomécanique, donc une économie en termes de combustibles, et une moindre pollution (donc production de  $\text{CO}_2$ ).

#### *b) Un exemple d'évolution de cycle combiné*

Cet exemple s'appuie sur le travail de (Cenusa V.) ; la thèse correspondante visait à l'optimisation des pressions de production de vapeur dans les chaudières de récupération à un ou deux niveaux de pression pour des cycles combinés sans resurchauffe, mais avec condition de surface de transfert de chaleur totale de chaudière imposée.

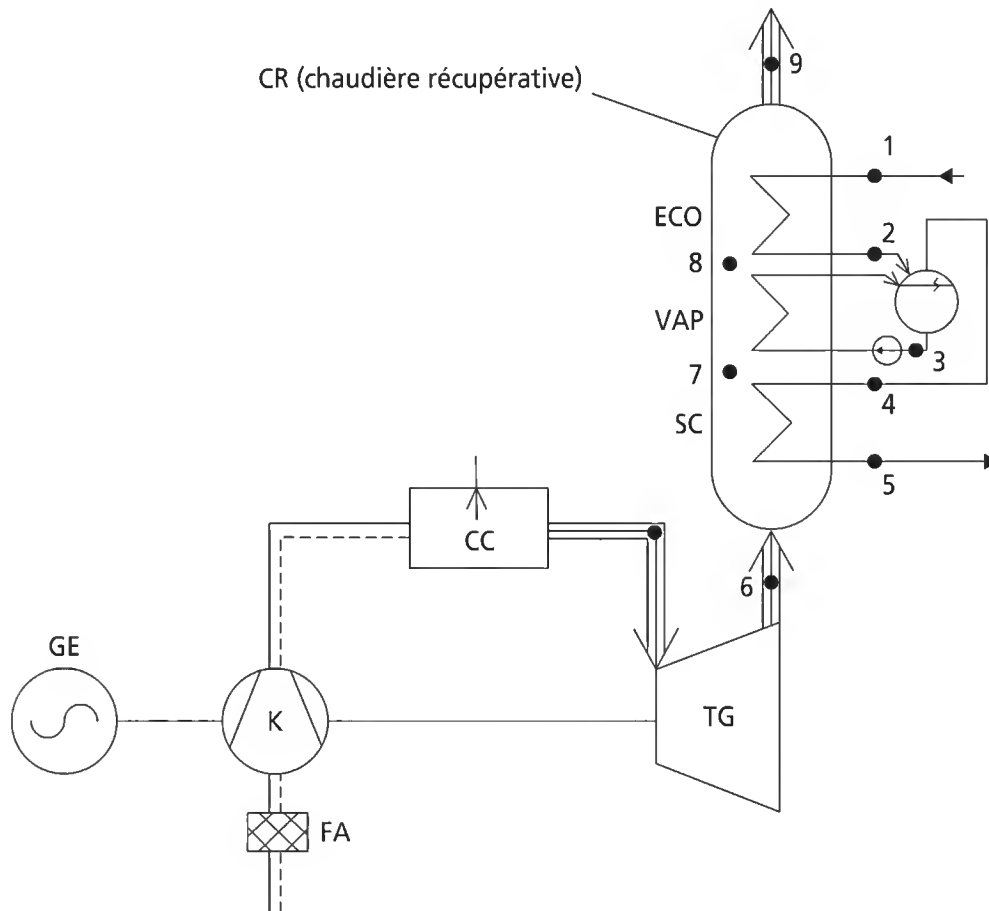
### ► Chaudière de récupération à un niveau de pression

La figure 19.5 présente le schéma de principe du cycle combiné comportant une turbine à gaz à l'amont et une chaudière de récupération à pression pour production

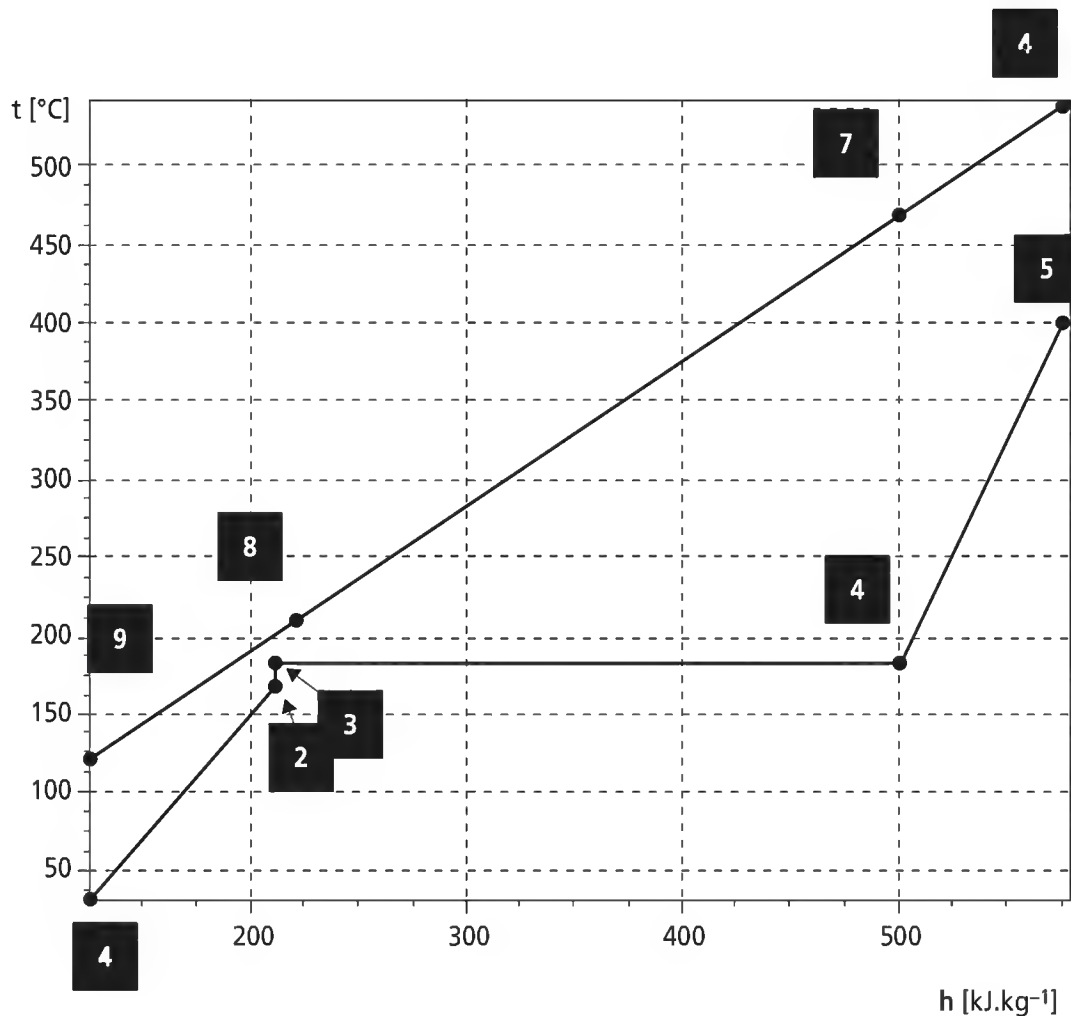
Le diagramme  $t$ , température,  $h$ , enthalpie spécifique de la figure 19.6 représente l'évolution des fluides chaud et froid. Il montre ici le point de pincement (*pinch point*) 3, et le point d'approche 2, dont le rôle clé sera repris au paragraphe 19.3.2.

La première partie permet la simulation du fonctionnement de la chaudière ; l'utilisateur fait alors varier la valeur de la pression de production des vapeurs  $P_{\zeta}$ .

La deuxième partie effectue l'optimisation d'un point de vue exergetique ; le programme détermine la pression  $P_5$  optimale par rapport à la fonction objectif exergie totale de la vapeur produite maximale.



**Figure 19.5** Schéma d'un cycle combiné avec chaudière récupératrice à un niveau de pression.





## CR 1p – L'interface du programme de calcul

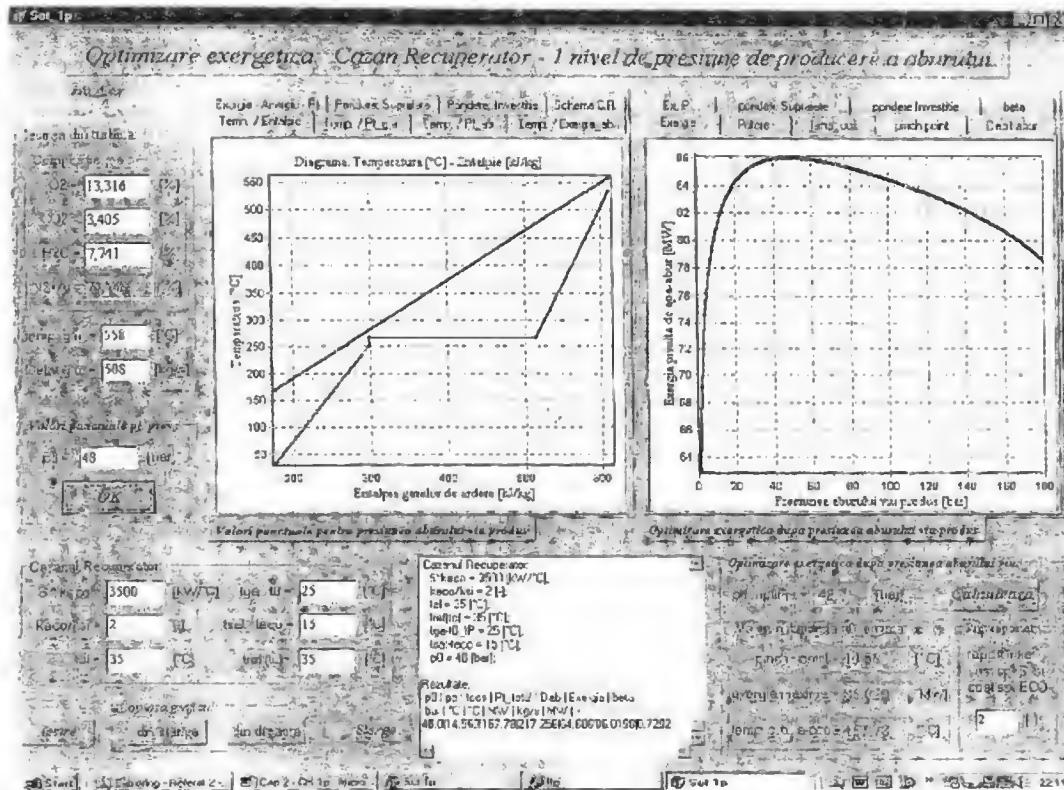


Figure 19.7 Interface du programme.

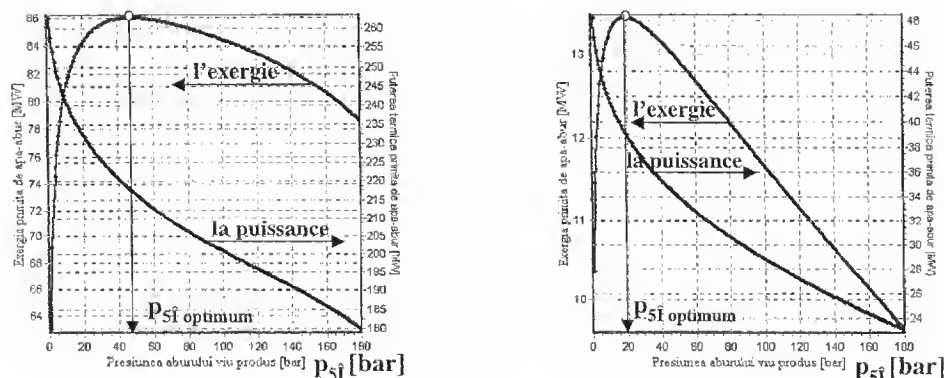


Figure 19.8 Optimisation CR 1p : La variation d'exergie totale [MW] et de la puissance thermique totale [MW] reçue par eau/vapeur fonction de pression des vapeurs à la sortie de CR [bar]

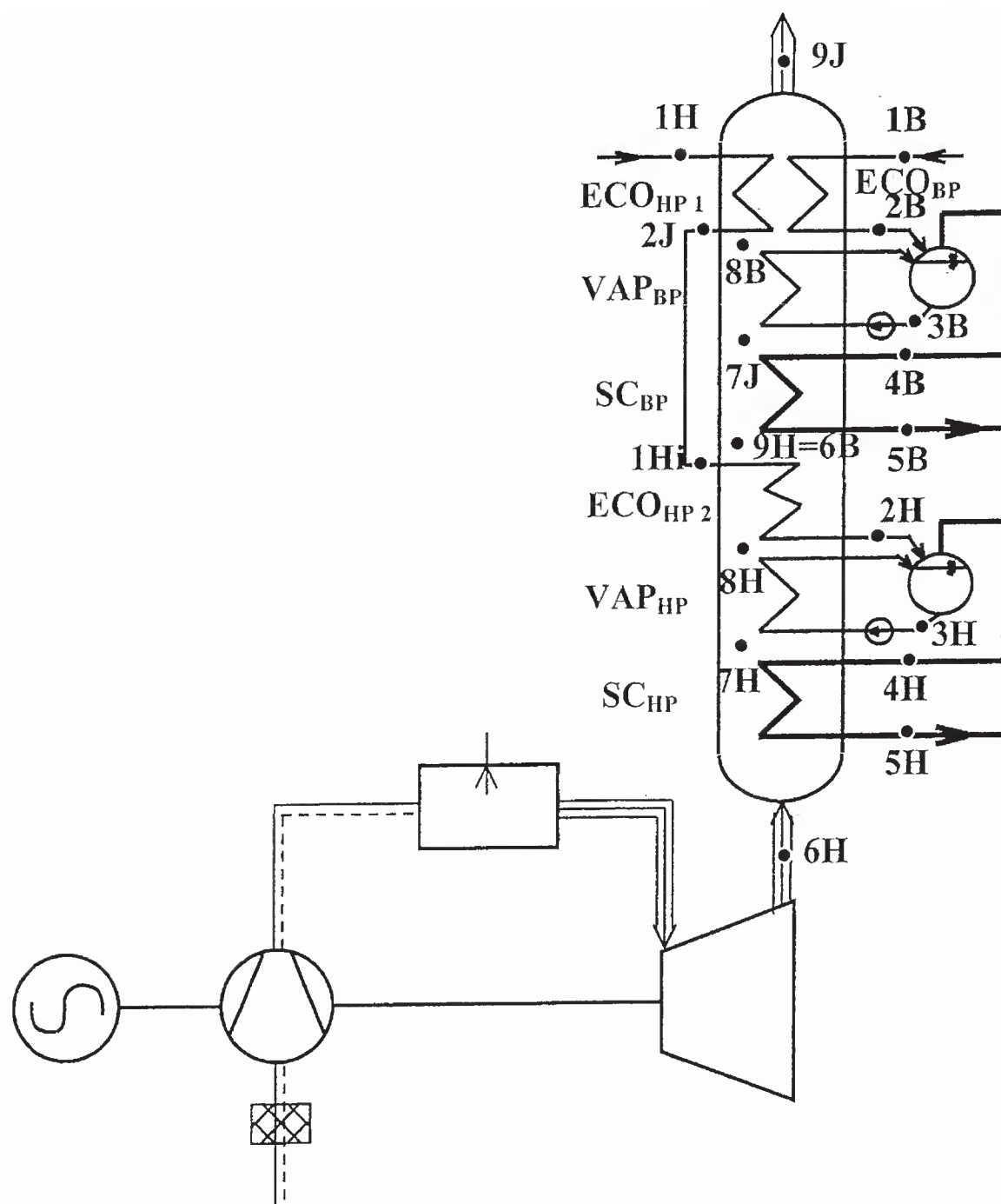


Figure 19.9 Schéma de l'installation à deux niveaux de pression.

échangeurs comme précédemment, mais aussi un circuit haute pression qui rajoute 4 échangeurs : 2 économiseurs ECO HP1, ECO HP2 ; un bouilleur VAP HP ; un surchauffeur SC HP.

La figure 19.10 représente la nouvelle configuration du diagramme température  $t$ , enthalpie  $h$  pour cette configuration. Il apparaît ainsi 2 points de pincement 3B, 3H, et deux points d'approche 2B, 2H.

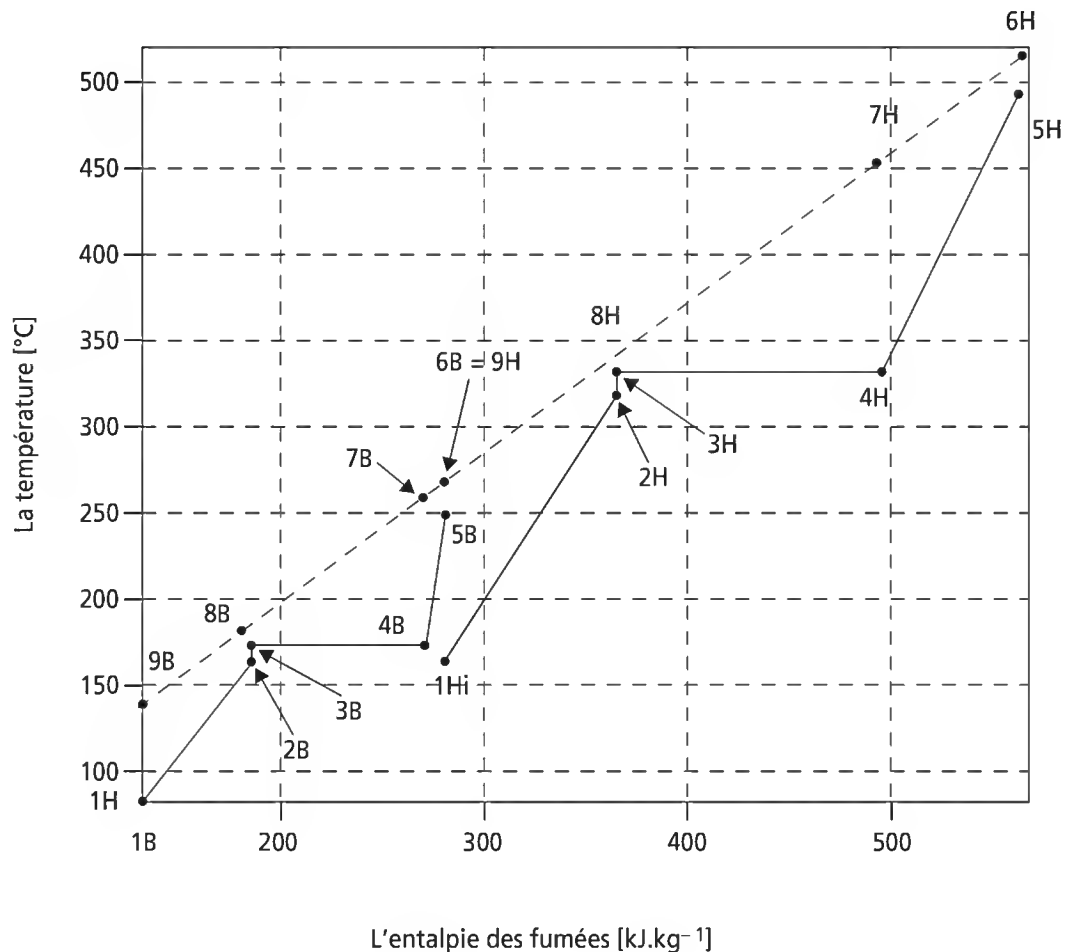


Figure 19.10

L'apparition de deux variables d'optimisation  $P_{5I}$  et  $P_{5S}$  (les deux pressions de production de vapeur) font que le programme se présente cette fois en trois parties.

La première partie permet d'effectuer une simulation pour un couple de pression  $P_{5I}$  et  $P_{5S}$ .

La seconde partie effectue l'optimisation en fonction de la pression  $P_{5I}$  à  $P_{5S}$  imposée.

La troisième partie achève l'optimisation exergetique sur les couples de pression ( $P_{5I}$  optimum,  $P_{5S}$ ) pour mettre en évidence le couple de pression ( $P_{5I}$  optimum,  $P_{5S}$  optimum) correspondant à l'optimum-optimorum de l'exergie totale transmise à la vapeur.

Le tableau 19.4 résume les résultats obtenus pour les deux configurations de chaudière ; il apparaît clairement sur ce tableau l'intérêt d'une chaudière à deux niveaux de pression en termes de puissance récupérée.



TABLEAU 19.4 COMPARAISON ENTRE CR 1P ET CR 2P

	u.m.	PG9231 (EC) – heavy –duty		LM6000 Sprint - aérodérivative	
		CR 1p	CR 2p	CR 1p	CR 2p
$k_{ECO} * S_{total}$ (paramètre)	k/°C	3 500	5 720	650	975
Pressions optimales	bar	48	(7 ; 137)	20	(5 ; 66)
Pinch-point	°C	Comparable avec les valeurs usuelles pour CR 1p et 2p ; ~14 °C			
L'exergie	MW	86,02	98,73	13,44	15,8
	%	Référence	14,77	Référence	17,6
$S_{total}$ (surface totale)	%	Référence	57,14	Référence	50

### ► Autres évolutions possibles

#### *Turbines à gaz et cycles combinés*

L'optimisation des turbines à combustion et des cycles combinés n'est pas achevée. Un article récent (Ferrara P.L.) montre qu'en termes de rendement électrique les cycles à vapeur continuent de progresser faiblement et seront rejoints à terme par les turbines à combustion (figure 19.11).

#### *Diversification des combustibles*

Si le gaz est le combustible dominant actuellement, des variantes ont été proposées pour compléter au fuel, au charbon, voire avec post-combustion ; l'avènement

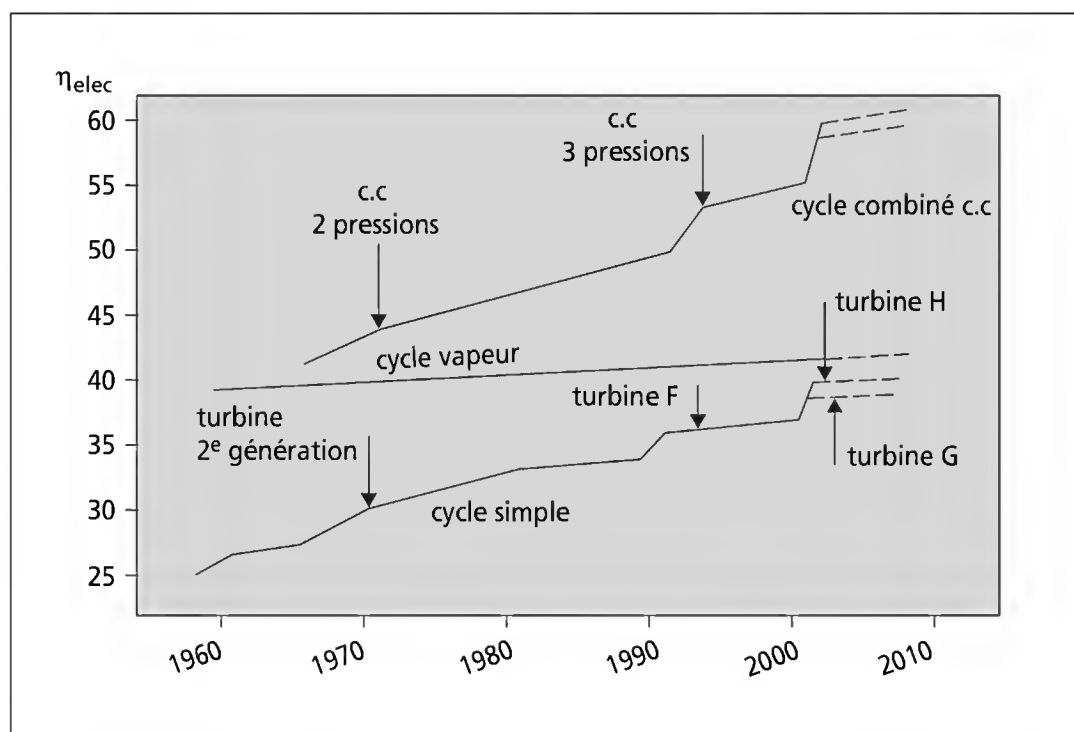


Figure 19.11 Évolution du rendement de turbine à gaz stationnaire et du cycle combiné associé (selon Ferrara P.L.).

de biocombustibles et de biocarburants devrait renforcer cette tendance, de même que la valorisation des déchets (voir ci-après).

### *Diversification des systèmes*

La turbosuralimentation existe depuis longtemps sous la forme de la turbosuralimentation des moteurs, d'un point de vue industriel les gros moteurs diesel. Cette architecture des systèmes moteurs induit une augmentation de la pression à l'échappement en même temps que de la charge (la régulation se fait par bypassage).

**Remarque :** la turbosuralimentation peut être étagée (2 étages) avec refroidissement intermédiaire ; ceci est surtout utile en turbopropulsion.

Parmi les systèmes émergents, on citera les combinaisons moteurs thermiques-piles à combustibles : cette configuration est utilisée sur les véhicules hybrides et les turbines à combustion-piles à combustibles : cette configuration fait l'objet d'études (Radulescu M.).

Pour conclure par rapport aux cycles combinés, on notera l'influence forte des transitoires de fonctionnement qui a des répercussions sur le choix de conception et sur l'exploitation de tels systèmes (Monteil J.-M.).

## 19.3.2 L'intégration thermique

### *a) Couplage d'échangeurs de chaleur*

Dans de nombreux systèmes et procédés énergétiques, on utilise des chaînes d'échangeur qui font intervenir des fluides chauds (indice  $C$ ) et des fluides froids (indice  $F$ ). L'optimisation de la configuration du réseau d'échangeurs n'est pas chose aisée ; en effet, le nombre de configurations mathématiquement possible  $N$  est vite très grand.

Par exemple, si on suppose deux fluides chauds ( $N_C = 2$ ) et deux fluides froids ( $N_F = 2$ ), sachant que le nombre  $N$  vaut :

$$N = (N_C \cdot N_F) !$$

On voit que 24 combinaisons sont possibles. Heureusement toutes ne sont pas économiquement et surtout physiquement acceptables.

Dans ce qui suit, on examine la méthode du pincement qui est la plus utilisée. Le développement proposé suppose les températures d'entrée  $T_{ie}$ , les débits massiques  $\dot{m}_i$ , les chaleurs spécifiques massiques  $C_{p_i}$  connues (et constantes). Par ailleurs, les pertes de pression sont ignorées et la configuration retenue est contrecourant.

### *b) Couplage de deux fluides*

On considère ici l'intégration d'un écoulement de fluide chaud  $C$ , avec l'écoulement d'un fluide froid  $F$ . Pour cela, en régime dynamique stationnaire, on considère le

diagramme température  $T$ , accroissement des flux d'enthalpie  $\Delta \dot{H}$ , valable aussi bien en chaleur sensible qu'en chaleur latente.

Ainsi, la figure (19.12.a) montre le cas d'un fluide chaud et d'un fluide froid découplés, avec en conséquence une dépense chaude  $\dot{q}_{CD}$  et une dépense froide  $\dot{q}_{FD}$  maximales telles que :

$$\dot{q}_{CD} = \dot{m}_C \Delta h_C = \Delta \dot{H}_C$$

$$\dot{q}_{FD} = \dot{m}_F \Delta h_F = \Delta \dot{H}_F$$

Ces dépenses maximales correspondent à un coût de fonctionnement maximal et un coût d'investissement minimum. Si on remarque par contre que les températures des deux fluides sont dans l'ordre croissant suivant :  $T_{cs} < T_{Fe} < T_{Fs} < T_{ce}$ , on voit que des couplages sont possibles conformément aux figures 19.12.b et c.

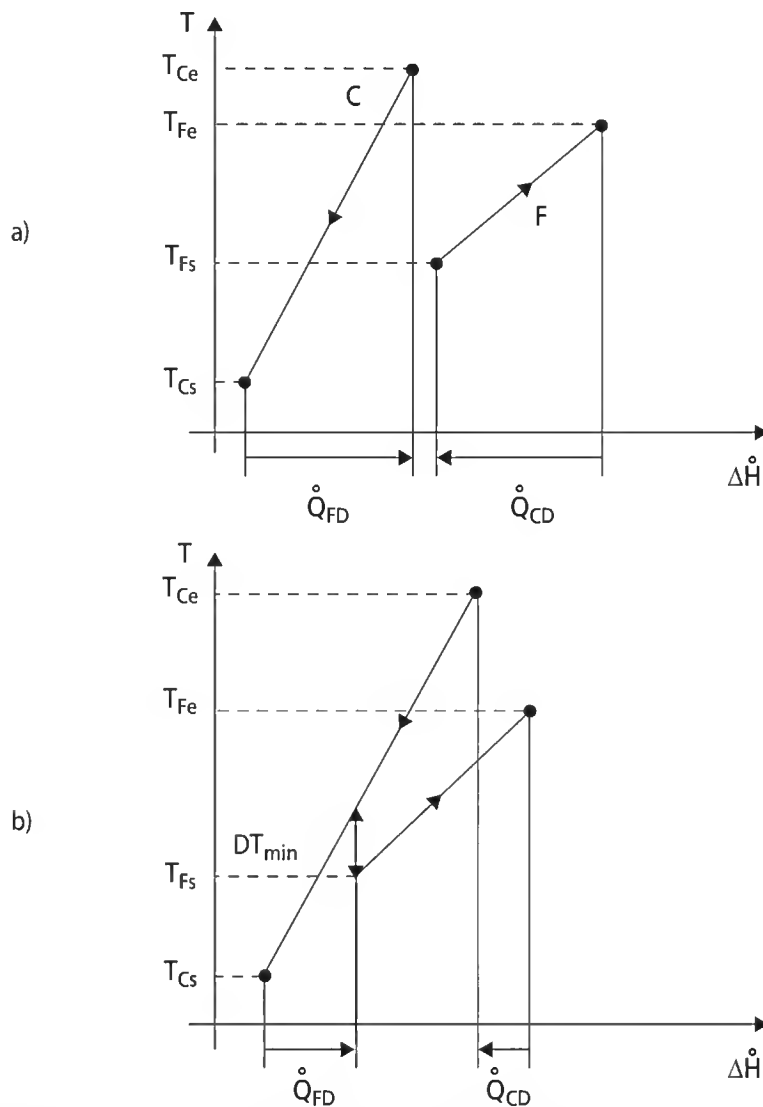


Figure 19.12 Cas de l'intégration du transfert de chaleur sur deux fluides

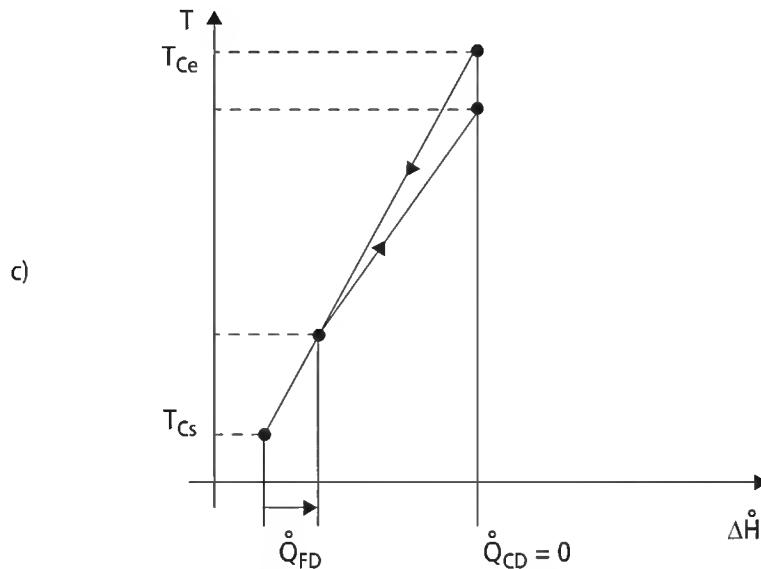


Figure 19.12 Cas de l'intégration du transfert de chaleur sur deux fluides (suite).

En introduisant un échangeur récupérateur  $R$  entre  $T_{Fe}$  et  $T_{ce}$ , on peut économiser  $\dot{q}_R$ , qui dépend du  $\Delta T_{\min}$  consenti entre les deux fluides (pincement simple d'échangeur).

Ce pincement est relié à la surface de transfert  $A_R$ . On remarquera que si  $\Delta T_{\min}$  diminue,  $\dot{q}_{CD}$  et  $\dot{q}_{FD}$  diminuent (coût de fonctionnement), alors que  $\dot{q}_R$  et  $A_R$  augmentent (coût d'investissement). Il existe donc un coût global optimum, correspondant à  $\Delta T_{\min}$  optimum.

La figure 19.12.c représente le cas extrême où  $\Delta T_{\min}$  s'annule.

$\Delta T_{\min}$  est dépendante des débits calorifiques  $\dot{m}C_p = \dot{C}$  et (ou) des changements de phase.

Sans changement de phase :

Si  $\dot{C}_c > \dot{C}_F$ ,  $\Delta T_{\min}$  se situe vers  $T_{ce}$  et  $T_{Fs}$

Si  $\dot{C}_c < \dot{C}_F$ ,  $\Delta T_{\min}$  se situe vers  $T_{Fe}$  et  $T_{cs}$

Si  $\dot{C}_c = \dot{C}_F$ , il n'y a pas de point de pincement.

Avec au moins un changement de phase, il existe un point de pincement qui peut apparaître en un point quelconque.

### c) Couplage de plus de deux fluides

#### ► Courbe composée

Le raisonnement du paragraphe précédent est étendu à l'ensemble des fluides chauds, puis des fluides froids pour construire les courbes composées respectivement chaude et froide. Conformément au tableau 19.5 relatif à deux fluides chauds

et deux fluides froids qui est un préalable, on classe les températures et pour chaque domaine on détermine la différence des flux enthalpiques conformément à :

$$\Delta H_i = \sum_j \dot{C}_j \Delta T_i$$

TABLEAU 19.5

Fluide		T entrée	T sortie	Débit calorifique
Chaud	C1	$T_{c1e}$	$T_{c1s}$	$\dot{C}_{c1}$
	C2	$T_{c2e}$	$T_{c2s}$	$\dot{C}_{c2}$
Froid	F1	$T_{f1e}$	$T_{f1s}$	$\dot{C}_{f1}$
	F2	$T_{f2e}$	$T_{f2s}$	$\dot{C}_{f2}$

Il apparaît alors (figure 19.13) un pincement composé pour l'ensemble.

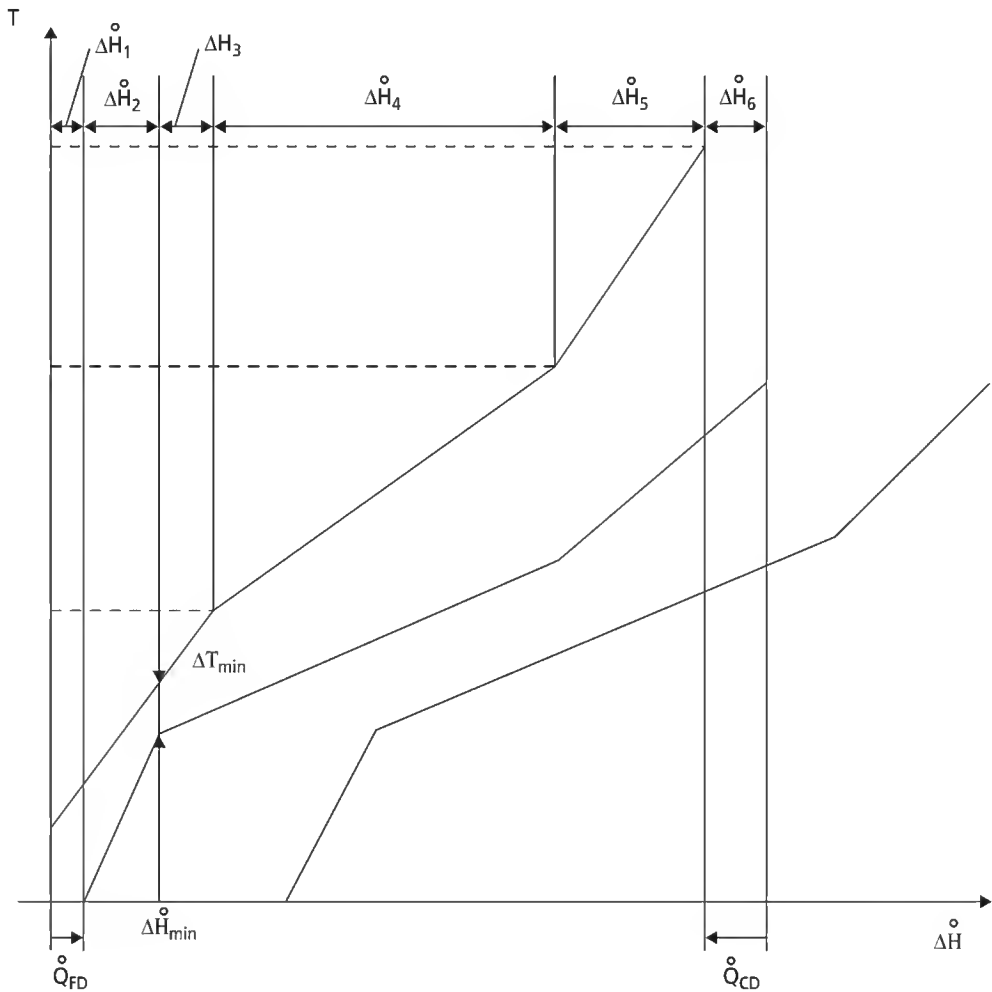


Figure 19.13 Courbe composée (exemple).

On voit sur cette figure que si on diminue  $\Delta T_{\min}$  (paramètre), on diminue les dépenses énergétiques (translation de la courbe composée froide vers la gauche).

On notera par ailleurs que le point représenté par  $T_{Cpin}, T_{Fpin}, \Delta H_{pin}^o$  représente un point d'équilibre du système ; au-dessus de ce point apparaît une dépense calorifique chaude (déficit) ; au dessous de ce point on enregistre un excès de chaleur (dépense calorifique froide).

**Remarque :** la démarche graphique précédente peut donner lieu à algorithme.

#### ► Courbe cumulée

Cette courbe fournit le surplus ou le déficit énergétique  $\Delta \dot{Q}$  à chaque température,  $T_C + \frac{\Delta T_{\min}}{2}$  ou  $T_F - \frac{\Delta T_{\min}}{2}$ . Le tracé graphique est obtenu à partir des courbes composées et du point de pincement qui est à flux nul (figure 19.14).

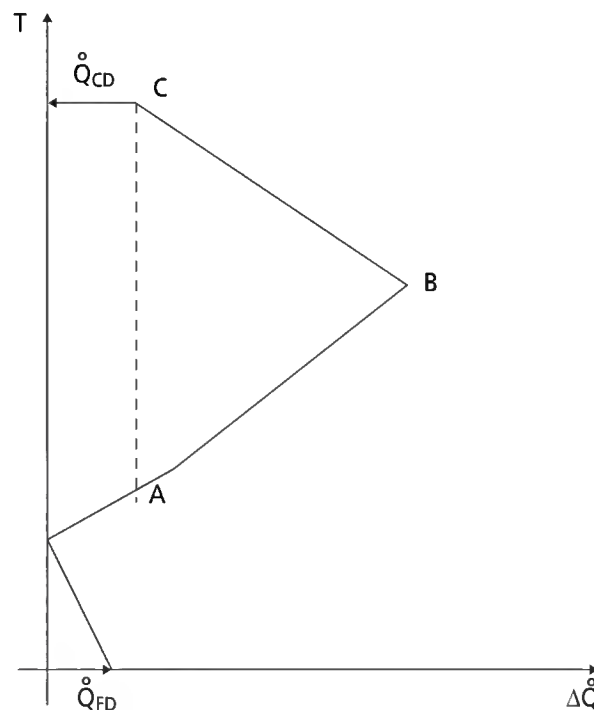


Figure 19.14 Courbe cumulée.

**Remarque :** la surface sous le triangle ABC représente les échanges entre fluides chauds et froids.

La température minimale de l'apport de chaleur nécessaire apparaît au point A

$$\left( T_A + \frac{\Delta T_{\min}}{2} \right).$$

► Conception optimale de l'ensemble d'échangeurs

*Nombre minimum d'échangeurs*

Le nombre minimum d'échangeurs requis  $N_{\min}$  est donné selon la littérature par :

$$N_{\min} = N_C + N_F + N_{CD} + N_{FD} - 1$$

$N_C, N_F$ , nombre de fluides respectivement chauds et froids.

$N_{CD}, N_{FD}$ , nombre de dépenses énergétiques chaudes et froides disponibles.

*Calcul approché de la surface totale de transfert*

Cette surface est une image du coût d'investissement. L'utilisation de la méthode DTLM (chapitre 13), en négligeant les résistances de conduction, conduit à :

$$A_T = \sum_j \frac{1}{\Delta T_{\ln j}} \left[ \sum_i^{\text{chaud}} \frac{\dot{q}_{ji}}{h_i} + \sum_k^{\text{froid}} \frac{\dot{q}_{jk}}{h_k} \right]$$

Le résultat constitue une première approche qui ne nécessite pas la connaissance détaillée du réseau d'échangeurs.

Les fonctions objectifs standards pour les réseaux d'échangeur de chaleur sont le maximum de récupération d'énergie et le minimum de coût global du réseau (le plus souvent sur base annualisée).

*d) Des questions ouvertes*

Les développements du paragraphe (19.3.2. a, b et c) supposaient les débits  $\dot{m}_i$ , et les températures imposés ; hors, dans la conception des systèmes, ce sont souvent des variables et non des paramètres.

De plus, les échangeurs interagissent avec d'autres composants, par exemple pour la production de force (systèmes chaleur-force) ou avec des machines à froid-pompe à chaleur, voire en génie chimique avec des réacteurs ou colonnes à distiller. Ceci sera précisé dans le paragraphe (19.3.3).

Quoiqu'il en soit, il est apparu que l'optimisation thermodynamique d'un réseau d'échangeurs passe par la minimisation des dégradations d'énergie thermique par gradient commandant les transferts de chaleur. Le passage à la limite continue est très certainement en relation étroite avec l'équirépartition des dissipations (y inclus les dissipations mécaniques :  $\Delta P$ ).

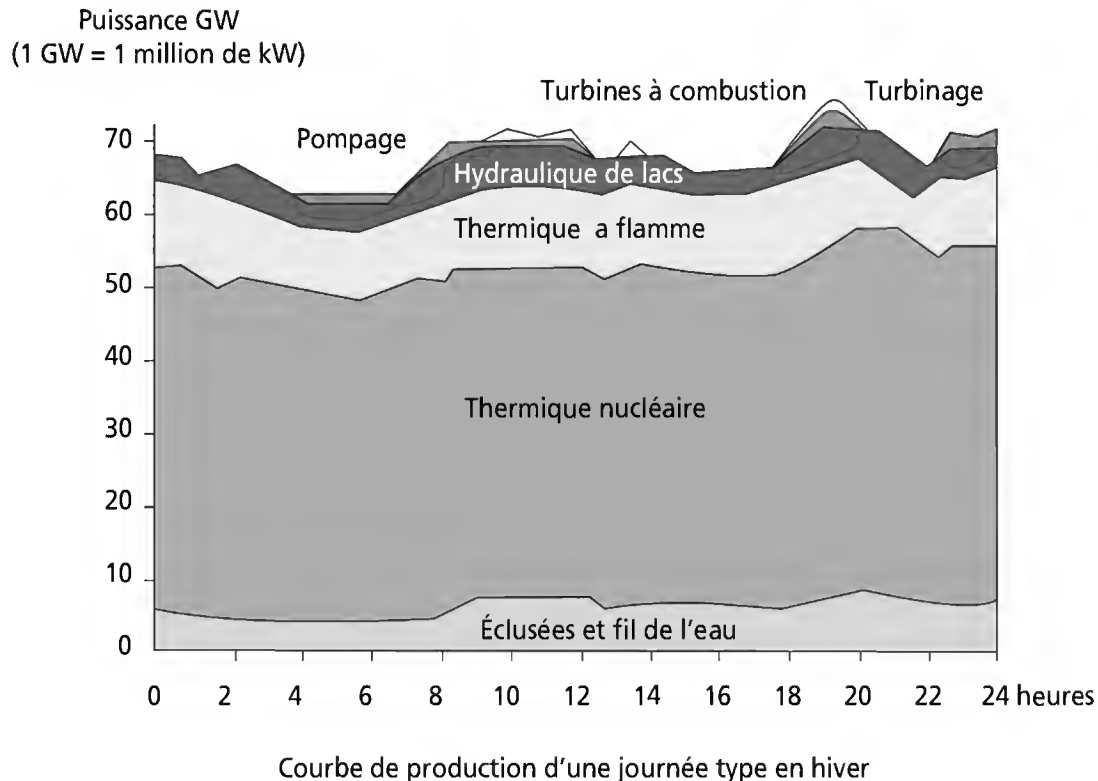
### 19.3.3 Autres intégrations

*a) Des extensions à l'intégration thermique*

► La production de puissance électrique

Aux réseaux de chaleur (chaud, froid), il y a lieu de rajouter les réseaux d'énergie électrique ; on sait le rôle déterminant que joue ce réseau dans le système électrique centralisé français.

La demande étant fluctuante, elle nécessite une adaptation permanente. La figure 19.15 représente les diverses contributions des macrocomposants du système pour une journée d'hiver en fonction du temps (intégration instationnaire).



**Figure 19.15** Courbe de production électrique pour une journée d'hiver (selon EDF).

### ► Machines étagées ou en cascade

Des exemples de ce type ont été rencontrés au cours de cet ouvrage tant pour les moteurs (chapitres 16 et 17) que pour les machines à cycle inverse (chapitre 15).

### ► Intégration thermomécanique

#### *Machine à froid-pompe à chaleur*

L'adjonction d'une machine à froid ou pompe à chaleur dans un ensemble d'échangeurs doit se faire de telle sorte qu'elle entoure le point de pincement. Exemple : Pour une PAC (pompe à chaleur), le transfert de chaleur doit se faire d'un fluide chaud sous le pincement vers un fluide froid au-dessus du pincement.

#### *Machine motrice*

Une machine motrice qui met en jeu un cycle thermomécanique doit être telle que le cycle est placé totalement au-dessus ou au-dessous du point de pincement, mais pas l'encadrer.

Si  $T_{Cpin} > T_{Se}$ , température d'entrée du système thermomécanique, le système peut réduire l'exergie rejetée.



Si  $T_{Fpin} > T_{Ss}$ , température de sortie du système thermomécanique,  $\dot{q}_{Ss}$  le flux de chaleur en sortie du système peut être valorisé dans la chaîne d'échangeurs de chaleur.

La figure 19.16 présente un exemple simple d'intégration de système comportant échangeurs, moteur et machine à cycle inverse.

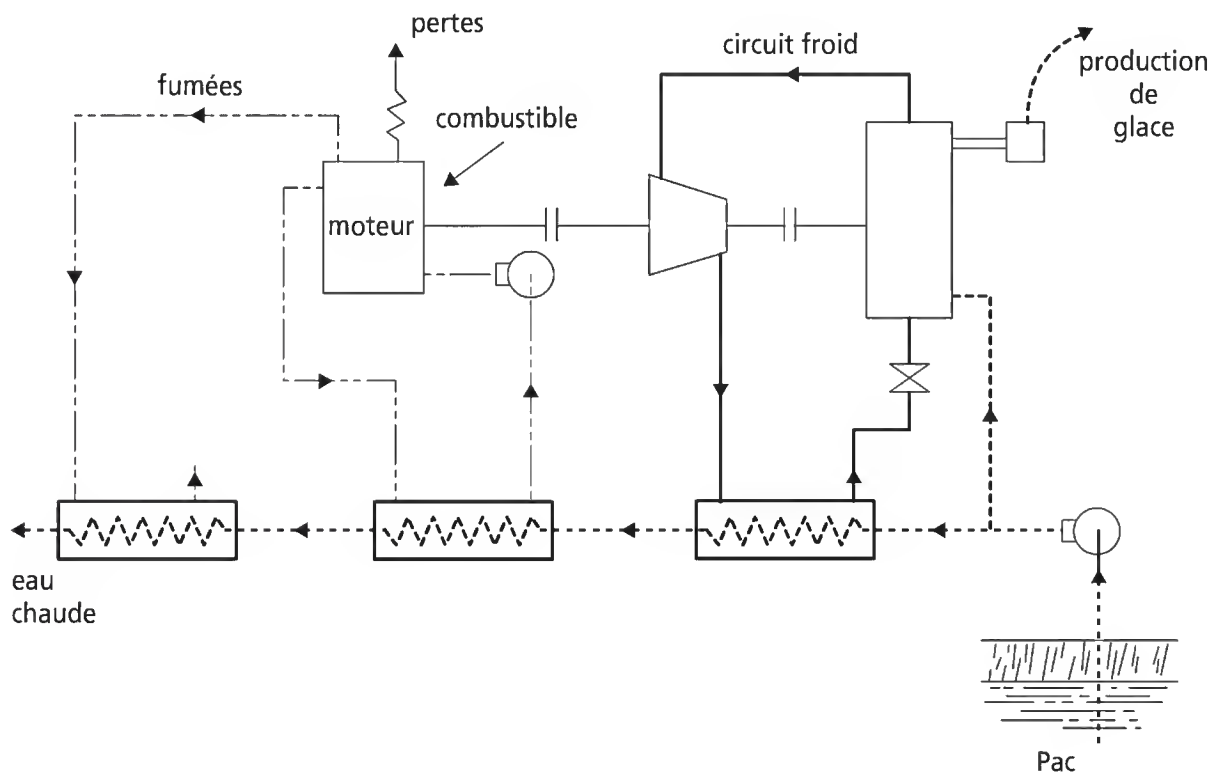


Figure 19.16

D'autres exemples sont possibles dans le domaine par exemple de l'énergie solaire : systèmes solaires pour l'habitat.

### ► Intégration matière

Cette intégration qui est apparue dans l'industrie pétrochimique avec la gestion de l'hydrogène se développera à l'avenir ; on pense par exemple à la gestion de l'eau dans les systèmes (en relation avec la CMV).

Dans l'industrie chimique par ailleurs, le traitement de matières fait appel à des colonnes à distiller qui sont le siège de dégradations d'énergie importantes ; une colonne est à placer au-dessus ou au-dessous du point de pincement, car elle reçoit  $\dot{q}_E$  au bouilleur et cède  $\dot{q}_{cond}$  au condenseur. Ces chaleurs dépendent de la pression de fonctionnement ; on peut donc par augmentation ou diminution de la pression satisfaire à la condition par rapport au pincement.

### ► Généralisation

Toute forme d'énergie faisant intervenir deux variables conjuguées extensive et intensive, on conçoit que la méthode du pincement n'est pas réservée à la chaleur, mais généralisable à toute intensité :  $\Delta V_{\min}$  pour l'énergie électrique,  $\Delta \mu_{\min}$  pour l'énergie chimique,  $\Delta P_{\min}$  pour l'énergie mécanique.

### b) Intégration fonctionnelle

Cette intégration fait intervenir des fonctions (procédés) plus que des composants. Deux exemples vont être rapportés succinctement ci-après pour illustrer cette intégration.

#### ► Gazéification intégrée à un cycle combiné

La gazéification intégrée à un cycle combiné (IGCC en anglais) est une configuration de centrale thermique qui associe l'oxydation partielle de combustibles divers (charbons, résidus pétroliers, biomasse) aux turbines à combustion. Il existe une grande diversité de procédés de gazéification et de cycles, ce qui conduit à des rendements élevés et de bonnes performances environnementales.

Ces dernières années, des unités de démonstration ont été construites et testées : Puertollano (charbon et coke de pétrole), Värnamo (biomasse). La nouvelle tendance est à la production d'électricité, mais aussi de vapeur et d'hydrogène pour des sites industriels ; la commercialisation suppose encore une réduction des coûts.

**Remarque :** la gazéification est aussi une fonction importante pour certaines piles à combustible avec reformage de méthane.

#### ► Récupération des déchets et énergie

Ce type d'installation est maintenant très développé. La collecte des déchets passe par une première phase de triage avec recyclage de plusieurs classes de déchets (métaux, cartons, papiers, verre, déchets encombrants, plastiques, végétaux).

Les végétaux peuvent donner lieu à utilisation comme engrais (humus fertilisant) mais aussi par fermentation à production de biogaz (comme les boues).

La figure 19.17 représente le schéma d'une usine de traitement de déchets faisant apparaître cinq fonctions, dont la fonction récupération d'énergie par production d'électricité. Certaines unités alimentent en parallèle des réseaux de chaleur (cogénération).

On note de plus sur cette figure la fonction traitement des fumées et traitement des rejets non banaux sur lesquelles nous allons revenir ci-après.

## 19.4 INTÉGRATION ET ENVIRONNEMENT

### 19.4.1 Intégration et analyse du cycle de vie

Lorsque l'on considère le devenir des systèmes et des produits, l'intégration de spatiale devient temporelle ; il en est fondamentalement ainsi lorsqu'on veut tenir

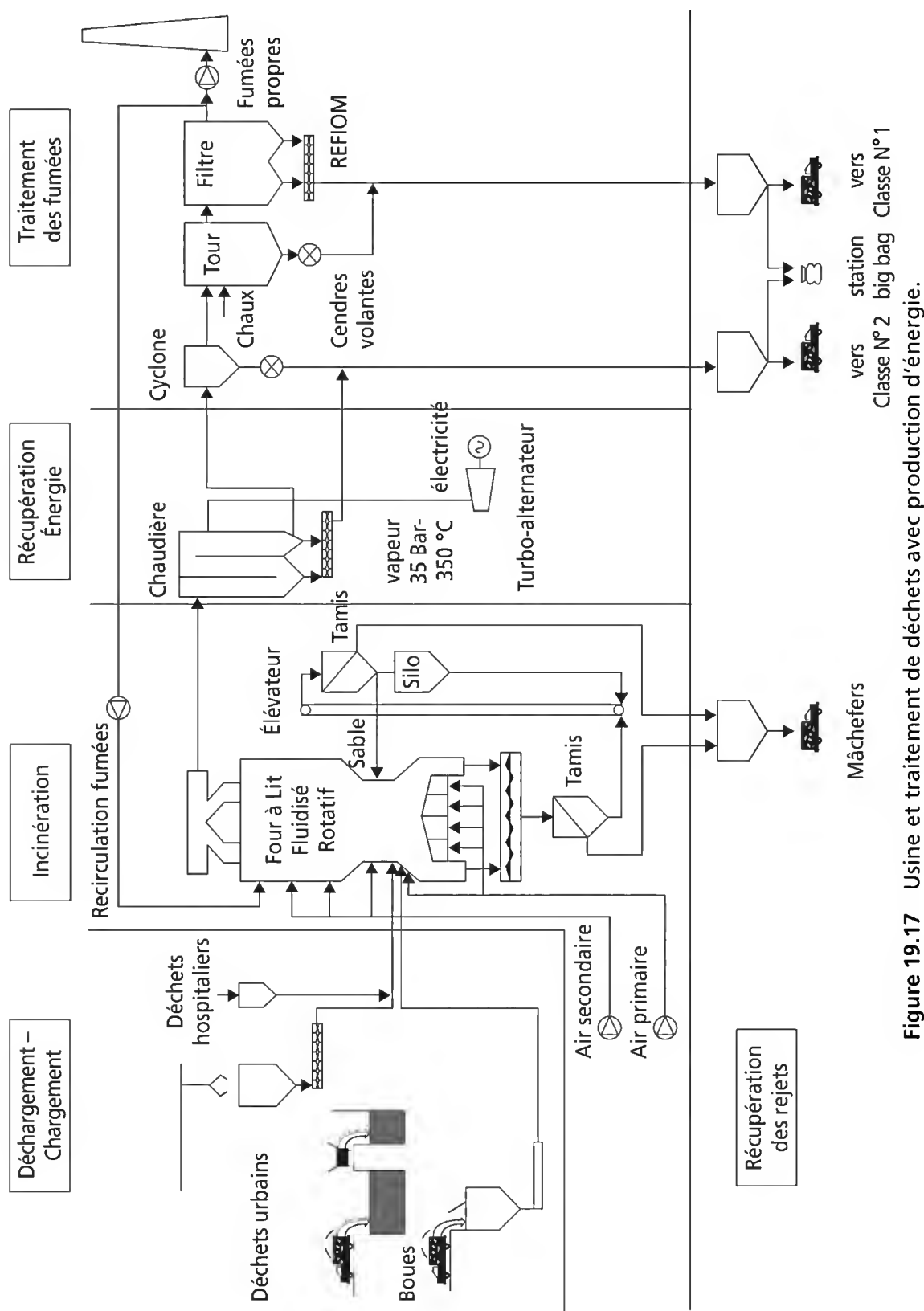


Figure 19.17 Usine et traitement de déchets avec production d'énergie.

compte des contraintes d'environnement. Cette nouvelle approche se veut plus respectueuse du monde qui nous entoure et fait appel à ce qui est dénommé le développement durable DD ([www.ledeveloppementdurable.fr](http://www.ledeveloppementdurable.fr)). L'analyse du cycle de vie ACV est alors un outil récemment développé et très utile (Jollier O.).

### a) Cogénération et ACV

Nous considérons ici une suite de cogénération chaude produisant  $\dot{w}$  et  $\dot{q}_c$  (19.2.4.a). Regardons dans quelles conditions la cogénération est favorable d'un point de vue environnemental.

Nous allons étudier de façon comparative les émissions de  $\text{CO}_2$  de l'unité de cogénération par rapport à la configuration de référence (chaudière et centrale électrique : figure 19.4) et nous ajouterons l'aspect économique en parallèle.

On sait que les émissions de  $\text{CO}_2$ ,  $\dot{M}_{\text{CO}_2}$  dépendent de la quantité de  $\text{CO}_2$  émise par unité d'énergie utilisée (généralement en  $\text{kgCO}_2/\text{kWh}$ )  $m_{\text{co}_2e}$  ; ainsi, pour un combustible donné  $c$  nous avons  $m_{\text{co}_2c}$ , et pour l'énergie électrique  $m_{\text{co}_2el}$ . Pour la France,  $m_{\text{co}_2el}$  vaut 0,09 ; le gaz naturel est tel que  $m_{\text{CO}_2gn} = 0,200$ .

**Remarque :**  $m_{\text{co}_2el}$  provient de l'ACV du kwh, qui résulte d'un MIX électrique ; le tableau 19.6 fait apparaître ce MIX pour la France. On voit qu'il diffère sensiblement de celui d'EDF, et fondamentalement de celui de l'UE.

TABLEAU 19.6 ACV DU KWH (MIX ÉLECTRIQUE).

MIX électricité (en %)	kWh EDF 1997 source EDF DEPT	kWh France 1997 source EDF DEPT	kWh UE 15 1996 source AIE 96
Nucléaire	83,0	78,2	36,2
Hydraulique	13,4	14,0	12,4
Charbon/lignite	2,8	4,4	31,1
Fuel	0,35	1,2	8,5
Gaz naturel	0,05	1,0	11,9
GHF + GC	0,4	0,6	/
Divers	0	0,6	/

GHF = Gaz de Hauts Fourneaux

GC = Gaz de Cokerie

Divers = Produits pétroliers, coke de pétrole, OM....

Il vient alors pour les émissions de  $\text{CO}_2$  :

$$\dot{M}_{\text{CO}_2 \text{ cogé}} = \dot{q}_D \cdot m_{\text{co}_2c} \quad (19.12)$$

$$\dot{M}_{CO_2,ref} = \dot{w} \cdot m_{CO_2,el} + \dot{q}_c m_{CO_2,c} \quad (19.13)$$

en supposant le même combustible en chaudière et en cogénération (par exemple le gaz naturel).

Par combinaison de (19.1, 19.12, 19.13), on trouve :

$$\dot{M}_{CO_2, cogé} = \dot{M}_{CO_2,ref} + \left( 1 - \frac{\eta_I - \eta_e}{\eta_q} - \eta_e \frac{m_{CO_2,el}}{m_{CO_2,c}} \right) m_{CO_2,c} \frac{\dot{q}_c}{\eta_I - \eta_e} \quad (19.14)$$

De la même façon, pour les coûts en combustible, on a :

$$\dot{C}_{coge} = v_c \cdot \dot{q}_D \quad (19.15)$$

$$\dot{C}_{ref} = v_{el} \cdot \dot{w} + v_c \cdot \dot{q}_c \quad (19.16)$$

$v_c, v_{el}$ , coût du combustible de l'électricité par unité d'énergie.

**Remarque :** les coûts en combustible sont ici des coûts par unité de temps.

Par combinaison de (19.1, 19.15, 19.16), on trouve :

$$\dot{C}_{coge} = \dot{C}_{ref} + \left( 1 - \frac{\eta_I - \eta_e}{\eta_q} - \eta_e \frac{v_{el}}{v_c} \right) v_c \frac{\dot{q}_c}{\eta_I - \eta_e} \quad (19.17)$$

Il est aisé alors de déduire des relations (19.14) et (19.17) les conditions pour que la cogénération utilisant un combustible c soit pertinente pour l'environnement ou économiquement :

$$\eta_e > \left( 1 - \frac{\eta_I}{\eta_q} \right) / \left( \frac{m_{CO_2,el}}{m_{CO_2,c}} - \frac{1}{\eta_q} \right) \quad (19.18)$$

$$\eta_e > \left( 1 - \frac{\eta_I}{\eta_q} \right) / \left( \frac{v_{el}}{v_c} - \frac{1}{\eta_q} \right) \quad (19.19)$$

**Remarque :** il est possible de comparer des installations avec des combustibles différents ; il faut alors re-spécifier la référence en ajoutant le combustible de référence.

L'analyse de cycle de vie peut être complétée, du point de vue environnemental, en rajoutant d'autres sources de pollution (voir chapitre 11).

### b) Hydrogène et ACV

Il s'agit ici de comparer deux modes de production du vecteur énergétique  $H_2$ , hydrogène. En effet,  $H_2$  est un vecteur énergétique pour une conversion efficace en électricité dans les piles à combustible (paragraphe 18.4.3) sans émissions polluantes excepté de la vapeur d'eau. Mais il faut produire  $H_2$  à partir d'une source primaire

de telle sorte que l'impact total sur l'environnement soit moindre que les autres vecteurs énergétiques, par exemple les carburants fossiles.

L'hydrogène peut être produit à partir de ces mêmes combustibles, de la biomasse ou de l'eau ; dans l'immédiat, deux méthodes sont envisageables à l'échelle industrielle pour produire  $H_2$  : la conversion thermochimique de l'eau assistée par l'énergie nucléaire (N), le reformage à la vapeur du gaz naturel (GN) avec stockage du  $CO_2$ .

On rapporte ci-après succinctement de leur impacts environnementaux par ACV pour cinq indicateurs : GWP, *Global Warming Potential* ; HTP, *Human Toxicity Potential* ; AP, *Acidification Potential* ; EP, *Entrophication Potential* ; R, *Radiation*.

Les résultats sont rapportés dans le tableau 19.7. L'impact des radiations résulte de l'éco-indicateur (99). Le tableau donne l'impact pour la production d'un térajoule d'hydrogène (sur la base du PCS ;  $H_2$  produit à 37 bars).

TABLEAU 19.7

Index d'impact	Unité	N	NG
GWP	kgCO <sub>2</sub> équiv.	2,46 10 <sup>3</sup>	1,3 10 <sup>4</sup>
HTP	kgDB équiv.	3,48 10 <sup>3</sup>	10 <sup>3</sup>
AP	kgSO <sub>2</sub> équiv.	16,1	24
EP	kgPO <sub>4</sub> <sup>3-</sup> équiv.	0,788	3,3
R	Mise hors service ajustée en années de service	7,89 10 <sup>-3</sup>	8,5 10 <sup>-9</sup>

La production par GN est meilleure pour les index HTP et R ; par contre, la production nucléaire est performante pour les index GWP, AP, EP. Aucune méthode de pondération n'a été utilisée, mais les auteurs (Solli C.) suggèrent que la variante hybride d'analyse de cycle de vie est indispensable pour juger de l'impact environnemental total des procédés ; pour certains impacts, une part importante provient des activités économiques à inclure pour la comparaison ; cette méthode hybride introduite par Leontief en 1970 combine l'analyse économique des entrées et sorties aux données environnementales du procédé pour les différents secteurs économiques concernés (activités économiques induites).

### 19.4.2 Cycles à zéro émission

#### a) Les combustibles et le CO<sub>2</sub>

Le paragraphe 19.4.1.a a confirmé l'intérêt de la cogénération, en priorité électrique et sous certaines conditions en termes de production de CO<sub>2</sub>, avec l'exemple du gaz naturel. Le tableau 19.8 montre pour les combustibles principaux les facteurs d'émission de CO<sub>2</sub> en kgCO<sub>2</sub> par MJ de PCI. On peut penser que pour un biogaz,

ce facteur est encore plus favorable que pour le gaz naturel et voisin de zéro ( $m_{\text{CO}_2, \text{biogaz}} \sim 0$ ).

TABLEAU 19.8 FACTEURS D'ÉMISSION EN  $\text{CO}_2$  DE COMBUSTIBLES.

Combustible	$m_{\text{CO}_2}$ $\text{kg}_{\text{CO}_2} / \text{MJ}$ sur PCI
GN gaz naturel	0,055-0,058
GPL gaz de pétrole liquéfié	0,062-0,065
Combustibles liquides	0,070-0,080
Charbons	0,083-0,110

On peut donc dire que quel que soit le combustible, il apparaît toujours une production fatale de  $\text{CO}_2$ , qu'il s'agit de minimiser.

### b) Problématique du $\text{CO}_2$

Le  $\text{CO}_2$  provient en majorité des centrales électriques. Et par chance, ces productions sont très centralisées, ce qui facilite *a priori* le captage.

La première façon de « séquestrer » le  $\text{CO}_2$  est de stocker les fumées, mais cela n'est pas très réaliste économiquement, à cause de la grande quantité d'inertes ( $\text{N}_2$ ) à stocker.

La séquestration du  $\text{CO}_2$  suppose donc un ensemble de fonctions : captage, séparation, compression-transport ou transfert, stockage.

#### ➤ Les options pour le captage-séparation

##### *Extraction du $\text{CO}_2$ des fumées*

Elle intervient après combustion ; on sépare alors le  $\text{CO}_2$  essentiellement de  $\text{N}_2$ .

Cette séparation peut se faire par distillation cryogénique, adsorption sélective, perméation à travers des membranes ou encore absorption chimique par des solvants. Cette dernière solution est la plus opérationnelle actuellement. Un exemple de captage post combustion pour une centrale NGCC est représenté sur la figure 19.18.

#### ➤ Extraction du $\text{CO}_2$ des combustibles

Le captage du  $\text{CO}_2$  dans le combustible (avant combustion) suppose un reformage de celui-ci et la séparation du  $\text{CO}_2$ . L'idéal est la production d'hydrogène pour usage dans une turbine à combustion ou une pile à combustible.

Dans cette configuration, l'absorption physique par des solvants est la meilleure solution. Un exemple de captage avant combustion est représenté sur la figure 19.19.

Il existe actuellement dans le monde un seul pilote industriel de captage de  $\text{CO}_2$  (projet CASTOR du 6<sup>e</sup> PRCD) dans la centrale à charbon d'Esbjerg au Danemark ; l'objectif du projet est de permettre le captage de 10 % des émissions de  $\text{CO}_2$  euro-



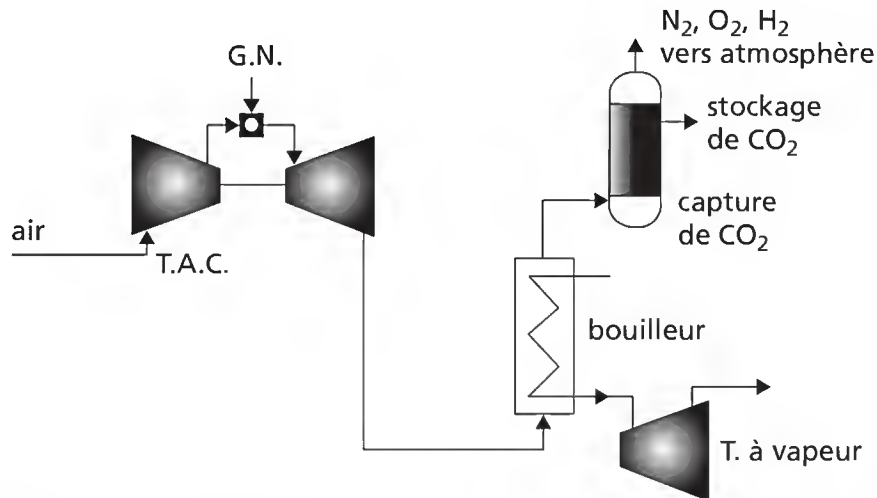


Figure 19.18 Captage post-combustion dans un cycle combiné à gaz naturel (NGCC).

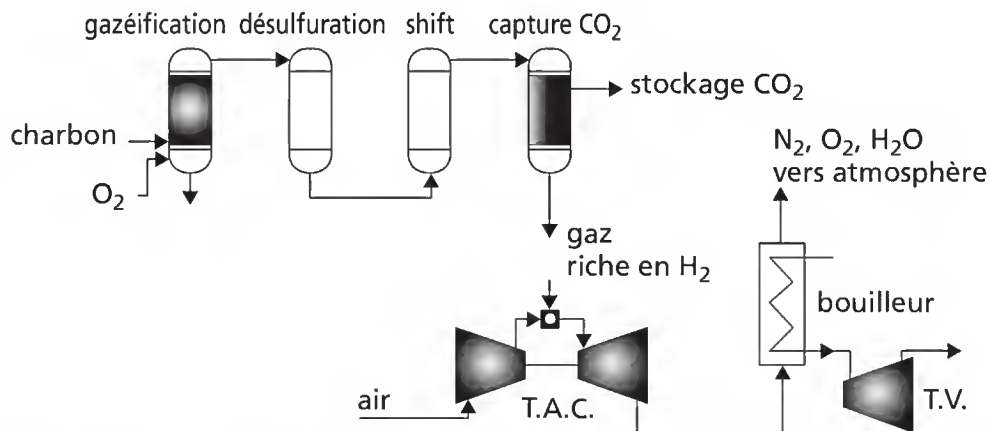


Figure 19.19 Captage avant combustion dans un cycle combiné à gazéification intégrée (IGCC).

péennes (soit 30 % des émissions des grosses installations industrielles) avec un rendement de captage de 90 %. ([www.co2-castor.com](http://www.co2-castor.com)).

#### ► Le stockage de CO<sub>2</sub>

##### *Stockages terrestres*

Les différents stockages de dioxyde de carbone sont potentiellement : les gisements houillers non exploitables, les dômes de sel, les formations géologiques profondes, les réservoirs de pétrole et de gaz épuisés. Tous ceux-ci peuvent être alimentés par gazoduc de transfert à partir d'une station de pompage (comme le gaz naturel).



*Stockages marins*

Ceux-ci supposent :

- soit une injection à profondeur moyenne de gouttelettes de  $\text{CO}_2$  à partir d'un gazoduc ;
- soit largage en mer (après transport par bateau) de neige carbonique par accumulation dans les fonds marins (profondeur  $> 2\,000\text{ m}$ ) ;
- soit injection à partir d'une station de pompage dans les fonds marins, sous forme d'un lac de  $\text{CO}_2$ .

Actuellement, la compagnie norvégienne STATOIL réinjecte du  $\text{CO}_2$  dans un aquifère salin à  $1\,000\text{ m}$  de profondeur sous le plancher océanique dans le gisement Sleipner.

*Stockage par la végétation*

On n'oubliera pas enfin le puits naturel à  $\text{CO}_2$  que constitue la biomasse, et surtout les forêts.

*c) Les cycles à zéro émission*

## ➤ Le cycle Matiant

Un des spécialistes dans ce domaine est (Mathieu P.) qui a proposé avec E. Iantovski, il y a quelques années, le cycle dit Matiant ; ce cycle est un cycle à gaz combinaison d'un cycle de Rankine à  $\text{CO}_2$  supercritique (voir chapitre 17), combiné avec un cycle de Joule à récupération et  $\text{CO}_2$ . L'usage du dioxyde de carbone comme fluide cyclé mais aussi produit dans les combustions facilite son captage complet.

Cette proposition n'a pas encore donné lieu à expérimentation à notre connaissance.

## ➤ Les cycles à quasi zéro émission

Conformément à la figure 19.20, ces cycles utilisent une combustion à l'oxygène ; il faut alors une unité de séparation de  $\text{O}_2$  dans l'air.

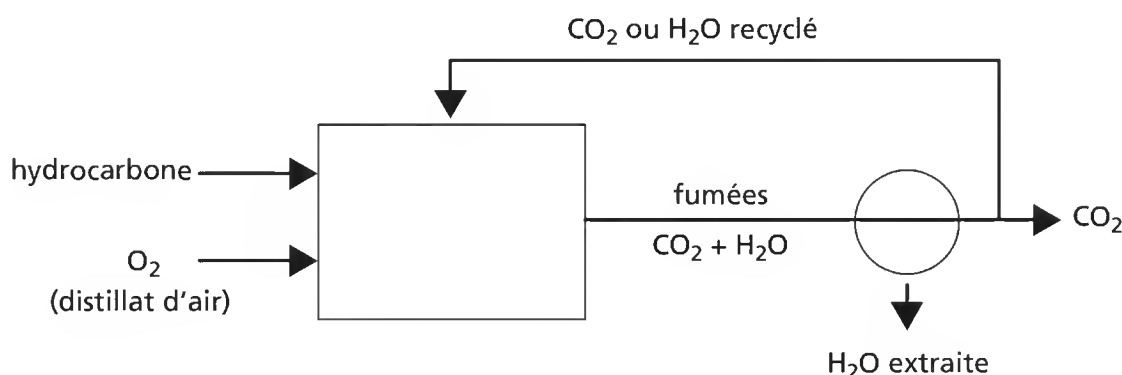


Figure 19.20 Cycles à quasi zéro émission (combustion à l'oxygène).

La séparation de  $O_2$  peut se faire par distillation cryogénique (voir chapitre 15) : cette technique existe industriellement, ou par membrane conductrice à oxydes solides sous des températures de 800 °C à 900 °C (en cours de développement).

#### d) Quelques conclusions

Le tableau 19.9 résume l'état pour la séquestration du  $CO_2$ . On peut dire que le captage par absorption chimique à l'échelle industrielle est disponible, de même que les technologies de stockage, voire certains usages du  $CO_2$  (fluide frigorigène par exemple) ; le transport et le transfert du  $CO_2$  ne posent aucun problème.

TABLEAU 19.9

Composant	Technologie	Expérience en laboratoire	Expérience en pilote	Disponible commercialement	Marché classique
Capture	Post-combustion		X		
	Pré-combustion			X	
	Combustion à l'oxygène	X			
	Séparation industrielle				X
Transport	Pipeline				X
	Bateau				X
Stockage géologique	Récupération assistée du pétrole			X	
	Récupération des gaz des mines de charbon		X		
	Champ pétrolifère ou gaz exploité		X		
	Aquifère salin			X	
Stockage océanique	Dissolution	X			
	Lac	X			
Fixation chimique	Minéralisation	X			
Usage du $CO_2$	Solvant chimique		X		
	Usage direct			X	

Les problèmes restant à traiter sont avant tout des problèmes d'échelle (émission de  $CO_2$  par des petites unités diffuses), et le fait que les dispositifs de captage diminuent le rendement global des installations, donc augmentent les consommations en combustibles et les rejets dans l'environnement. Enfin, les coûts doivent être

maîtrisés pour être compétitifs vis-à-vis des taxes ; actuellement, la tonne de CO<sub>2</sub> vaut environ 25 euros, ce qui est environ deux fois moins cher que les coûts de captage (année 2006).

Pour les transports, le challenge est l'avion à hydrogène.

## 19.5 CONCLUSION

L'intégration spatiale de composants et systèmes a fait apparaître l'importance de nouveaux cycles complexes.

L'intégration dans le temps qui se traduit par l'analyse de cycle de vie (ACV) permet le suivi de produits ou d'ensembles.

L'importance de l'environnement en relation avec l'économie permet l'émergence de cycles à quasi zéro émission de CO<sub>2</sub>. Ceci constitue une étape susceptible de généralisation à d'autres polluants, au moins méthodologiquement.

Fondamentalement, il est aussi possible de généraliser l'approche de la méthode des pincements pour des systèmes ouverts des diagrammes  $T, \Delta \overset{o}{H}$  relatifs à l'énergie calorifique ; à d'autres variables intensives  $X$ , ce qui est en cours pour la matière.

## BIBLIOGRAPHIE

- CENUSA V., Contribution à l'amélioration du couplage entre l'installation de turbine à gaz et l'installation de turbine à vapeur dans les centrales électriques à cycles combinés gaz-vapeur, thèse université de Nancy 1, 25 Nov. 2004.
- FEIDT M., LANG S., Conception optimale de systèmes combinés à cogénération de puissance, chaleur et froid, *Entropie*, n° 242, p. 3-11, 2002.
- FERRARA P.L., Sistemi ad alta efficienza e minimo impatto ambientale nella conversione energetica, *La Termotecnica*, p. 80, juillet-août 1999.
- JOLLIER O. *et al.*, *Analyse du Cycle de Vie*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2005.
- MATHIEU Ph., *Capture du CO2 pour réduction des émissions de CO2 dans les systèmes de génération d'électricité*, Séminaire Université Henri Poincaré, Nancy, 31 mars 2005.
- MONTEIL J.M., Centrales à cycle combiné. Fonctionnement, exploitation, exemple, *Techniques de l'Ingénieur*, BE 8097, Vol. BE3, 16 pages, janvier 2004.
- PRISME, *La cogénération-trigénération*, Fiche technique n° 4 de la thématique « Technologies à haute performance énergétique », p. 5.
- RADULESCU M., Systèmes de cogénération d'électricité et de chaleur avec piles à combustible de type PEMFC ou SOFC et vaporeformage externe, thèse université de Nancy 1, 25 Sept. 2006.
- ROMARY D., Étude technico économique de production et distribution de chaleur et de force : application au tertiaire, thèse université de Nancy 1, 26 Oct. 2001.
- SOLLI C. *et al.*, *Life cycle assessment of hydrogen production*, Proceedings of ECOS 2005, Trondheim, Norway, p. 109-116, June 2005.
- WÄRTSILÄ, *Project guide for Wärtsilä 200 power plants*, Éditions 2.1, p. 82-85, avril 2001.



## Annexe 1

# Mécanique générale

### A.I.1 INTRODUCTION

On rappelle dans cette annexe les résultats établis dans les cours antérieurs de mécanique générale : principaux résultats de cinématique, cinétique, puis dynamique qui ont été utilisés par ailleurs dans la deuxième partie.

Sont supposées connues dans la suite les principales notions relatives aux torseurs.

### A.I.2 CINÉMATIQUE DU SOLIDE

#### A.I.2.1. Définition

La cinématique du *solide parfait* est l'étude du mouvement d'un système désigné par  $(S)$ , dans un repère orthonormé  $(R')$ . Ce repère est caractérisé par son origine  $O'$  et 3 vecteurs unitaires de base :  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ .

Soit  $(R)$  un repère lié au solide  $(S)$  d'origine  $O$  et de vecteurs unitaires de base :  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Les coordonnées d'un point  $M$  de  $(S)$  par rapport à  $(R)$  étant  $x, y, z$ , on a :

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ce vecteur caractérise le mouvement du point  $M$  lorsque la variable temps varie. Le lieu dans  $(R')$  du point  $M$  définit la trajectoire de  $M$  dans  $(R')$  dans son mouvement.

On notera  $\left[\overrightarrow{V(M/(R'))}\right]$  le vecteur vitesse du point  $M \in (S)$  dans son mouvement par rapport à  $(R')$ . De même  $\left[\overrightarrow{\Gamma(M/(R'))}\right]$  représente le vecteur accélération du point  $M \in S$  dans son mouvement par rapport à  $(R')$ .

### A.I.2.2. Théorème fondamental de cinématique du solide

$O \in (R)$  est de façon générale mobile dans  $(R')$  ainsi que les vecteurs unitaires de base  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  de sorte que :

$$\overrightarrow{V(M/(R'))} = \overrightarrow{V(O/(R'))} + x \frac{d\vec{i}}{dt} + y \frac{d\vec{j}}{dt} + z \frac{d\vec{k}}{dt}$$

les vecteurs unitaires de base  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  étant orthogonaux.

En posant  $\vec{r} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$  on trouve :

$$\boxed{\overrightarrow{V(M/(R'))} = \overrightarrow{V(O/(R'))} + \vec{r} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

$\vec{r}$  représente le vecteur rotation instantanée de  $(S)$  par rapport à  $(R')$  à l'instant  $t$ . Ce vecteur peut dépendre du temps. La rotation  $\vec{r}$  symbolise en fait :

$$\vec{r}((R)/(R'), t)$$

Dans le cas où  $O$  est un point fixe, les trajectoires des points  $M \in (R)$  sont des courbes tracées sur des sphères de centre  $O$  telles que  $\overrightarrow{V(M/(R'))} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{OM}$

Ce cas particulier permet de définir les angles d'Euler. Les composantes du vecteur rotation instantanée  $\vec{r}$  s'expriment alors simplement sous la forme générale :

$$\vec{r} = \dot{\phi} \vec{k}' + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \vec{k}$$

$\psi$  désigne la *précession*, rotation autour du vecteur  $\vec{k}'$ ,

$\theta$  désigne la *nutation*, rotation autour de  $\vec{u}$  portée par la ligne des nœuds,

$\phi$  désigne la *rotation propre* portée par le vecteur  $\vec{k}$

### A.I.2.3. Relations de composition des mouvements

Avec l'hypothèse classique selon laquelle le temps est indépendant du repère choisi pour caractériser le mouvement dans les repères précédemment définis, nous pouvons dire que  $M$  a un mouvement par rapport au repère  $(R)$  appelé *mouvement relatif*.

Le mouvement du repère  $(R)$  est lui-même étudié par rapport au repère  $(R')$  de référence, donc supposé fixe, noté alors  $(R_a)$  ou *repère absolu*.

On obtient alors par dérivation du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  par rapport au temps la relation de composition des vitesses :

$$\boxed{\overrightarrow{V[M/(R_a)]} = \overrightarrow{V_e(M)} + \overrightarrow{V[M/(R)]}}$$

$\overline{V[M/(R_a)]} = \overline{V_a(M)}$  ou vitesse absolue du point  $M$ ,

$\overline{V_e(M)} = \overline{V[O/(R_a)]} + \vec{r} \wedge \overline{OM}$  ou vitesse d'entraînement,

$\overline{V[M/(R)]} = \overline{V_r(M)}$  vitesse relative du point  $M$ .

De la même façon, on obtient la *relation de composition des accélérations* que l'on peut écrire sous la forme :

$$\overline{\Gamma_a(M)} = \overline{\Gamma_e(M)} + \overline{\Gamma_r(M)} + \overline{\Gamma_c(M)}$$

$\overline{\Gamma_a(M)} = \overline{\Gamma[M/(R_a)]}$  ou accélération absolue du point  $M$ ,

$\overline{\Gamma_e(M)} = \overline{\Gamma[O/(R_a)]} + \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \overline{OM} + \vec{r} \wedge [\overline{V_e(M)} - \overline{V(O)}]$  ou accélération d'entraînement,

$\overline{\Gamma_r(M)}$  ou accélération relative du point  $M$ ,

$\overline{\Gamma_c(M)} = 2\vec{r} \wedge \overline{V_r(M)}$  ou accélération de Coriolis.

## A.I.3 CINÉTIQUE

### A.I.3.1. Notion de masse

La cinétique est une extension de la cinématique faisant apparaître la notion de masse. En mécanique des milieux continus, la masse est représentée par la *fonction densité de masse*.

La masse d'un domaine ( $D$ ) d'un système  $S$  est donc définie par la relation :

$$\mu(D) = \int_{(D)} \rho(M, t) dD$$

La notation intégrale utilisée ici est généralisée c'est-à-dire que la densité de masse peut être un phénomène volumique, surfacique, linéique ou ponctuel.

Il est souvent commode alors d'introduire les notions de centre d'inertie et de tenseur d'inertie mécanique qui se prêtent aux mêmes développements que les notions similaires introduites en géométrie des surfaces par exemple.

- Principe de conservation de la masse

La masse d'une partie ( $D$ ) d'un système matériel ( $S$ ) en mouvement ne dépend pas de la variable temps.

### A.I.3.2. Torseur cinétique et torseur dynamique

- Torseur cinétique ou torseur des quantités de mouvement

Il peut être défini à partir d'une fonction densité de masse relative à la vitesse du point  $M$ ,  $\overline{V(M)}$ , ou densité de quantité de mouvement.

Soit  $\vec{R}_c[D/(R_a)] = \int_{(D)} \overrightarrow{V[M/(R_a)]} d\mu(M)$  ou résultante cinétique

$\vec{\sigma}[A/D(R_a)] = \int_{(D)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V[M/(R_a)]} d\mu(M)$  ou moment cinétique en A.

- Torseur dynamique ou torseur des quantités d'accélération

Il sera défini parallèlement à partir d'une fonction densité de masse relative à l'accélération du point M,  $\overrightarrow{\Gamma(M)}$  ou densité de quantité d'accélération.

Soit  $\vec{R}_D[D/(R_a)] = \int_{(D)} \overrightarrow{\Gamma[M/(R_a)]} d\mu(M)$  ou résultante dynamique

$\vec{\delta}[A, D/(R_a)] = \int_{(D)} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma[M/(R_a)]} d\mu(M)$  ou moment dynamique.

### Remarques

Compte tenu des propriétés du centre d'inertie désigné par G à l'instant t, on obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R}_c[D/(R_a)] &= \mu(D) \cdot \overrightarrow{V[G/(R_a)]} \\ \overrightarrow{R}_D[D/(R_a)] &= \mu(D) \cdot \overrightarrow{\Gamma[G/(R_a)]}\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\overrightarrow{R}[D/(R_a)] = \frac{d}{dt} \overrightarrow{R}_c[D/(R_a)]$$

On a de même :

$$\vec{\delta}[A; D/(R_a)] = \frac{d}{dt} \vec{\delta}[A, D/(R_a)] + \mu(D) \overrightarrow{V[A/(R_a)]} \wedge \overrightarrow{V[G/(R_a)]}$$

- Énergie cinétique

L'énergie cinétique du domaine D se définit à partir de la fonction densité de masse et de :

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{V[M/(R_a)]}^2$$

soit :

$$E_c[D/(R_a)] = \frac{1}{2} \int_{(D)} \overrightarrow{V[M/(R_a)]}^2 d\mu(M)$$



## Annexe 2

# Mathématique – Transformation de LEGENDRE

### A.II.1 EXPRESSION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES EN SYSTÈMES DE COORDONNÉES CARTÉSIEN, CYLINDRIQUE, SPHÉRIQUE

Ces équations sont écrites en supposant la masse volumique  $\rho$  puis la viscosité  $\mu$ , constantes.

#### A.II.1.1. Coordonnées cartésiennes

Les trois équations algébriques en projection sur les axes  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont obtenues par permutation circulaire des indices  $i, j, k$  sur l'expression ci-dessous écrite pour la direction  $i$  :

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + \mu \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

#### A.II.1.2. Coordonnées cylindriques

– Direction radiale  $r$

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.2})$$

– Direction orthoradiale  $\theta$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r \cdot v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$+ \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.3})$$

– Dans la direction longitudinale  $z$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

$$+ \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.4})$$

### A.II.1.3. Coordonnées sphériques

– Direction  $r$

$$\rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r$$

$$+ \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} v_r \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} v_r^2 - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cotg \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \quad (\text{A.5})$$

– Direction  $\theta$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r \cdot v_\theta}{r} - \frac{v_\theta^2 \cotg \theta}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta$$

$$+ \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} v_\theta \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \quad (\text{A.6})$$

– Direction  $\phi$

$$\rho \left( \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi \cdot v_r}{r} + \frac{v_\theta \cdot v_\phi}{r} \cotg \theta \right) = - \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial P}{\partial \phi} + \rho g_\phi$$

$$\begin{aligned}
& + \mu \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} v_\phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} v_\phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (A.7)
\end{aligned}$$

## A.II.2 FACTEUR INTÉGRANT

### A.II.2.1. Fonctions de plusieurs variables

#### Exemple

L'état d'équilibre d'un fluide pur est caractérisé par les valeurs de plusieurs grandeurs, la température  $T$ , la pression  $P$  ainsi que le volume  $V$ , l'énergie interne  $U$ , l'enthalpie  $H$ , l'entropie  $S$  associées à la masse  $m$  du corps.

Plus généralement le fluide est caractérisé par son *équation d'état*

$$f(P, V, T) = 0 \quad (A.8)$$

$f(P, V, T)$  est une fonction de trois variables d'état liées alors que  $U, H, S$  sont des *fonctions d'état* qui peuvent s'exprimer en fonction de deux variables d'état indépendantes quelconques.

**Remarque :**  $V$  est une fonction d'état dépendant obligatoirement des deux variables d'état  $P, T$ .

**Généralisation :** immédiate à un système thermodynamique dont les états d'équilibre dépendent de  $n$  variables d'état indépendantes.

### A.II.2.2. Dérivées partielles

À partir d'un état initial  $T_i, P_i$  d'un fluide pur, l'état d'équilibre final  $T_f, P_f$  infiniment voisin atteint, est tel que :

$$\begin{cases} T_f = T_i + dT \\ P_f = P_i + dP \end{cases} \quad (A.9)$$

Les fonctions d'état subissent alors des accroissements tels que :

$$\begin{cases} dV = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP \\ dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial U}{\partial P} \right)_T dP \\ dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP \\ dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T dP \end{cases} \quad (A.10)$$

- Généralisation immédiate à un système thermodynamique dont les états d'équilibre dépendent de  $n$  variables indépendantes.
- Relations entre dérivées partielles.

L'équation d'état d'un fluide pur  $f(P, V, T) = 0$  différenciée devient :

$$df = f'_P dP + f'_V dV + f'_T dT = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_{V,T} = f'_P \quad \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{T,P} = f'_V \quad \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{P,V} = f'_T$$

Si dans (A.11) on maintient  $V = \text{Cte}$

$$df = f'_P dP + f'_T dT = 0$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\frac{f'_T}{f'_P} = 1 / \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \quad (\text{A.12})$$

Identiquement, on trouve :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{f'_V}{f'_P} = 1 / \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \quad (\text{A.13})$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{f'_T}{f'_V} = 1 / \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \quad (\text{A.14})$$

La combinaison de (A.12, A.13, A.14) permet d'écrire :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1 \quad (\text{A.15})$$

### A.II.2.3. Formes différentielles

Soit un système thermodynamique dont les états d'équilibre dépendent de  $n$  variables. Le raisonnement suivant est mené en supposant  $n = 3$ , cas courant pour les systèmes thermodynamiques. L'état d'équilibre du système est associé à un point d'état  $P$  représenté par les valeurs des 3 variables indépendantes  $(x, y, z)$ .

$\delta F = X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$  est une forme différentielle dépendant de trois fonctions quelconques des trois variables indépendantes  $X(x, y, z)$ ,  $Y(x, y, z)$ ,  $Z(x, y, z)$ .

Une transformation thermodynamique est associée à une courbe  $\Gamma$  que décrit le point d'état. La courbe  $\Gamma$  peut se définir par des équations paramétriques :

$$x = x(t) ; y = y(t) ; z = z(t)$$

$t$  représente le plus souvent le paramètre temps. Si  $t$  varie entre  $t_i$  et  $t_f$ , la transformation thermodynamique amène le système du point d'état  $P_i$  au point d'état  $P_f$  suivant un chemin caractérisé par l'arc de la courbe  $\Gamma$  suivi :

$$F(P_i, P_f) = \int_{P_i}^{P_f} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz \quad (\text{A.16})$$

$F(P_i, P_f)$  est une intégrale curviligne définie entre les états  $P_i$  et  $P_f$  qui ne dépend que de la courbe  $\Gamma$  particulière permettant de passer du point  $P_i$  au point  $P_f$ . On dit que l'intégrale  $F(P_i, P_f)$  dépend du chemin suivi.

**Remarque :** pour une transformation réversible, la suite des états intermédiaires envisagés est une suite d'états d'équilibre.

**Exemples :**

$\delta W$  expression du travail élémentaire est une forme différentielle,

$\delta Q$  quantité de chaleur élémentaire échangée est une forme différentielle.

#### A.II.2.4. Différentielles totales ou exactes

– Différentielle totale

L'intégrale curviligne  $F(P_i, P_f)$  correspondant à la forme différentielle  $\delta F$  ne dépend que des points d'état  $P_i$  et  $P_f$  et non du chemin suivi :

$$F(P_i, P_f) = F(P_f) - F(P_i) = \int_{P_i}^{P_f} dF \quad (\text{A.17})$$

$dF$  est alors la différentielle d'une fonction d'état  $F(x, y, z)$  telle que :

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{y,z} dx + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{z,x} dy + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_{x,y} dz$$

Les fonctions  $X, Y, Z$  qui caractérisent la forme différentielle s'identifient dans ce cas avec les dérivées partielles de la fonction  $F$  par rapport aux variables :

$$X(x, y, z) = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{y,z} ; Y(x, y, z) = \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{z,x} ; Z(x, y, z) = \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_{x,y}$$

Les relations entre les dérivées secondes mixtes permettent d'obtenir les *conditions nécessaires* pour que l'intégrale :

$\int_{P_i}^{P_f} dF$  ne dépende pas du chemin suivi :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)_{z,x} = \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_{y,z} \\ \left( \frac{\partial Y}{\partial z} \right)_{x,y} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_{z,x} \\ \left( \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{y,z} = \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)_{x,y} \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$dF$  est une différentielle totale associée à la fonction d'état  $F(x, y, z)$ .

**Remarque :** les conditions (A.18) sont aussi des conditions suffisantes pour que  $dF$  soit une différentielle totale associée à la fonction d'état  $F(x, y, z)$ .

Les fonctions  $X, Y, Z$  qui caractérisent la différentielle totale sont les composantes d'un vecteur  $\vec{V}(x, y, z)$  représenté par le gradient de la fonction  $F(x, y, z)$ . Les conditions (A.18) expriment que le rotationnel de  $\vec{V}$  est nul.

**Exemples :**  $dU, dH, dS$  sont des différentielles totales pour toute transformation réversible située entre deux états d'équilibre.

L'application des relations (A.18) aux fonctions  $U$  et  $S$  ou  $H$  et  $S$  a toujours été vérifiées quel que soit le système thermodynamique, ce qui constitue une confirmation des deux premiers principes de la thermodynamique.

- Facteur intégrant : pour une forme différentielle qui ne dépend que de deux variables indépendantes, par exemple  $\delta Q = X(x, y) dx + Y(x, y) dy$ ,  $X(x, y)$  et  $Y(x, y)$  étant des fonctions quelconques des variables  $x$  et  $y$ ,  $\exists$  une fonction  $\phi(x, y)$  ou facteur intégrant telle que  $\phi(x, y) \delta Q = \phi \cdot X(x, y) dx + \phi \cdot Y(x, y) dy$  soit une différentielle totale,  $\phi(x, y)$  satisfait à la relation fonctionnelle :

$$\frac{\partial}{\partial y}[\phi(x, y) \cdot X(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\phi(x, y) \cdot Y(x, y)]$$

$\delta Q$  représentant la forme différentielle de la quantité de chaleur, le deuxième principe postule que  $\phi(x, y)$  est identique à  $[1/T(x, y)]$ ,  $T$  représentant la température thermodynamique du système.

Lorsque la forme différentielle dépend de 3 variables, la condition nécessaire d'existence du facteur intégrant  $\phi(x, y, z)$  suppose que le vecteur  $(\vec{V}/\phi)$  de composantes  $(X/\phi, Y/\phi, Z/\phi)$  possède un rotationnel nul (par généralisation du résultat précédent).  $\phi(x, y, z)$  correspond à  $T(x, y, z)$ . Il en résulte que  $\vec{V}$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$  sont orthogonaux. Cette condition est aussi une condition suffisante d'existence d'un facteur intégrant.

Généralisation : dans le cas d'une forme différentielle dépendant de plus de trois variables, le deuxième principe postule alors l'existence d'un facteur intégrant égal à  $(1/T)$  pour la forme différentielle associée à  $\delta Q$ .

## A.II.3 TRANSFORMATION DE LEGENDRE

### A.II.3.1. Représentation géométrique de la transformation de Legendre

La transformation de Legendre permet de remplacer dans une fonction d'état thermodynamique une variable thermodynamique par une autre variable. Le remplacement d'une variable indépendante par une autre variable indépendante est réalisé de telle sorte que la nouvelle fonction mathématique soit toujours représentative du phénomène physique étudié.

La représentation géométrique de la transformation de Legendre est illustrée dans ce qui suit à partir d'une fonction d'une variable,  $y(x)$ .

Cette fonction étant supposée continue dérivable, la variable  $z$  est introduite sous la forme :

$$z = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx} \quad (\text{A.19})$$

En choisissant  $z$  comme nouvelle variable, la fonction  $y$  prend une nouvelle forme qui n'est pas équivalente, si certaines précautions ne sont pas prises. En effet  $z$  qui est la pente en un point de la fonction  $y$  ne suffit pas à rendre compte de façon biunivoque de la fonction  $y$  (fig. A.II.1).

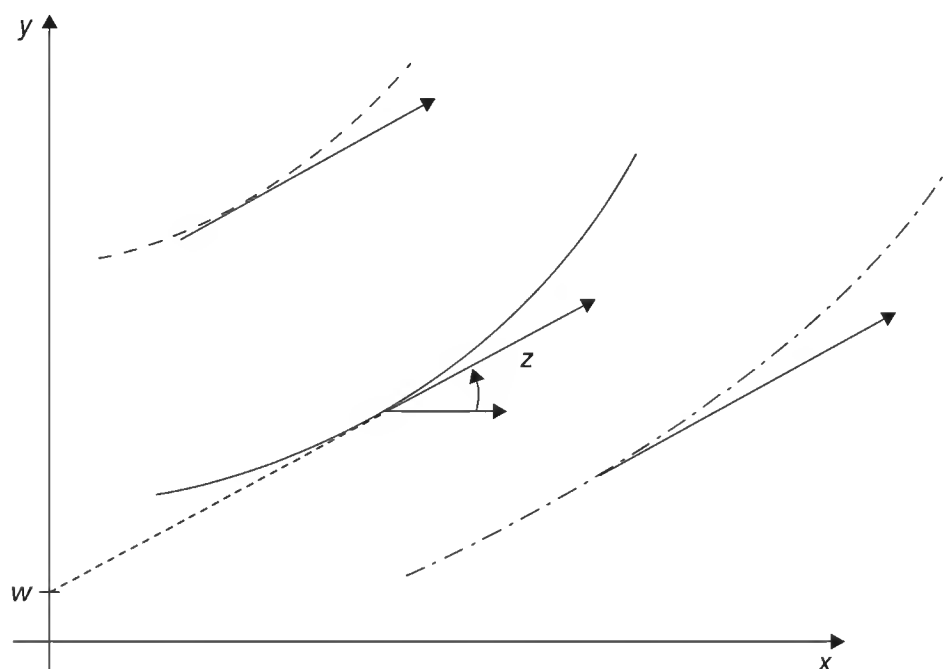


Figure A.II.1 Relation entre une fonction d'une variable et sa dérivée.

Une correspondance biunivoque entre la fonction et sa dérivée est par contre établie si on précise par exemple l'intersection de la tangente avec l'axe des  $y$ ,  $w$ .

Ainsi au couple de valeurs primitives  $(x, y)$  correspond le couple de valeurs  $(z, w)$  ; à la fonction  $y(x)$  correspond une fonction  $w(z)$ .

Compte tenu de la définition géométrique, ces variables et fonctions sont liées par la relation :

$$w = y - z.x \quad (\text{A.20})$$

– Procédure : la fonction  $w$  s'appelle la « transformée de Legendre » qui est obtenue par la procédure suivante illustrée géométriquement comme il vient d'être montré.

La différentiation de la fonction initiale  $y(x)$  par rapport à la variable  $x$  fournit  $z$ . En remplaçant  $x$  et  $y$  dans (A.20), il vient  $w$  en fonction de  $z$ .

**Remarque :** il est possible, à partir de la connaissance de  $w(z)$ , de revenir à la fonction initiale  $y(x)$ . Pour cela, par différentiation de la fonction  $w$ , il vient :

$$x = \frac{dw}{dz} \quad (\text{A.21})$$

En remplaçant  $z$  et  $w$  dans (A.20), on retrouve la fonction initiale.

### A.II.3.2. Généralisation de la transformation de Legendre

- Définition. Soit une différentielle totale :

$$df = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_i dx_i + \dots + X_n dx_n$$

La transformation de Legendre permet de définir de nouvelles fonctions pour lesquelles un ou plusieurs  $X_i$  sont utilisés comme variables au lieu des  $x_i$  qui leur sont conjugués.

**Remarque :** le nombre total des fonctions qu'on peut ainsi écrire est  $2^n - 1$ .

- Forme des nouvelles fonctions :

1<sup>er</sup> ordre :

$$F(X_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = f - X_1 x_1$$

$$F(x_1, X_2, \dots, x_n) = f - X_2 x_2$$

2<sup>e</sup> ordre :

$$F(X_1, X_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = f - X_1 x_1 - X_2 x_2$$

( $n - 1$ )<sup>e</sup> ordre :

$$F(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n) = f - X_1 x_1 - X_2 x_2 - X_i x_i - \dots - X_{n-1} x_{n-1}$$

- Propriétés : parmi les variables utilisées (les variables dont on connaît les variations ou les variables qui leur sont conjuguées), certaines sont utilisées comme variables de variations connues. Les autres s'expriment en fonction des dérivées partielles des nouvelles fonctions :

$$df = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$$

$$F_{(X_1, x_2, x_3)} = f - X_1 x_1$$

$$dF = \left( \frac{\partial F}{\partial X_1} \right) dX_1 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left( \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) dx_3$$

$$dF = df - d(X_1 x_1) = df - X_1 dx_1 - x_1 dX_1$$

$$dF = -x_1 dX_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3$$

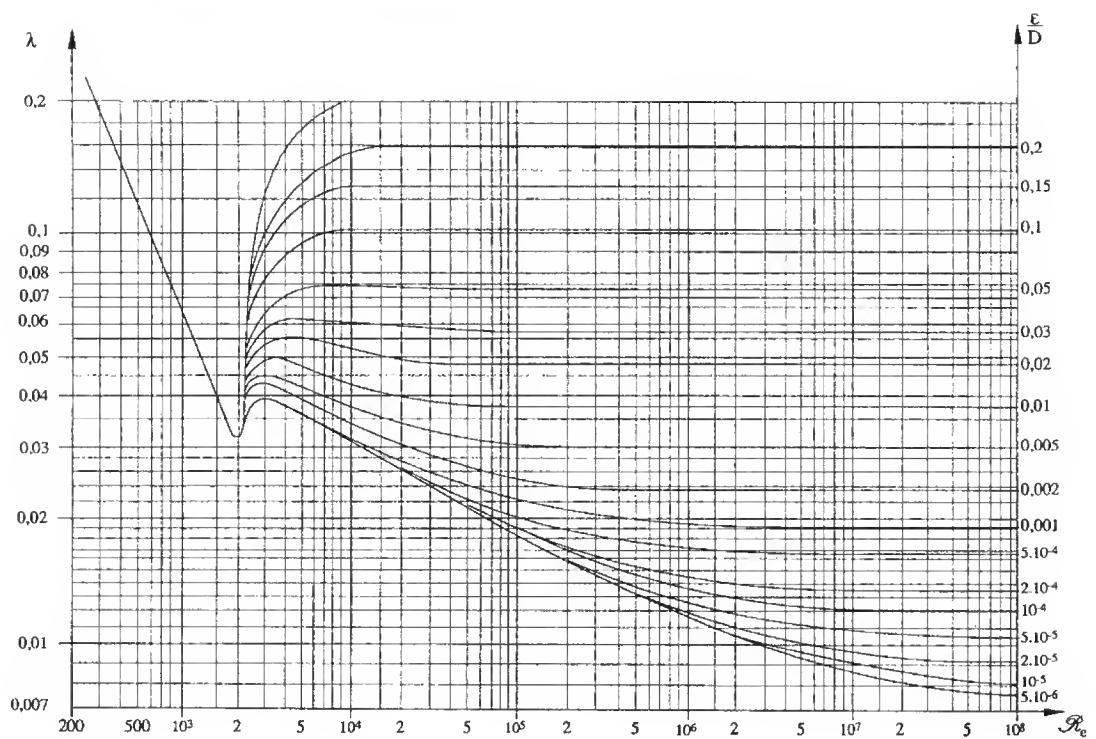
variables  $X_1, x_2, x_3$

$$x_1 = \left( \frac{\partial F}{\partial X_1} \right) \quad x_2 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \quad x_3 = \left( \frac{\partial F}{\partial x_3} \right)$$



## Annexe 3

# Mécanique des fluides



Abaque de COLEBROOK



## Annexe 4

# Données thermophysiques

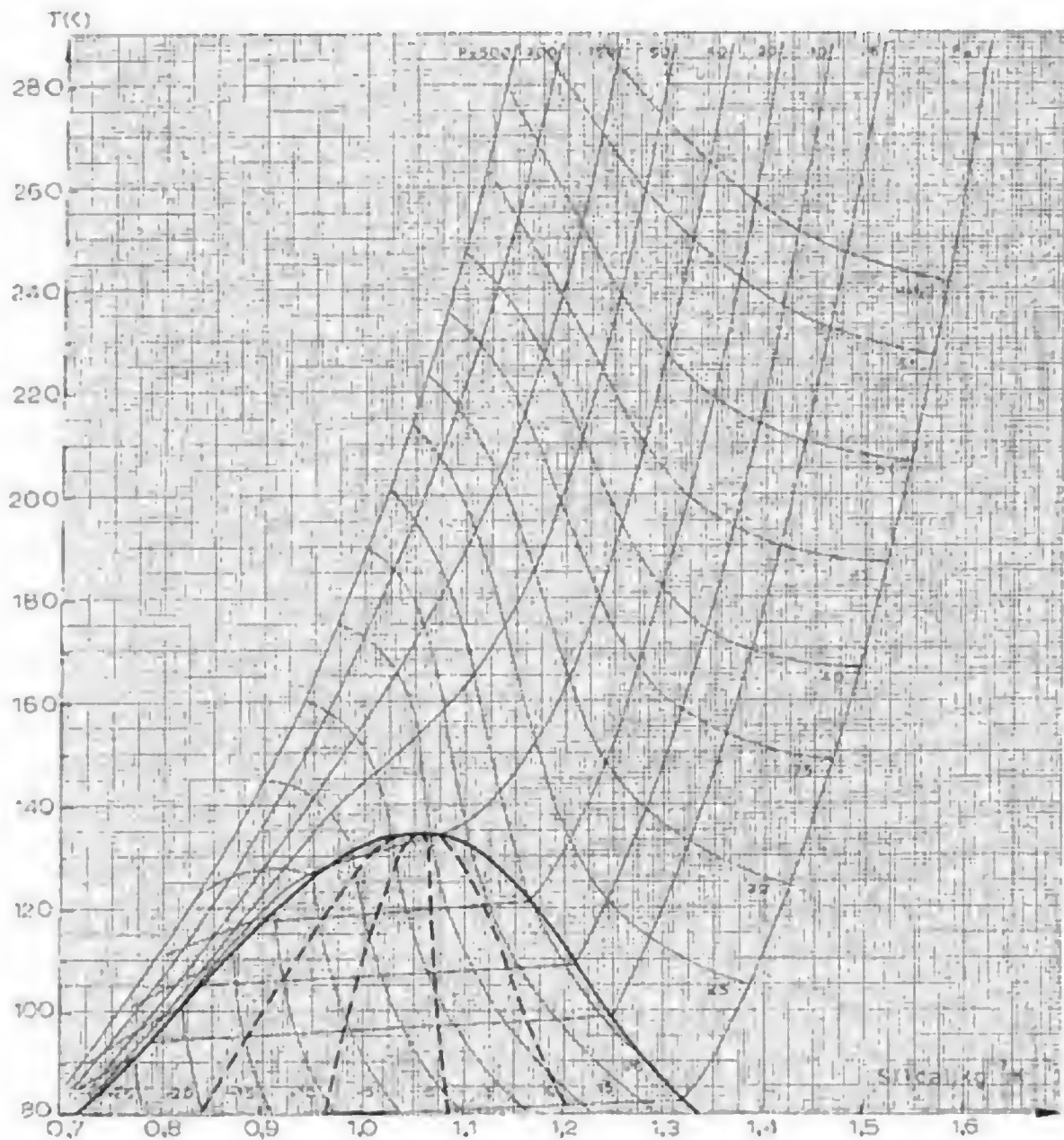


Diagramme T, S de l'air (selon L'AIR LIQUIDE)

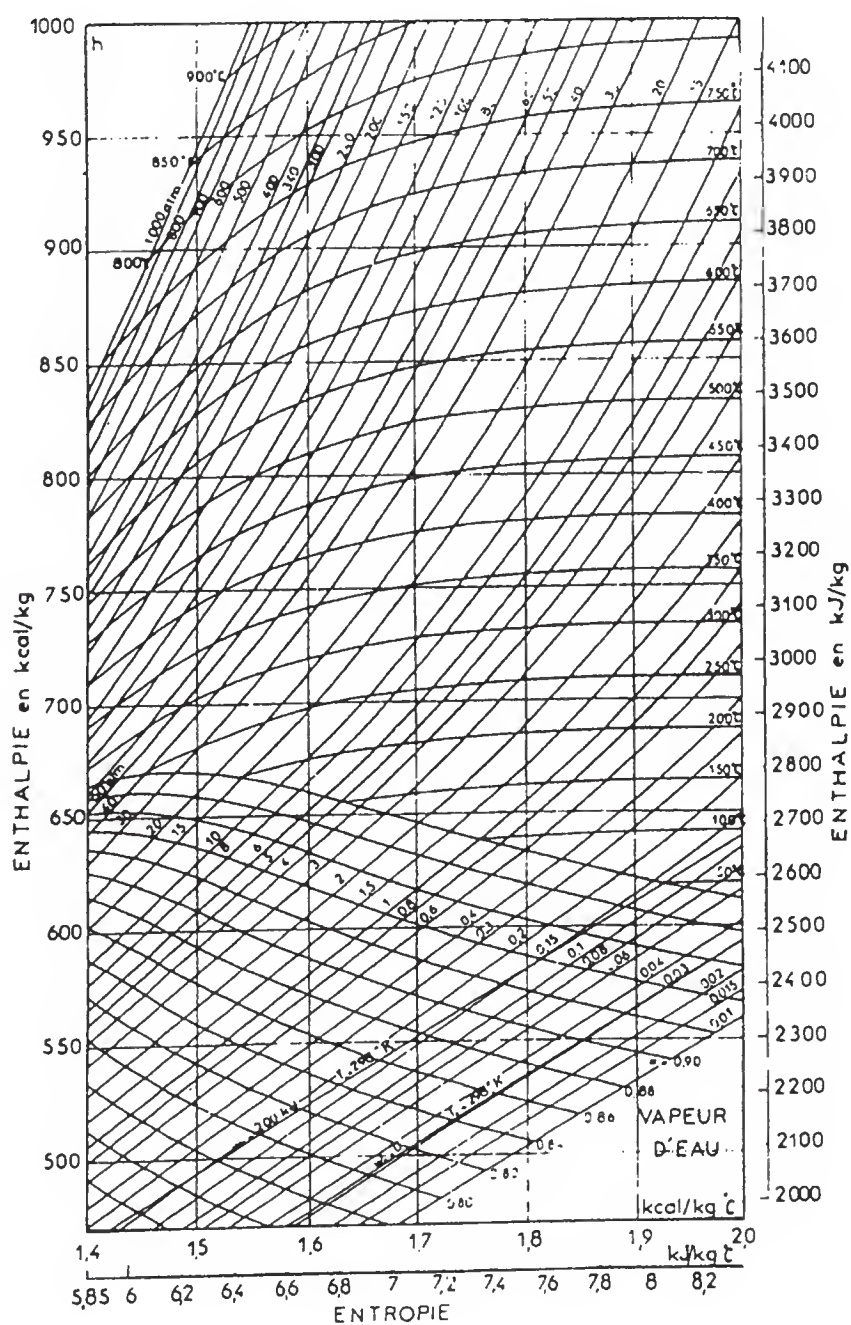
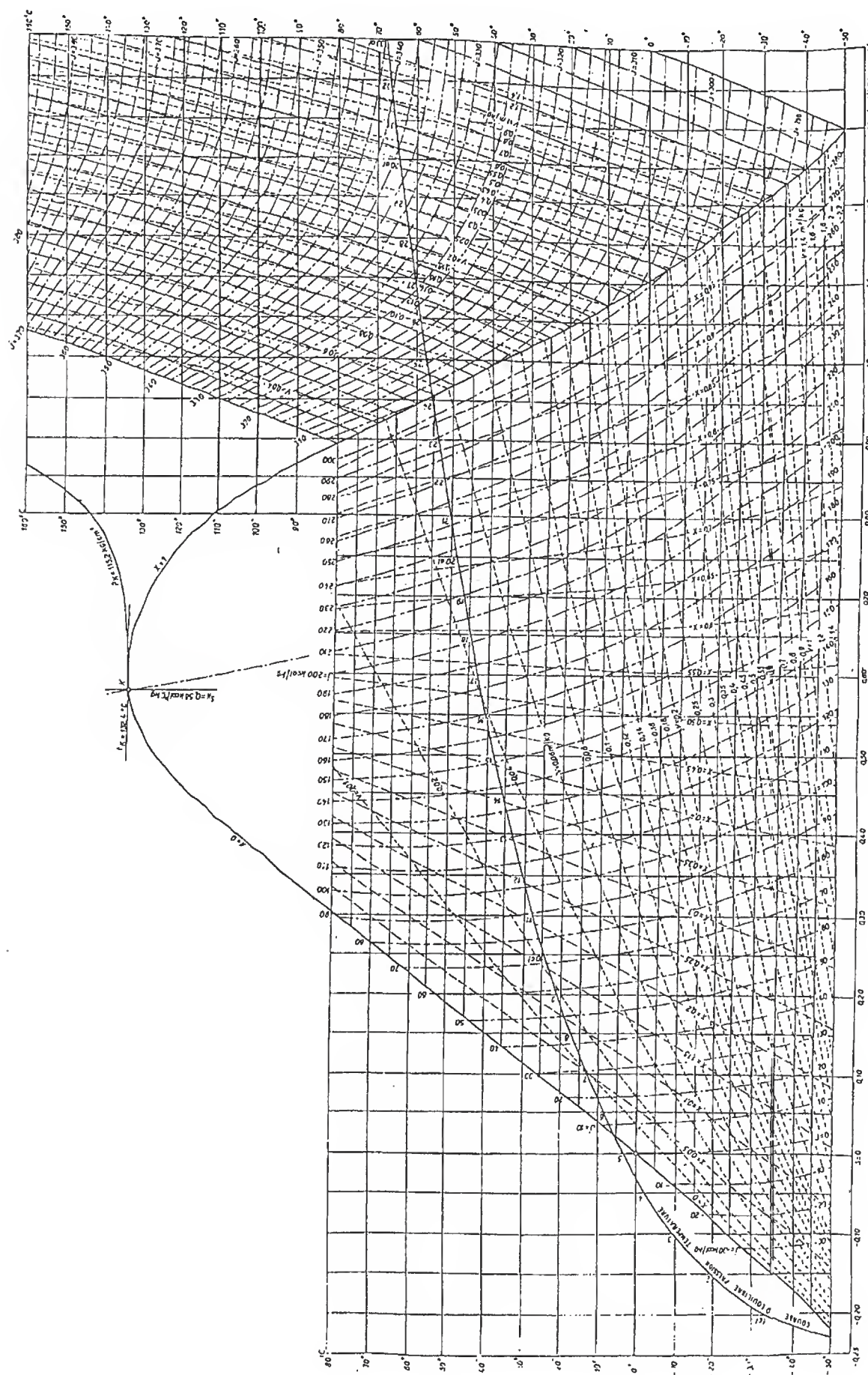
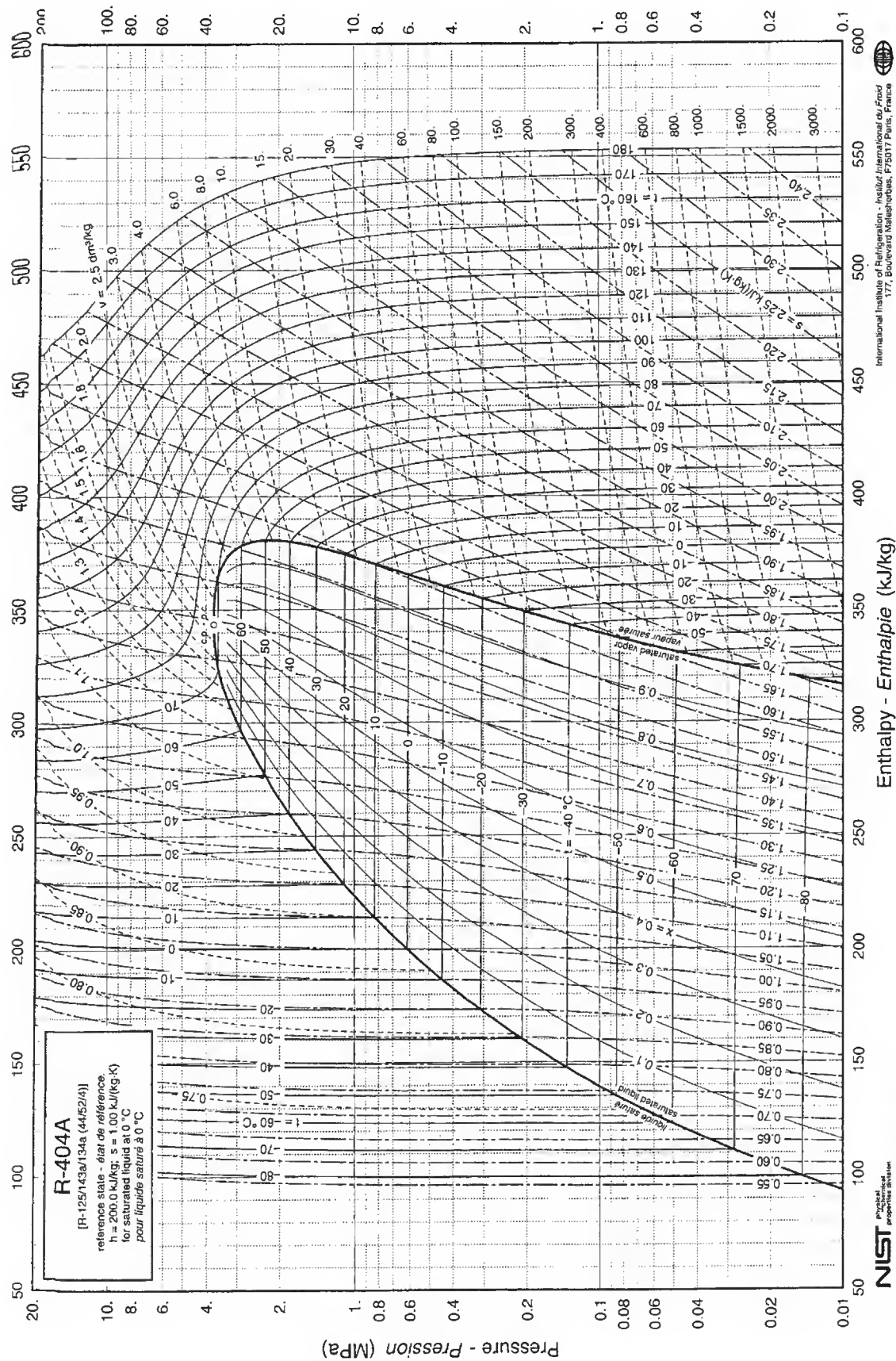


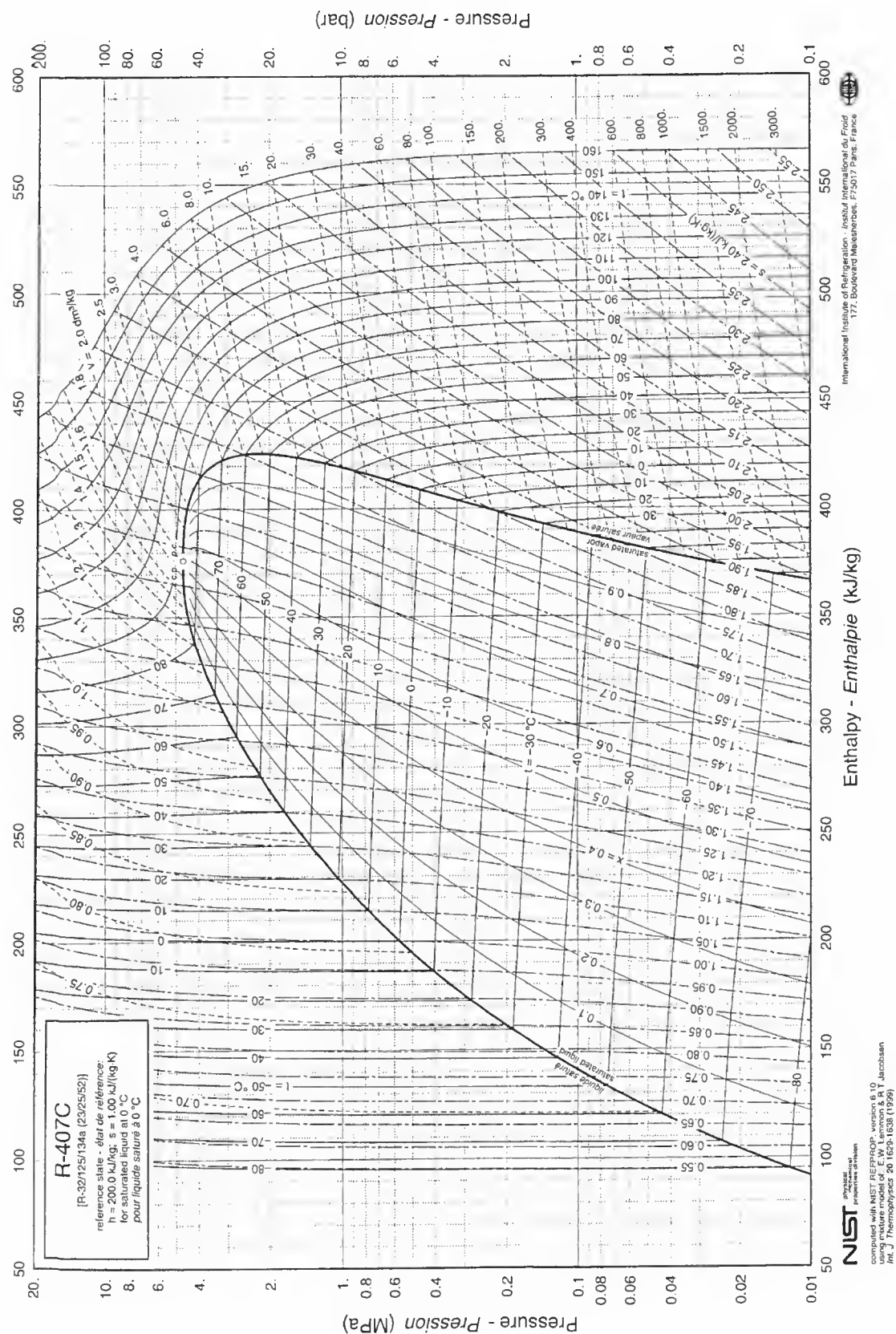
Diagramme de Mollier ( $h$ ,  $s$ ) de l'eau. Documentation extraite de "La thermodynamique appliquée aux machines", par R. Vichnievsky, Masson, 1967.

Diagrammes T, s de  $\text{NH}_3$



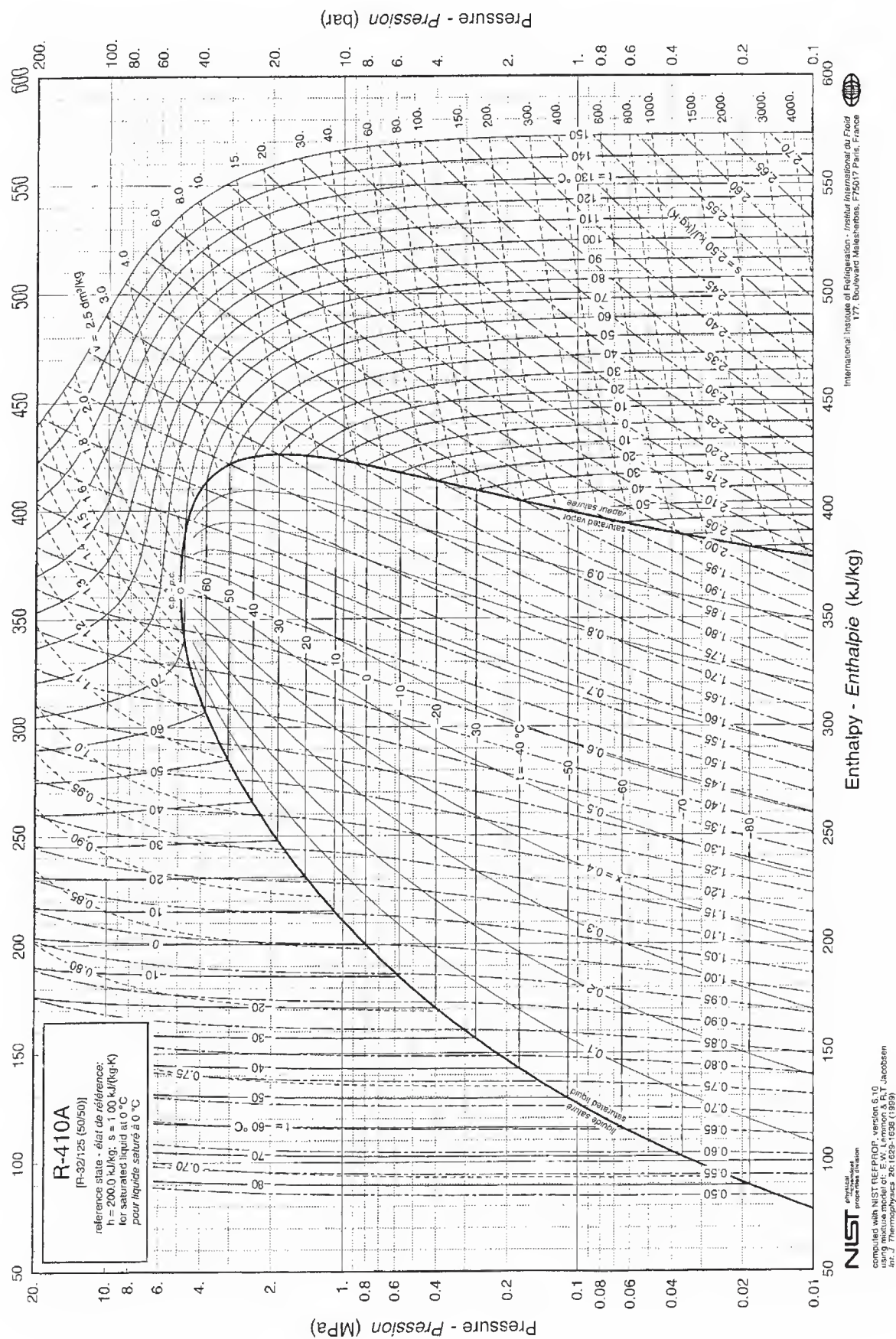


Diagrammes du réfrigérant R-404A avec l'aimable autorisation de l'I.I.F.



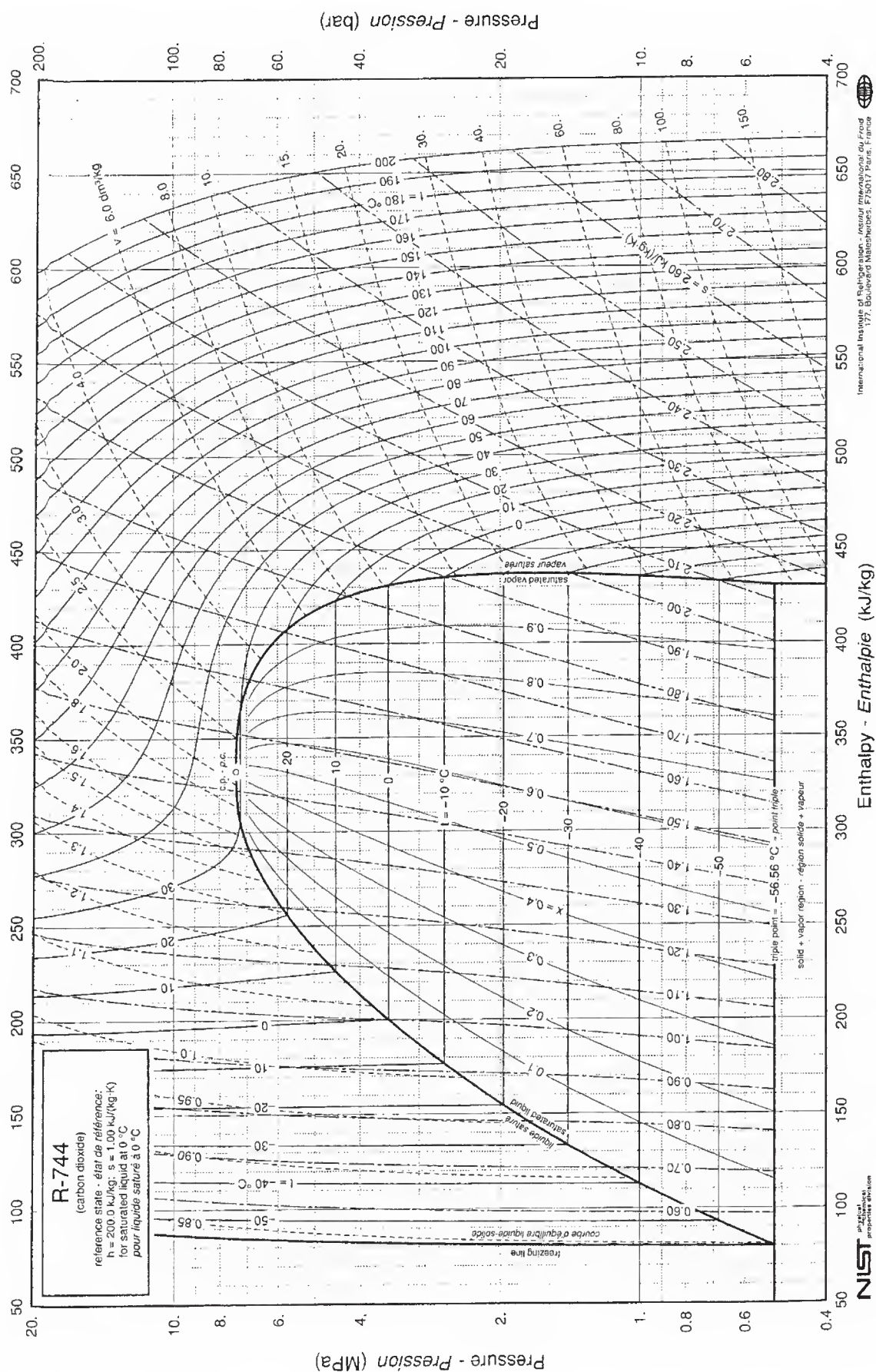
Diagrammes du réfrigérant R-407C avec l'aimable autorisation de l'I.I.F.





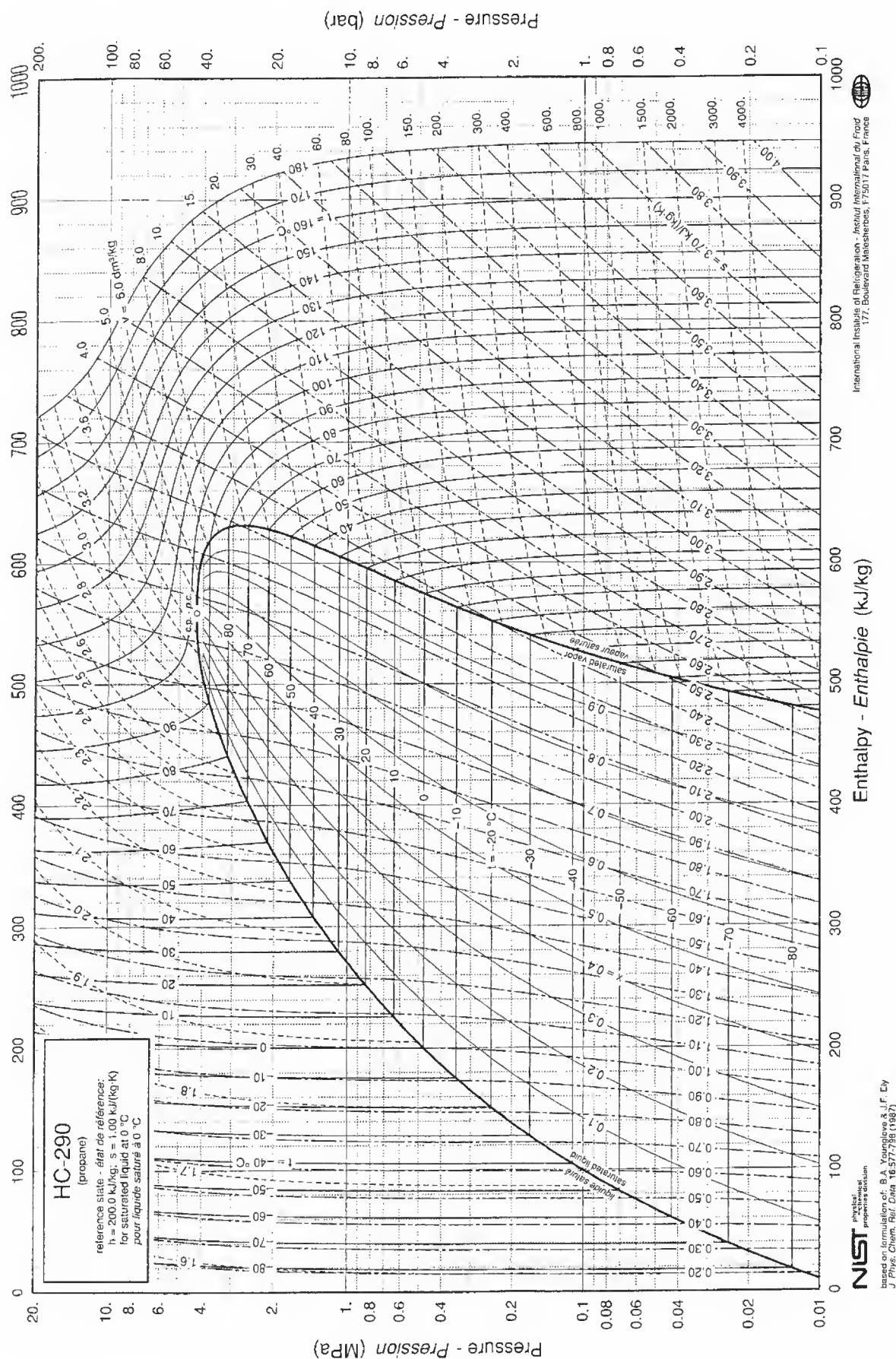
Diagrammes du réfrigérant R-410A avec l'aimable autorisation de l'I.I.F.





Diagrammes du réfrigérant R-744 avec l'aimable autorisation de l'I.I.F.

**NIST** physical-chemical properties division



Diagrammes du réfrigérant HC-290 avec l'aimable autorisation de l'I.I.F.



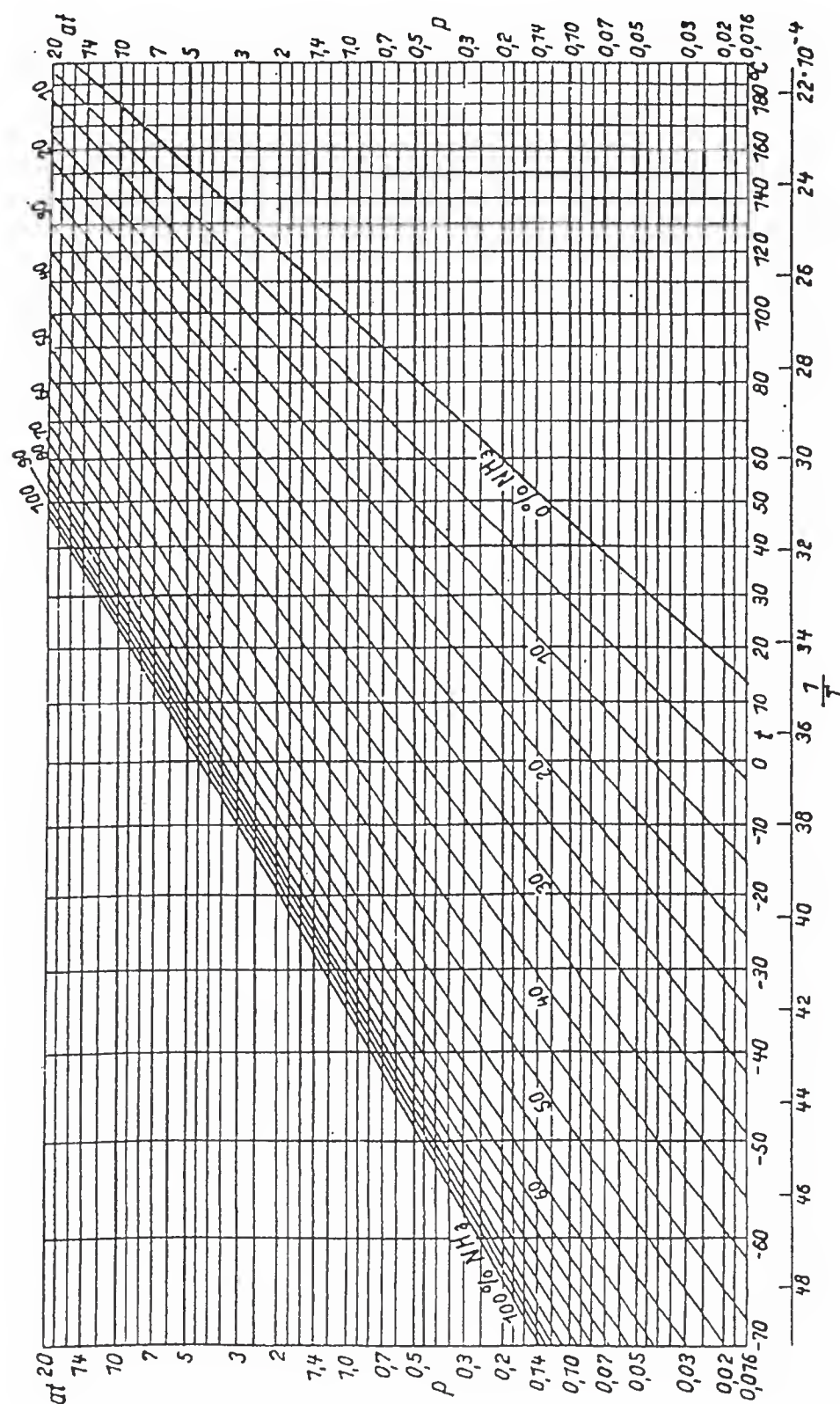


Diagramme du mélange binaire eau-ammoniac

$$\left( \ln P, \frac{1}{T} \right)$$

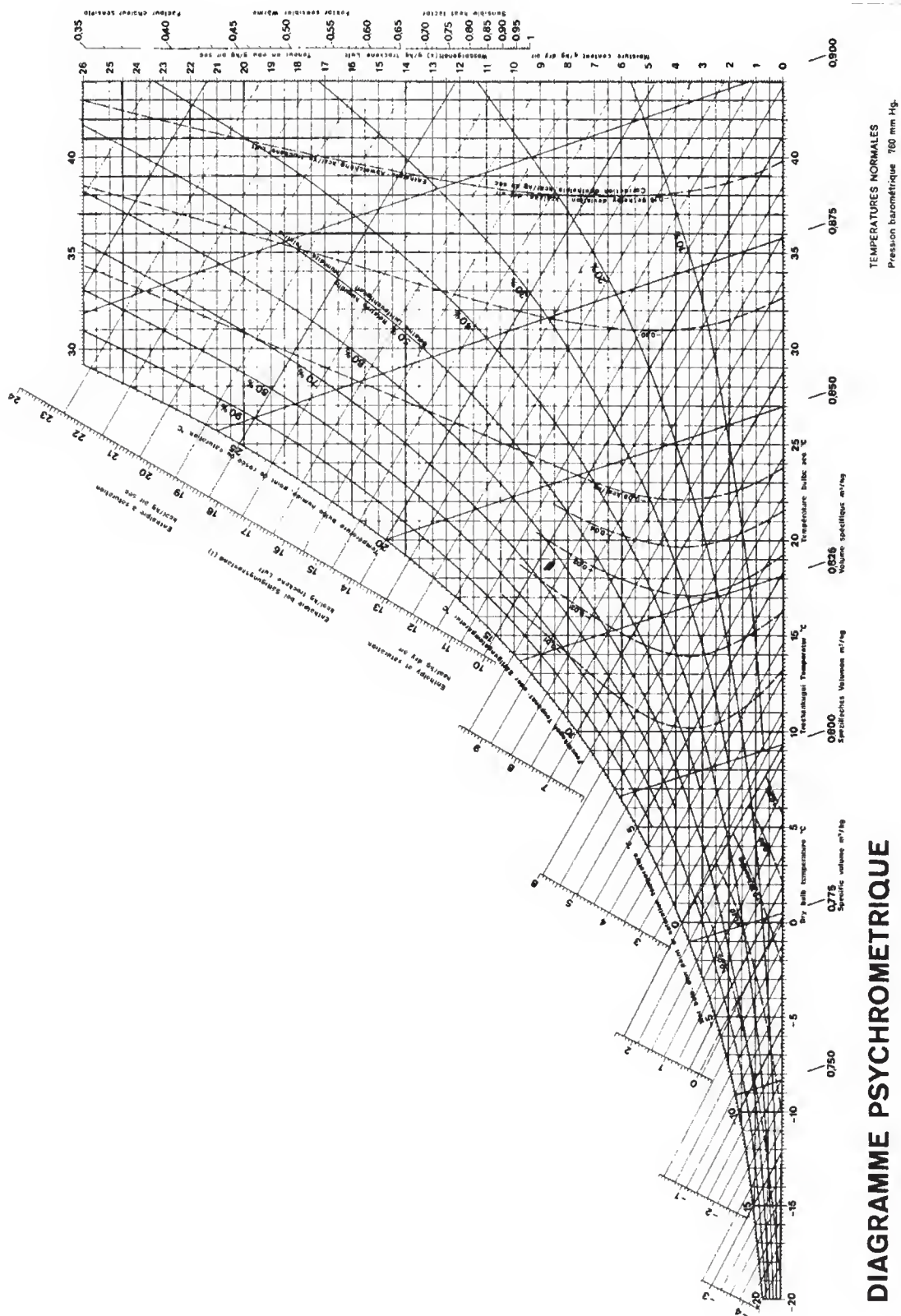


Diagramme psychrométrique

---

# Index

## A

Actualisation 185  
Affinité 164  
Ailettes 360  
Air humide 742  
Analyse du cycle de vie 888  
    (ACV) 276  
Analyse exergo-économique 210

## B

Batteries 858  
    à ailettes 427  
Bilan(s) 180  
    de fonctionnement actualisés 188  
    économiques 181  
    entropiques et exergétiques 152  
    global actualisé 189  
Biocombustibles 640

## C

Capacité 36  
    calorifique 63  
Cavitation 501  
Chaleur  
    de réaction 110  
    latente 29, 108  
    sensible 29  
    spécifique 63  
Changements de phases 102

Chaudières et fours 663  
Coefficient(s)  
    calorimétriques 95  
    de performance 150  
    de transfert de chaleur global surfacique 406  
    thermoélastiques 96  
Cogénération 862  
    chaude 862  
    froide 864  
Combustibles 637  
Combustion 637, 648  
Composants 228  
Compresseurs 516  
Compression et détente étagées 584  
Condensation en film 445  
Conditionnement de l'air 750  
Conduction thermique 334  
Conductivité équivalente (apparente) 355  
Conservation  
    de l'énergie 84  
    de la matière 73  
Constante de temps 35  
Contraintes 261  
Contrôle  
    commande 320  
    commande et régulation des systèmes à  
        compression mécanique de vapeur 582  
    régulation 320

- Convections forcée et naturelle 382
- Conversion 29
  - chimio-électrique 841
  - photovoltaïque 837
- Convertisseur
  - analogique-numérique CAN 322
  - numérique-analogique (CNA) 322
- Corrélations
  - de transfert 391
  - thermoéconomiques 196
- Coulis de glace 595
- Couplage entre transferts de matière et de chaleur 381
- Coût(s)
  - d'investissement 182
  - de fonctionnement 183
  - global 184
- Critère 261
- Critique 121
- Cryogénie 616
- Cycle(s)
  - à zéro émission 892
  - combinés 872
  - de Atkinson 676
  - de Beau De Rochas 673
  - de Diesel 674
  - de Hirn 730
  - de Rankine 730
  - de Stirling et de Ericsson 715
  - mixte 676
  - moteurs à vapeur 729
- D**
- Dégazage 536
- Développement durable (DD) 277
- Diagrammes
  - de l'air humide ou psychométriques 743
  - thermodynamiques 120
- Dimensionnement 223
- E**
- Ébullition - Évaporation 429
- Échangeur(s)
  - à condensation 415
  - à faisceau de tubes et calandre 424
  - à plaques 425
  - à vaporisation 415
  - compacts 427
  - de chaleur 412
- Écoulement dynamique stationnaire
  - laminaire 383
  - turbulent 389
- Effets
  - galvanomagnétiques et thermomagnétiques 832
  - thermoélectriques 834
- Efficacité 147
  - d'un échangeur de chaleur 417
  - d'une ailette 363
  - d'une surface ailettée 364
  - énergétique 22
- Effusivité 369
- Élasticité 196
- Éléments 228
- Énergétique 3
- Énergie(s) 3
  - de formation 116
  - de type flux 21
  - fossiles 768
  - interne 92
  - libre 93
  - nucléaire 15, 28, 769
  - primaire 5
  - renouvelables 15, 768
  - solaire thermique 809
- Enthalpie 92
  - libre 93
- Éolienne 510
- Équation(s)
  - d'état 53
  - de Clapeyron 108
- Équilibre 138
- État(s) 47
  - stationnaires 172
- Évaluation environnementale intégrée (IEA) 277
- F**
- Fission 18, 782
  - nucléaire 28
- Flux 72
  - critique 430
  - de chaleur 64
  - généralisé 168
- Fonction
  - coût 261
  - objectif 261
- Fonctionnement 223
- Fonctions d'état caractéristiques 92

Force généralisée 167

Formes

de l'énergie 25

stockables 20

Frottement(s) mécanique(s) 159

visqueux 160

Fusion 19

nucléaire 28

thermonucléaire 799

## G

Gaz 121

à effet de serre 8

Générateur(s)

automatique de modèle (GAM) 239

thermoélectronique ou thermoionique 832

Géothermie et énergie des océans 810

Glissement 435

*Global Warming Potential* 274

## H

Hélices marines et aériennes 508

Humidification-réfrigérants atmosphériques 753

Humidité

absolue 742

relative ou degré hygrométrique 742

Hydrogène 641

Hygromètre 748

## I

Identification 245

Impact environnemental global (IEG) 276

Installation de pompage 498

Intégration

des systèmes et procédés énergétiques 872

et environnement 888

fonctionnelle 888

thermique 880

Interface homme-machine 236

Irréversibilité(s) 140

externes 141

internes 141

Isolation

dans l'habitat 359

dans l'industrie 359

dynamique 333

passive 333

## J

Joule 611

## L

Liquéfaction des gaz 619

Liquide 121

## M

Machine(s)

à absorption 601

à adsorption 601

à compression mécanique de vapeur 567

à effets thermomagnétiques 616

à éjecteur 612

à gaz permanent 610

à résorption 601

à sorption 601

en cascade 589

thermoélectriques 613

Matériaux isolants 354

MCI 668

Méthode

DTLM 419

NUT 420

Minimum de production d'entropie 172

Modélisation 221

Moteurs à combustion

externe 715

interne 668

## N

Nombres adimensionnels 390

## O

Optimisation 260

d'échangeurs de chaleur 450

de conception 283

dynamique 283, 320

statique 283, 284

Organigramme 234

## P

Paramètres 230

Période T d'un élément radioactif 775

Pertes

de charge régulière, singulière 474

de pression en diphasique 476

Physique du vide 527

Pile(s)

à combustible 19, 841

électrothermiques 859

Polygénération 866  
 Pompage d'une enceinte 533  
 Pompes à chaleur 593  
 Ports 229  
 Potentiel  
   chimique 164  
   de réchauffement planétaire GWP 274  
 Pouvoir(s)  
   calorifiques 643  
   combustible 643  
 Pression 121  
 Projet 178  
 Psychromètre 747

## R

Réacteurs à fission 784  
 Recompression mécanique de vapeur 597  
 Réduction 244  
 Régime  
   dynamique stationnaire 34  
   instationnaire ou transitoire 35  
   nominal 34  
 Règle des phases 105  
 Rendement 150  
   récepteur, rendement moteur 488  
 Richesse d'un mélange 644

## S

Séchage 751  
 Séchoirs à air 751  
 Section efficace 781  
 Sélectivité héliothermique 823  
 Simulation 250  
   séquentielle 251  
   simultanée 251  
 Solide 121, 159  
 Stirling 610  
 Stockage(s)  
   d'énergie 35, 851  
   électrique 858  
   par chaleur sensible 851  
   par chaleur sensible et latente 854  
   thermiques 851  
 Supercapacités 859  
 Supraconduction 632  
 Système(s) 228  
   fermé 47  
   indirects 594  
   isolé 47  
   ouvert 47  
   thermodynamique 45

## T

Taux  
   d'aération ou facteur d'air 644  
   de rentabilité interne 190  
 Température  
   adiabatique de combustion 648  
   de mélange 386  
   maximale 648  
 Temps de retour  
   d'un surinvestissement 191  
   sur investissement 191  
 TEWI (*Total Equivalent Warming Impact*) 274  
 Théorème d'Euler 483  
 Thermoacoustique 612  
 Thermochimie de la combustion 642  
 Thermodynamique optimale 265  
 Thermoéconomie 193  
 Thermostatique 43  
 Transfert d'énergie 33  
 Transformation  
   de Fanno 399  
   de Rayleigh 402  
   polytropique 144  
   réversible 139  
   thermodynamique 59  
 Transitoire des capteurs plans 821  
 Transport d'énergie 36  
 Trigénération 866  
 Tube de Ranque 545  
 Turbines  
   à combustion TAC 696  
   aéronautiques 712  
   hydrauliques 504  
 Turbomachines radiales ou axiales 481

## U

Unités 10

## V

Validations 239  
 Vapeur et chaudière 724  
 Variables 230  
   conjuguées 51  
   d'état 50  
   extensives 50  
   intensives 51  
 Vecteur hydrogène 20  
 Vitesse moyenne débitante 385